5676

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р1-5676

И.К. Взоров

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ И ПРОБЕГОВ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

1971

Р1-5676

И.К. Взоров

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ И ПРОБЕГОВ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в ЖЭТФ

Средний свободный пробег R заряженной частицы, теряющей при прохождении через вещество свою энергию на ионизацию и возбуждение атомов окружающей среды, связан с ее начальной энергией T соотношением:

$$R\ (г\cdot см^{-2}) = \int_0^T \frac{dT}{-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dX}} , \qquad (I)$$

где ρ – плотность вещества в г·см$^{-3}$, а $\frac{dE}{dX}$ – ионизационные потери энергии, описываемые известной формулой Бете-Блоха. Для быстрых частиц, тяжелее электрона

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dX}\ (Мэв\cdot г^{-1}\cdot см^{2}) = 0{,}1536\,\frac{Z}{A}\cdot\frac{z^2}{\beta^2}\left[\ln\frac{2mc^2\beta^2 W}{(1-\beta^2)J^2} - 2\beta^2 - \delta\right] \qquad (2)$$

(см., например, /I/)

z – заряд частицы, β – ее скорость в единицах скорости света c ; m – масса электрона; Z и A – атомный номер и атомный вес тормозящего вещества; J – средний потенциал ионизации его атомов; W – максимальная энергия (в Мэв), передаваемая проходящей частицей атомным электронам, равная в соответствии с законами сохранения /2/

$$W = \frac{E^2 - (Mc^2)^2}{Mc^2\left(\frac{M}{2m} + \frac{m}{2M} + \frac{E}{Mc^2}\right)} \approx \begin{cases} 2mc^2\frac{\beta^2}{1-\beta^2} & \text{при } E \ll \frac{M}{2m}Mc^2, \\ E & \text{при } E \gg \frac{M}{2m}Mc^2, \end{cases}$$

M – масса частицы; $E = T + Mc^2$ – ее полная энергия;
δ – поправка на эффект плотности, связанный с поляризацией среды /3/

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } X < X_0 , \\ 4,606X + C + a(X_1 - X)^s & \text{при } X_0 < X < X_1 , \\ 4,606X + C & \text{при } X_1 < X , \end{cases}$$

$$X \equiv \log_{10}\left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)^{1/2} , \quad C = -2\ln\frac{J}{h\nu_p} - 1 , \quad h\nu_p = 2,118\left(\frac{Z}{A}\rho\right)^{1/2} R_y ,$$

X_0, X_1, a и S – константы, зависящие только от выбора вещества и от принятого значения J.

Из-за сложности входящих в него выражений соотношение "пробег–энергия" (I) не имеет вида аналитической зависимости $R = f(T)$ и вычисление пробегов частиц для каждого вещества производится путем численного интегрирования с предварительным вычислением значений $\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dX}\right)$ во всей области энергий от ~ 0 до T (либо по эмпирическим формулам, аппроксимирующим экспериментально измеренные или вычисленные ранее значения R(T)). Поэтому представляется желательным, хотя бы за счет некоторой потери точности окончательных результатов, получить более простые, а главное – имеющие вид функциональной зависимости от энергии частицы выражения для ионизационных потерь и пробегов частиц.

Частично такое упрощение было получено в работе /4/, где показывается, что погрешности в вычислении потерь протонов не будут превышать 6%, а пробегов – 4%, если поправку на эффект плотности сразу же вычислять по асимптотической формуле δ = 4,606X+C, справедливой лишь при очень высоких энергиях частиц; при этом отпадает необходимость определения констант X_1, a и S, подбираемых для каждого конкретного вещества в отдельности. Кроме того, ионизационные потери перестают зависеть от потенциала ионизации атомов тормозящей среды (на это свойство ионизационных потерь при X > X_1 указывал в свое время Ферми/5/).

Этот результат, а также сам вид приводимых выше выражений наводит на мысль, что дальнейшее упрощение может быть получено, если асимптотическую форму выражений принять и для некоторых других величин, входящих в исходные формулы.

Будем считать, что $\beta^2 \approx 1$, $\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = (E/Mc^2)^2 - 1 \approx \left(\frac{E}{Mc^2}\right)^2$

(хотя частица при этом не обязательно должна быть релятивистской), $\delta = 4{,}606X + C$ и, наконец, что максимальная передача энергии

$$W = 2mc^2 \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \approx 2mc^2 (E/Mc^2)^2 \quad \text{при} \quad E \leqslant \frac{M}{2m} Mc^2$$

(а не только при $E \ll \frac{M}{2m} Mc^2$) и $W = E$ при $E \geqslant \frac{M}{2m} Mc^2$.

В таких предположениях, после приведения подобных членов и подстановки числовых значений $\ln 2mc^2$, $\ln\ 2{,}118\,Ry$ ($1\,Ry = 13{,}60 \cdot 10^{-6}$ Мэв) и др., формула Бете-Блоха принимает вид

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dX} \approx 0{,}1536 \frac{Z}{A} z^2 \left[20 - \ln\left(\frac{Z}{A}\rho\right) + 2\ln\left(E/Mc^2\right)\right] \quad \text{при } E \leqslant \frac{M}{2m} Mc^2 \qquad (2а)$$

и

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dX} \approx 0{,}1536 \frac{Z}{A} z^2 \left[20 - \ln\left(\frac{Z}{A}\rho\right) + \ln E\right] \quad \text{при } E \geqslant \frac{M}{2m} Mc^2 , \qquad (2б)$$

т.е. сводится к двум гораздо более простым выражениям, приближенный характер которых тем не менее не вносит значительных ошибок в результаты вычислений. Сравнение со значениями $\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dX}$ протонов и μ-мезонов, вычисленными по точным формулам для целого ряда веществ /6-9/, позволяет сделать вывод, что выражение (2а) можно применять, начиная уже с $E \approx 3Mc^2$, если вычисленные значения умножать на поправочный коэффициент

$$K(Z) = 0{,}982 - 5{,}4 \cdot 10^{-4} Z .$$

В этом случае отклонения от точных значений $\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dX}$ будут составлять около $\pm$ (2-3)% для легких и средних веществ и $\pm$ (4-5)% для тяжелых (а без учета $K(Z)$ - примерно в два раза больше). Значения же ионизационных потерь, вычисляемые по приближенной формуле (2б), практически совпадают с точными значениями.

С учетом сказанного, выражение (I) может быть записано как

$$R(E) = R_0(E_0) + \left(0.1536 \frac{Z}{A} z^2\right)^{-1} \int_{E_0}^{E} \frac{dE}{a + b\ln E} ,$$

где $a = [20 - \ln(\frac{Z}{A}\rho) - 2\ln Mc^2]$, $b = 2$, когда ионизационные потери описываются приближенной формулой (2а) и

$a = [20 - \ln(\frac{Z}{A}\rho)]$, b = I, когда формулой (2б);

E_0 – энергия, начиная с которой, можно считать применимой одну из этих формул. (т.е. $E_0 \approx 3Mc^2$ в первом случае и $E_0 = \frac{M}{2m}Mc^2$ во втором), $R_0(E_0)$ – "остаточный" пробег частицы с энергией E_0.

С помощью замены $-b\ln E = x$, $-a = \alpha$ и $b^{-1} = \mu$ интеграл в правой части сводится к табличному интегралу

$$\int_u^v \frac{e^{-\mu x}}{\alpha + x},$$

решение которого имеет вид /IO/

$$e^{\alpha\mu}\{Ei[-(\alpha+v)\mu] - Ei[-(\alpha+u)\mu]\}.$$

$Ei(y)$ – интегральная показательная функция, определяемая как $\int_{-\infty}^{y} \frac{e^t}{t}dt$, в общем случае в конечном виде через элементарные функции не выражается, но при больших значениях y может быть представлена соотношением /II/

$$Ei(y) = F\frac{e^y}{y},$$

где F – слабо меняющаяся функция y (при $y \gg$ I $F = 1 + \frac{1!}{y} + \frac{2!}{y^2} + \ldots$), которую с точностью до нескольких процентов можно считать постоянной, равной среднему (по диапазону изменения аргумента) значению $\bar{F}$. В нашем случае диапазон значений, которые может принимать аргумент $y = -(\alpha + x)\mu \equiv \frac{a}{b} + \ln E$, попадает в область IO $< y <$ 20 при $3Mc^2 < E \leq \frac{M}{2m}Mc^2$ и в область $y > 25$ при $E \gg \frac{M}{2m}Mc^2$. В первом случае можно принять $\bar{F} \approx$ I,IO, во втором – $\bar{F} \approx$ I,03. В результате выражение (I) принимает вид:

$$R(E) = R_0(E_0) + (0{,}1536\frac{Z}{A}z^2)^{-1}\frac{exp(-\frac{a}{b})}{b}\bar{F}\left[\frac{exp(\frac{a}{b}+\ln E)}{\frac{a}{b}+\ln E} - \frac{exp(\frac{a}{b}+\ln E_0)}{\frac{a}{b}+\ln E_0}\right] =$$

$$= \bar{F}\frac{E}{(-1/\rho\frac{dE}{dx})_E} + \left[R_0(E_0) - \bar{F}\frac{E_0}{(-1/\rho\frac{dE}{dx})_{E_0}}\right].$$

Непосредственный подсчет показывает, что при $E_0 \approx 3Mc^2$ член

$F\frac{E_0}{\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\right)_{E_0}} = \frac{1{,}1\cdot 3Mc^2}{0{,}1536}\,\frac{A}{Z}\,z^{-2}\left[20-\ln\left(\frac{Z}{A}\rho\right)+2\ln 3\right]^{-1}$ изменяется примерно от $1{,}0\frac{A}{Z}\frac{Mc^2}{z^2}$ для легких элементов до $\sim 1{,}1\frac{A}{Z}\frac{Mc^2}{z^2}$ для тяжелых, а пробег $R_0(3Mc^2)$ для тех же элементов, согласно табличным данным /8/ - от $\sim 0{,}46\frac{A}{Z}\frac{Mc^2}{z^2}$ до $\sim 0{,}63\frac{A}{Z}\frac{Mc^2}{z^2}$. Иначе говоря, разность $\Delta R = \left[R_0(E_0) - 1{,}1\,E_0/\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\right)_{E_0}\right]$ при $E_0 \approx 3Mc^2$ варьируется весьма незначительно и ее можно считать постоянной и равной $\approx -0{,}5\frac{A}{Z}\frac{Mc^2}{z^2}$.

Точно так же и при $E_0 = \frac{M}{2m}Mc^2$ разность

$$\Delta R = \left\{1{,}1\frac{M}{2m}\frac{Mc^2}{0{,}1536}\frac{A}{Z}z^{-2}\left[20-\ln\left(\frac{Z}{A}\rho\right)+2\ln\left(\frac{M}{2m}\right)\right]^{-1} - 0{,}5\frac{A}{Z}\frac{Mc^2}{z^2} - \right.$$

$$\left. - 1{,}03\frac{M}{2m}\frac{Mc^2}{0{,}1536}\frac{A}{Z}z^{-2}\left[20-\ln\left(\frac{Z}{A}\rho\right)+\ln\left(\frac{M}{2m}Mc^2\right)\right]^{-1}\right\} \approx$$

$$\approx 0{,}07\frac{M}{2m}\frac{Mc^2}{0{,}1536}\frac{A}{Z}z^{-2}\left[20-\ln\left(\frac{Z}{A}\rho\right)+\ln\left(\frac{M}{2m}Mc^2\right)\right]^{-1}$$

можно заменить ее усредненным значением

$$\overline{\Delta R} \approx 0{,}455\frac{M}{2m}\frac{Mc^2}{z^2}\frac{A}{Z}\overline{\left[20-\ln\left(\frac{Z}{A}\rho\right)+\ln\left(\frac{M}{2m}Mc^2\right)\right]^{-1}}$$

(для протонов $\overline{\Delta R} \approx 1{,}23\cdot 10^4\frac{A}{Z}$, для μ-мезонов $\overline{\Delta R} \approx 175\frac{A}{Z}$). Таким образом,

$$R(E) \approx 1{,}1\frac{E}{\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\right)_E} - 0{,}5\frac{A}{Z}\frac{Mc^2}{z^2} \quad \text{при} \quad 3Mc^2 < E \le \frac{M}{2m}Mc^2 \qquad (1а)$$

и

$$R(E) \approx 1{,}03\frac{E}{\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\right)_E} - \overline{\Delta R}\left(\frac{A}{Z}, \frac{Mc^2}{z^2}\right) \quad \text{при} \quad E \geqslant \frac{M}{2m}Mc^2 \qquad (1б)$$

– вслед за формулой Бете-Блоха упрощается и соотношение "пробег-энергия".

Сравнение со значениями пробегов протонов /6,7/ и μ-мезонов /8,9/, вычисленными точным образом, показывает, что полученные приближенные выражения (Iа) и (Iб) позволяют вычислять пробеги любых частиц с точностью ± (2-4)% (при этом входящие в них значения ионизационных потерь подсчитываются по формулам (2а), с учетом поправочного коэффициента К (z), и(2б) соответственно). Что же касается отсутствия в этих выражениях, как и выражениях (2а) и (2б), зависимости от потенциала ионизации атомов тормозящего вещества J , то сопоставление значений R и $\frac{1}{J}\frac{dE}{dx}$ протонов в свинце, вычисленных точным образом при двух отличающихся значениях J(I070 эв в /6/ и 826эв в /7/), показывает, что в действительности при Е $\geqslant 3Mc^2$ зависимость пробегов и ионизационных потерь от потенциала ионизации хотя и не исчезает полностью, но и не выходит за пределы указанной выше для всех этих выражений точности. В то же время независимость от J и особенно от X_1 , a и S , помимо играющей немаловажную роль простоты (по сравнению с исходными точными формулами), делает приближенные выражения (Iа)-(2б) полезными при вычислении пробегов частиц и их ионизационных потерь в сложных веществах и химических соединениях, в веществах, для которых отсутствуют данные относительно потенциалов ионизации и поправок на эффект плотности, а также в ряде других практических расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

I. С.В.Стародубцев, А.М.Романов. Прохождение заряженных частиц через вещество. Из-во АН Уз.ССР, Ташкент, 1962.

2. Б.Росси. Частицы больших энергий. ГИТЛ, М., 1955.

3. R.M.Sternheimer. Phys. Rev., 88, 851 (1952); 91, 256 (1953); 103, 511 (1956).

4. T.W.Armstrong, R.G.Alsmiller. Nucl. Instr. and Meth., 82, 289 (1970).

5. E.Fermi. Phys. Rev., 56, 1242 (1939); 57, 485 (1940).

6. R.M.Sternheimer. Phys. Rev., 115, 137 (1959).

7. W.S.C.Williams, I.F.Corbet, в сборнике "High Energy and Nuclear Physics Data Handbook", Rutherford High Energy Laboratory, Chilton, 1963.

8. W.H.Barkas, M.J.Berger, в книге "Studies in Penetration of Charged Particles in Matter", Natl. Acad. Sci. - Natl. Res. Council, Publ. 1133 (1964).

9. P.M.Joseph. Nucl. Instr. and Meth., 75, 13 (1963).

I0. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

II. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. "Наука", М., 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел

I2 марта I97I года.