ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1-5234

В.С. Курбатов, А.А. Тяпкин

ВЫЧИТАНИЕ ФОНА ПРИ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1970

P1-5234

В.С. Курбатов, А.А. Тяпкин

ВЫЧИТАНИЕ ФОНА ПРИ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Направлено в ЯФ.

1. Два варианта определения оценок параметров методом максимального правдоподобия

Наиболее общим методом оценки параметров теоретических функций по экспериментальным данным является метод максимального правдоподобия, предложенный Фишером /1-2/. Этот метод, как известно, обеспечивает получение максимально возможной точности определения параметров /3/. Типичным для ядерной физики и физики высоких энергий является случай, когда экспериментальные данные в виде определенных зарегистрированных событий, представляющих собой случайную выборку из некоторой генеральной совокупности, используются для определения оценок параметров теоретических выражений дифференциальных сечений наблюдаемых процессов.

Обозначим объем выборки (число зарегистрированных событий) числом N, а совокупность измеренных для каждого события координат x_1, x_2 ... x_ν – величиной X. Будем считать, что существует правильная теория, которая описывает плотность вероятности распределения событий по измеряемым координатам в виде функции $f(X,A)$, где A обозначает совокупность определяемых параметров a_1, a_2 ... .. a_m. С дифференциальным сечением соответствующего процесса эта функция связана соотношением

$$f(X;A)=\frac{d\sigma/dX}{\int_D (d\sigma/dX)\,dX},$$

где D – область изменений измеряемых координат.

Тогда, согласно принципу максимального правдоподобия, оценками параметров A служат такие значения $\hat{A}$, которые обращают в минимум следующий функционал:

$$\Phi=-\sum_{i=1}^{N}\ln f(X_i;A). \qquad (1)$$

X_i – значения координат X у i-го события.

К проблеме оценки параметров можно подойти несколько иначе, анализируя гистограмму распределения наблюдаемых событий. Для удобства предположим, что каждое событие характеризуется лишь одной измеряемой координатой, которая может изменяться в некоторых пределах $a \le X \le b$. Построим гистограмму распределения наблюдаемых событий по координате X с шагом h:

$$k=\frac{(b-a)}{h}.$$

k – количество ячеек гистограммы. Для каждой ячейки может быть рассчитана ожидаемая вероятность попадания координаты X в ячейку с номером j

$$p_j(A)=\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(X;A)\,dX. \qquad (2)$$

Если в результате эксперимента в первую ячейку гистограммы попало n_1 событий, во вторую – n_2, в j-ую ячейку n_j ($\sum_{j=1}^{k} n_j=N$), то вероятность получить именно такое распределение по числу событий гистограммы следует закону мультиномиального распределения

$$P(n_1,n_2,\dots,n_k)=\frac{N!}{n_1!\,n_2!,\dots n_k!}\prod_{j=1}^{k}[p_j(A)]^{n_j}. \qquad (3)$$

Дальше можно применять стандартную технику принципа максимального правдоподобия, т.е. отыскивать минимум такого функционала

$$\Phi(A)=-\sum_{j=1}^{k} n_j \ln p_j(A). \qquad (4)$$

В предположении о нормальности распределения каждой из n_j (это справедливо при больших n_j) метод максимального правдоподобия приводит к обычному методу наименьших квадратов, т.е. к минимизации функционала:

$$\Phi(A)=\sum_{j=1}^{k}\frac{[n_j-N\cdot p_j(A)]^2}{n_j}.$$

Кроме того, параметры можно оценивать методом минимума χ^2 – функционала:

$$\chi^2(A)=\sum_{j=1}^{k}\frac{[n_j-N\cdot p_j(A)]^2}{N\,p_j(A)}.$$

Совершенно очевидно, что при ширине интервала h, значительно превышающей точность измерения координат событий, гистограммный метод представления экспериментальных данных приводит к потере полученной в эксперименте информации о координатах событий, которая соответственно сказывается и на результатах найденных оценок параметров A. С другой стороны, при уменьшении h должны, естественно, уменьшаться эти потери первоначально имеющейся информации о координатах событий, и метод определения оценок параметров из анализа гистограммного представления экспериментальных данных должен приближаться к рассмотренному выше методу непосредственного анализа полученной совокупности событий[x/]. Полностью тождественные результаты эти методы определения оценок параметров дадут не только при ширине h интервала ячейки, равной точности измерения координат σ_X, но и при $h > \sigma_X$, если в силу ограниченности объема выборки N-разбиение событий по ячейкам гистограммы приведет к тому, что в каждой ячейке окажется не больше одного события. Рассмотрим для этого случая приведенный функционал (4), при минимизации которого находятся оценки искомых параметров. Так как

$$p_j(A) \cong f(X_j; A)h$$

и из суммы $\sum\limits_{j}^{k}$ выпадают члены, для которых $n_j = 0$, то функционал (4) принимает вид

$$\Phi(A) = -\sum_{i=1}^{N} \ln h\ f(X_i; A) = -\sum_{i=1}^{N} \ln f(X_i; A) - N \ln h, \tag{5}$$

где значок i означает порядковый номер только тех ячеек гистограммы, в которые попало по одному зарегистрированному событию. Полученный функционал отличается от функционала (1) лишь последним членом, не зависящим от параметров A, и тем, что в нем величины X_i обозначают не координаты зарегистрированных событий, а центры ячеек

[x/] В литературе можно встретить постановку вопроса об оптимальной ширине ячейки гистограммы. Так, например, в книге Л. Яноши/4/ рассмотрен вопрос об определении оптимальной ширины ячейки гистограммы с точки зрения χ^2-критерия. Однако, как отмечено в той же работе, величина интервала гистограммы, определенная из условия получения достаточной статистической точности в каждом интервале, оптимальна лишь в рамках выбранного χ^2 критерия, а не общего принципа максимального правдоподобия.

гистограммы, в которые попали эти события. Но такое различие совершенно не существенно, так как оно не отражается на точности оценок, а также и на получаемых конкретных значениях оценок параметров, если можно пренебречь изменением функции $f(X;A)$ в пределах ширины интервала отдельной ячейки. Это значит, что дальнейшее уменьшение ширины интервала ячеек гистограммы уже не приведет к повышению точности определения оценок параметров, хотя гистограммное представление данных по-прежнему еще не соответствует точности измерения координат зарегистрированных событий. Совершенно очевидно, что высокая точность измерений координат случайных событий может сказаться на точности определения оценок теоретических параметров только при достаточно большом объеме статистической выборки событий.

Совпадение функционалов (5) и (1) означает, что рассмотренный метод определения оценок искомых параметров из анализа гистограммы распределения зарегистрированных событий в предельном случае переходит в оптимальный вариант оценки параметров по методу максимального правдоподобия, когда экспериментальный материал анализируется непосредственно без потери полученной в эксперименте информации.

При сопоставлении этих двух методов анализа экспериментальных данных мы не учитывали погрешности измерения самих координат событий, считая, что основную неопределенность вносят флуктуации в числе зарегистрированных событий. Конечно, при достаточно большой статистике метод гистограмм еще до выполнения условия попадания в каждый интервал ячейки не больше одного события достигнет предельно возможной точности, если ширина интервала h станет равной погрешности измерения соответствующей координаты.

Анализ экспериментальных данных, представленных в виде гистограмм, в связи с практическими удобствами использования метода наименьших квадратов широко применяется и в тех случаях, когда такое представление данных приводит к определенной потере полученной в эксперименте информации. Однако при современных средствах вычислительной техники имеются все основания применять оптимальный метод оценки теоретических параметров из непосредственного анализа экспериментального материала без внесения огрублений при разбиении его по отдельным ячейкам гистограммы. Для практической реализации этого метода необходимо, однако, решить задачу учёта информации, получаемой в фоновых измерениях.

II. Учёт фоновых событий при оценке параметров

На практике приходится анализировать экспериментальные данные в виде зарегистрированных событий, обусловленных исследуемым эффектом и фоновыми причинами, а также экспериментальные данные, полученные отдельно в фоновом эксперименте. В гистограммном методе представления экспериментальных данных учёт фоновых измерений сводится, естественно, к простому вычитанию числа фоновых событий[x/], зарегистрированных в соответствующих интервалах переменных, из числа событий, полученных в основном эксперименте при исследовании эффекта в присутствии фона. Найденная таким образом разностная гистограмма распределения числа событий используется затем для определения оценок параметров, определяющих теоретическое описание

[x/] При этом имеется в виду, что результаты, полученные непосредственно в фоновом эксперименте, по продолжительности эксперимента и интенсивности первичного пучка частиц, приведены путем соответствующей перенормировки к условиям основного эксперимента.

исследуемого эффекта. И лишь при определении погрешностей полученных оценок параметров учитывается, что дисперсии использованных при анализе разностей $n_j^{э+ф} - n_j^{ф}$ равны сумме числа событий, зарегистрированных в основном и фоновом экспериментах $n_j^{э+ф} + n_j^{ф}$.

Рассмотрим теперь задачу учёта фоновых измерений при определении параметров методом максимального правдоподобия в результате анализа, в котором используется вся полученная в эксперименте информация о координатах зарегистрированных событий. События, зарегистрированные в основном эксперименте, представляют собой случайную выборку $M_{э+ф}$ событий с координатами $X_1, X_2, X_i, \ldots, X_{N_{э+ф}}$ из генеральной совокупности событий, характеризуемой некоторой функцией плотности вероятности распределения по переменным X

$$f_{э+ф}(X) = (1-\beta) f_э(X;A) + \beta f_ф(X), \qquad (6)$$

где $f_э(X;A)$ и $f_ф(X)$ - соответственно плотности вероятности распределения событий исследуемого эффекта и фонового происхождения, а β -истинное значение относительной доли фоновых событий.

Аналогично, события, зарегистрированные в фоновом эксперименте, представляют собой случайную выборку $M_ф$ - событий с координатами $X_1, X_2, \ldots, X_i \ldots X_{N_ф}$ из генеральной совокупности, характеризуемой плотностью распределения фоновых событий $f_ф(X)$.

Анализируя методом максимального правдоподобия данные только выборки $M_{э+ф}$ без учета результатов фонового эксперимента, получим кривую регрессии $\hat{f}_{э+ф}(X)$, представляющую наилучшую оценку функции плотности вероятности распределения событий генеральной совокупности $f_{э+ф}(X)$. В свою очередь, анализ данных фонового распределения позволяет определить некоторую кривую регрессии $\hat{f}_{ф}(X)$, являющейся оценкой истинной функции плотности распределения фоновых событий. В силу сходимости оценок, даваемых методом максимального правдоподобия, получаемые линии регрессии при неограниченном возрастании объемов выборок стремятся к истинным функциям распределения

$$\hat{f}_{э+ф}(X) \to f_{э+ф}(X) \qquad \hat{f}_{ф}(X) \to f_{ф}(X).$$
$$N_{э+ф} \to \infty$$

При этом $\frac{N_{ф}}{N_{э+ф}} \to \beta$, а получаемые в основном и фоновом эксперименте плотности распределения событий стремятся соответственно к истинным плотностям распределения событий $N_{э+ф} \cdot f_{э+ф}(X)$ и $N_{ф} f_{ф}(X)$. Это значит, что разность экспериментально наблюдаемых плотностей распределений событий $N_{э+ф} \hat{f}_{э+ф}(X) - N_{ф} \hat{f}_{ф}(X)$ стремится в предельном случае $N_{э+ф} \to \infty$ и $N_{ф} \to \infty$ в силу соотношения (6) к истинному распределению плотности событий исследуемого эффекта $N_{э} f_{э}(X;A)$, эффективную оценку которого нам необходимо найти для реальных выборок ограниченного объема. Конечно, оценкой искомого распределения при ограниченном объеме случайных выборок $M_{э+ф}$ и $M_{ф}$ может быть функция распределения $(N_{э+ф}-N_{ф}) f_{э}(X;\hat{A})$, найденная из анализа разности $N_{э+ф} \hat{f}_{э+ф}(X) - N_{ф} \hat{f}_{ф}(X)$. Однако предварительное получение кривых регрессий $\hat{f}_{э+ф}(X)$ и $\hat{f}_{ф}(X)$ из отдельных анализов выборок $M_{э+ф}$ и $M_{ф}$ также связано с некоторой потерей первоначально имеющейся экспериментальной информации из-за огрублений, вносимых при выборе теоретической формы описания этих функций. Кроме того, такой вариант анализа излишне осложнен как необходимостью выбора гипотезы теоретического описания фона, так и самим проведением предварительного анализа с целью определения вспомогательных кривых регрессии. Поэтому данный метод учёта результатов фоновых измерений следует применять только в том случае, когда

имеются надежные дополнительные сведения о функции распределения фоновых событий. Так, например, иногда имеются теоретические основания принять наиболее простую гипотезу о равномерности распределения фона. Такой пример учёта фоновых событий при использовании метода максимального правдоподобия рассмотрен в работе [/5/].

В настоящей статье предлагается наиболее общий метод вычитания фона при определении оценок параметров методом максимального правдоподобия с учётом индивидуальных координат зарегистрированных событий. Этот метод не связан с принятием каких-либо гипотез о функции распределения фоновых событий, и подобно обычному методу вычитания фона при гистограммном представлении экспериментальных данных учитывает только информацию, полученную об этой функции распределения в специальном фоновом эксперименте.

Представим себе, что у нас появилась возможность установить, какие именно события в выборке $M_{э+ф}$ являются фоновыми. Тогда, отбросив эти ложные события, мы могли бы представить вероятность получения событий, относящихся только к исследуемому эффекту, в следующем виде:

$$P_{э} = W(N_{э+ф} - N'_{ф}) \prod_{j=1}^{N_{э+ф}-N'_{ф}} f(X_j;A)\,dX_j \,. \qquad (7)$$

где $N'_{ф}$ – общее число фоновых событий, зарегистрированных в основном эксперименте, $W(N_{э+ф} - N'_{ф})$ – вероятность получения $(N_{э+ф} - N'_{ф})$ событий эффекта.

Требование определения оценок параметров A из условия получения максимума вероятности $P_{э}$ и приводит к минимизации функционала (1) при отсутствии фона в измерениях x/.

x/ Заметим, что взятый с обратным знаком $\ln P_{э}$ отличается от приведенного функционала (1) на величину $-\ln W(N_{э+ф} - N'_{ф})$, не зависящую от параметров A, определяющих нормированную плотность распределения событий по координатам $f(X;A)$. Этот член функционала правдоподобия необходимо учитывать при использовании полного сечения исследуемого процесса.

Но вместо простого отбрасывания известных фоновых событий можно было бы осуществить своеобразное "вычитание" их из выражения вероятности получения всей выборки $M_{э+ф}$

$$P'_{э+ф} = W(N_{э+ф}) \prod_{j=1}^{N_{э+ф}} f(X_j; A)\,dX_j\ , \tag{8}$$

при составлении которого фоновые события были ошибочно отнесены к исследуемому эффекту. Действительно, мы придем к точному выражению (7), если ложно составленную вероятность $P'_{э+ф}$ умножим на величину

$$\gamma_0 = \frac{W(N_{э+ф} - N'_ф)}{W(N_{э+ф})} \cdot \frac{1}{\prod_k^{N'_ф} f(X_k; A)\,dX_k}\,,$$

включив в произведение $\prod_{k=1}^{N'_ф} f(X_k;A)\,dX_k$ вероятности получения за счёт исследуемого эффекта только событий, совпадающих с известными фоновыми событиями выборки $M_{э+ф}$.

Ту же процедуру "вычитания" следует применить и тогда, когда ложные фоновые события в выборке $M_{э+ф}$ неизвестны, а статистическая оценка γ множителя γ_0 получена на основе специально поставленного фонового эксперимента. То есть, вместо множителя γ_0 мы воспользуемся множителем

$$\gamma = \frac{W(N_{э+ф} - N_ф)}{W(N_{э+ф})} \cdot \frac{1}{\prod_i^{N_ф} f(X_i; A)\,dX_i}\,, \tag{9}$$

отношение которого к γ_0 в среднем равно единице.

После умножения $P'_{э+ф}$ на γ вместо $P_э$ получим оценку этой величины

$$\hat{P}_э = W(N_{э+ф} - N_ф)\, \frac{\prod_{j=1}^{N_{э+ф}} f(X_j;A)\,dX_j}{\prod_i^{N_ф} f(X_i;A)\,dX_i}\,. \tag{10}$$

Соответствующий оценке вероятности получения событий эффекта в выборке $M_{э+ф}$ функционал правдоподобия с точностью до члена $-\ln W(N_{э+ф} - N_ф)$ имеет вид

$$\Phi = -\Big[\sum_{j=1}^{N_{э+ф}} \ln f(X_j;A) - \sum_{i=1}^{N_ф} \ln f(X_i;A)\Big]\,. \tag{11}$$

Из условия минимизации этого функционала и должны находиться оценки параметров A в случае, когда единственные сведения о вероятности присутствия ложных событий в результатах основного эксперимента получены в специально поставленном фоновом эксперименте. То есть соответствующие оценки $\hat{A}(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots a_m)$ параметров должны определяться из уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = -\Big[\sum_{j=1}^{N_{э+ф}} \frac{\partial \ln f(X_j;\hat{A})}{\partial A} - \sum_{i=1}^{N_ф} \frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\Big] = 0\,. \tag{12}$$

Предложенный метод учёта результатов фонового эксперимента совершенно аналогичен вычитанию фоновых случаев в гистограммном представлении экспериментальных данных. В частности, исходный функционал правдоподобия, используемый при гистограммном представлении данных, в предельном случае, когда в каждую ячейку гистограммы попадает не больше одного события, переходит в полученный нами функционал (11). Действительно, разностная гистограмма представлена в каждом интервале переменных X числом событий, зарегистрированных в основном эксперименте $(n_{э+ф})_j$ за вычетом числа событий $(n_ф)_j$, зарегистрированных в соответствующем интервале в фоновом эксперименте. Следовательно, функционал (4), при минимизации которого определяются оценки параметров, для разностной гистограммы принимает вид

$$\Phi(A) = -\sum_{j=1}^{k} [(n_{э+ф})_j - (n_ф)_j] \ \ln p_j(A) =$$

$$= -[\sum_{j=1}^{k} (n_{э+ф})_j \ln p_j(A) - \sum_{j=1}^{k} (n_ф)_j \ \ln p_j(A)], \qquad (13)$$

где

$$p_j(A) = \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(X;A)dX. \qquad (14)$$

При достаточно малой величине интервала ячейки соотношение (14) может быть заменено на

$$p_j(A) = f(X_j;A)h. \qquad (15)$$

Рассмотрим функционал (13) в случае выбора настолько малой величины интервала h, что при заданной статистике все $(n_{э+ф})_j$ и $(n_ф)_j$ становятся равными либо 0, либо 1. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} (n_{э+ф})_j \ln hf(X_j;A) = \sum_{i=1}^{N_{э+ф}} \ln h f(X_i;A) =$$

$$= N_{э+ф} \ln h + \sum_{i=1}^{N_{э+ф}} \ln f(X_i;A),$$

где суммирование идет только по тем ячейкам гистограммы, для которых $(n_{э+ф})_j = 1$. Соответственно,

$$\sum_{j=1}^{k} (n_ф)_j \ln hf(X_j;A) = N_ф \ln h + \sum_{i=1}^{N_ф} \ln f(X_i;A).$$

Следовательно, функционал (13) принимает вид

$$\Phi(A) = -[\sum_{i=1}^{N_{э+ф}} \ln f(X_i;A) - \sum_{i=1}^{N_ф} \ln f(X_i;A)] - (N_{э+ф} - N_ф)\ln h, \qquad (16)$$

который с точностью до члена $(N_{э+ф} - N_ф)\ln h$, не зависящего от параметра A, совпадает с функционалом (11) для алгебраической совокупности событий выборки $M_{э+ф}$ и $M_ф$. А это значит, что непосредственный анализ методом максимального правдоподобия составленной таким образом алгебраической совокупности событий позволяет определить, с учётом результатов фонового эксперимента оценки искомых параметров теоретического описания исследуемого физического процесса, полностью используя полученную в эксперименте информацию о координатах X зарегистрированных событий.

Следует отметить, что предложенный метод учёта результатов фонового эксперимента отличается большой простотой, так как он практически сводится к обычному непосредственному анализу методом максимального правдоподобия совокупности событий, полученных в основном и фоновом экспериментах. Конкретно рассмотренный вариант данного метода учёта фона исходил из полной тождественности условий фонового и основного экспериментов. В случае различия длительности $T_{э+ф}$ и $T_ф$ этих экспериментов соответствующая перенормировка приводит к замене последнего члена функционала (11) на

$$\frac{T_{э+ф}}{T_ф} \sum_{i=1}^{N_ф} \ln f(X_i;A).$$

III. Определение погрешностей найденных оценок параметров

Определим погрешности оценок параметров, найденных из уравнений (12). Для этой цели в уравнениях (12) первую сумму условно представим в виде отдельных сумм по событиям эффекта и фоновым событиям

$$-\sum_{j=1}^{N_э} \frac{\partial \ln f(X_j;\hat{A})}{\partial A} - \left[\sum_{k=1}^{N'_ф} \frac{\partial \ln f(X_k;\hat{A})}{\partial A} - \sum_{l=1}^{N_ф} \frac{\partial \ln f(X_l;\hat{A})}{\partial A}\right] = 0 \qquad (17)$$

Равенство нулю первой суммы определяет, согласно п.1, оценки $\hat{A}_0$ параметров A в случае отсутствия фона в измерениях. Из-за несовпадения сумм, относящихся к фоновым событиям, зарегистрированных в двух отдельных экспозициях, получаемые из уравнений (17) оценки $\hat{A}$ параметров отличаются от оценок $\hat{A}_0$ параметров, соответствующих бесфоновому эксперименту. Обозначив через $\Delta\hat{A}$ разность $\hat{A}-\hat{A}_0$, произведем замену в первом члене уравнения (17) величины $\hat{A}$ на $\hat{A}_0 + \Delta\hat{A}$. Разлагая в ряд Тейлора и пренебрегая членами второго и более высокого порядка относительно величины разности $\Delta\hat{A}$, найдем

$$\Delta\hat{A} \sum_{j=1}^{N_э} \frac{\partial^2 \ln f(X_j;\hat{A}_0)}{\partial A^2} = -\sum_{k=1}^{N'_ф} \frac{\partial \ln f(X_k;\hat{A})}{\partial A} + \sum_{l=1}^{N_ф} \frac{\partial \ln f(X_l;\hat{A})}{\partial A}. \qquad (18)$$

Так как величины $\hat{A}_0$ являются решениями уравнений $\sum_{j}^{N_э} \frac{\partial \ln f(X_j;\hat{A}_0)}{\partial A} = 0$, соответствующих функционалу правдоподобия при бесфоновых измерениях $\Phi_0 = -\sum_{j=1}^{N_э} \ln f(X_j;A)$, то взятые с обратным знаком суммы вторых производных от $\ln f(X_j;\hat{A}_0)$,

равные $\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial A^2}$, представляют собой обратные величины дисперсий $D^{-1}(\hat{A}_0)$ оценок $\hat{A}_0$ параметров, получаемых при отсутствии фона в измерениях.

Следовательно, величины отклонений оценок $\hat{A}$ параметров от $\hat{A}_0$ равны

$$\Delta\hat{A} = D(\hat{A}_0)\left[\sum_{k=1}^{N'_ф} \frac{\partial \ln f(X_k;\hat{A})}{\partial A} - \sum_{l=1}^{N_ф} \frac{\partial \ln f(X_l;\hat{A})}{\partial A}\right]. \qquad (19)$$

Представим себе, что из неограниченного числа пар повторных независимых выборок $M_{э+ф}$ и $M_ф$ отобрана такая статистическая совокупность их, которая характеризуется совпадением событий, относящихся к исследуемому эффекту. Усредним в таком статистическом коллективе случайную величину разности $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \hat{A}_0$

$$M(\Delta\hat{A}) = D(\hat{A}_0)(\bar{N}'_ф - \bar{N}_ф)\, M\left(\frac{\partial \ln f(X,\hat{A})}{\partial A}\right). \qquad (20)$$

Так как $\bar{N}'_ф = \bar{N}_ф$, то математическое ожидание $M(\Delta\hat{A}) = 0$. Следовательно, определяемые из уравнения (12) компоненты $\hat{A}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots \hat{\alpha}_m)$ случайного вектора $\hat{A}$ являются несмещенными оценками величин компонент $\hat{A}_0(\hat{\alpha}_{01}, \hat{\alpha}_{02}, \dots, \hat{\alpha}_{0m})$ вектора $\hat{A}_0$, являющихся решениями неизвестного нам уравнения

$$\sum_{j=1}^{N_э} \frac{\partial \ln f(X_j;\hat{A}_0)}{\partial A} = 0, \qquad (21)$$

в котором из выборки $M_{э+ф}$ учитываются только события исследуемого эффекта. Это также значит, что использованный нами множитель γ - преобразования соотношения (8) в соотношение (10) в среднем равен истинному значению коэффициента γ_0, обеспечивающему преобразование соотношения (8) в соотношение (7).

Возведя в квадрат величину разности $\Delta\hat{A}$, определяемую соотношением (19), и усредняя по тому же статистическому коллективу, найдем дисперсию

$$
\begin{aligned}
d(\Delta\hat{A}) &= M(\hat{A}-\hat{A}_0)^2 = D^2(\hat{A}_0)M\Big[\Big(\sum_{k=1}^{N'_\phi}\frac{\partial \ln f(X_k;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2 + \\
&+\Big(\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2 - 2\Big(\sum_{k=1}^{N'_\phi}\frac{\partial \ln f(X_k;\hat{A})}{\partial A}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\Big)\Big] = \\
&= D^2(\hat{A}_0)M\Big[\sum_{k=1}^{N'_\phi}\sum_{k'=1}^{N'_\phi}\frac{\partial \ln f(X_k;\hat{A})}{\partial A}\cdot\frac{\partial \ln f(X_{k'};\hat{A})}{\partial A} + \\
&+\sum_{i=1}^{N_\phi}\sum_{i'=1}^{N_\phi}\frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\cdot\frac{\partial \ln f(X_{i'};\hat{A})}{\partial A} - 2\sum_{k=1}^{N'_\phi}\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial \ln f(X_k;\hat{A})}{\partial A}\times \\
&\times\frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\Big] = 2D^2(\hat{A}_0)\Big\{\bar{N}_\phi M\Big[\Big(\frac{\partial \ln f(X;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2\Big] + \\
&+[(\bar{N}_\phi)^2-\bar{N}_\phi]\Big[M\Big(\frac{\partial \ln f(X;A)}{\partial A}\Big)\Big]^2 - (\bar{N}_\phi)^2\Big[M\Big(\frac{\partial \ln f(X;\hat{A})}{\partial A}\Big)\Big]^2\Big\} = \\
&= 2D^2(\hat{A}_0)\bar{N}_\phi\Big\{M\Big[\Big(\frac{\partial \ln f(X;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2\Big] - \Big[M\Big(\frac{\partial \ln f(X;\hat{A})}{\partial A}\Big)\Big]^2\Big\}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Здесь

$$
D(\hat{A}_0) = M(\hat{A}_0 - A)^2 = \frac{1}{M\Big(\dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial A^2}\Big)}.
$$

Но нам неизвестны математические ожидания величин в этом соотношении, определяющем искомую дисперсию $d(\Delta\hat{A})$ случайной величины $\Delta\hat{A}$. Мы можем определить лишь оценки этих точных средних значений на основе имеющихся результатов фонового эксперимента.

Так, $\hat{M}N_\phi = N_\phi$

$$
\begin{aligned}
&\hat{M}\Big[\Big(\frac{\partial \ln f(X;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2\Big] = \frac{1}{N_\phi}\sum_{i=1}^{N_\phi}\Big(\frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2 \\
&\hat{M}\,\frac{\partial \ln f(X;\hat{A})}{\partial A} = \frac{1}{N_\phi}\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

и

$$
\hat{D}(\hat{A}_0) = \frac{1}{\hat{M}\Big(\dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial A^2}\Big)} = -\Big[\sum_{j=1}^{N_{э+ф}}\frac{\partial^2 \ln f(X_j;\hat{A})}{\partial A^2} - \sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial^2 \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A^2}\Big]^{-1}
$$

Заменяя в соотношении (22) точные средние значения величин на их оценки (23), получим окончательное выражение для оценки дисперсии $d(\Delta\hat{A})$, характеризующей среднеквадратичное отклонение случайной величины $\hat{A}$ от $\hat{A}_0$

$$
d(\Delta\hat{A}) = 2\hat{D}^2(\hat{A}_0)\Big[\sum_{i=1}^{N_\phi}\Big(\frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2 - \frac{1}{N_\phi}\Big(\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial \ln f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2\Big].
$$

Оценка полной дисперсии $D(\hat{A})$, характеризующей среднеквадратичное отклонение случайной величины $\hat{A}$ от истинного значения параметра A, будет выражаться суммой $\hat{D}(\hat{A}_0)+\hat{d}(\Delta\hat{A})$

$$D(\hat{A})=\hat{M}(\hat{A}-A)^2=\hat{D}(\hat{A}_0)+2\hat{D}^2(\hat{A}_0)\Big[\sum_{i=1}^{N_\phi}\Big(\frac{\partial\,\ell n\,f(\hat{X};A)}{\partial A}\Big)^2 - \tag{24}$$

$$-\frac{1}{N_\phi}\Big(\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial\,\ell n\,f(X_i;\hat{A})}{\partial A}\Big)^2\Big],$$

где оценка величины дисперсии параметра, определяемого в бесфоновом эксперименте, согласно (23), равна

$$\hat{D}(\hat{A}_0)=-\Big[\sum_{j=1}^{N_{э+ф}}\frac{\partial^2\ell n\,f(X_j;\hat{A})}{\partial A^2}-\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial^2\ell n\,f(X_i;\hat{A})}{\partial A^2}\Big]^{-1}.$$

Полученное соотношение (24) представляет собой условное выражение оценок диагональных членов дисперсионной матрицы $D_{\hat{a}_k\hat{a}_m}$ при статистической независимости определяемых оценок.

Для получения членов дисперсионной матрицы в общем случае необходимо в уравнениях (12) и (17) провести дифференцирование по одному из параметров a_k, а в соотношение (18) ввести разность $\Delta\hat{a}_m$, относящуюся к другому параметру a_m. Проводя расчёты, аналогичные (22), и переходя от точных значений средних к их оценкам (23), получим общее выражение оценок членов дисперсионной матрицы для предложенного метода учета фоновых измерений

$$\hat{D}_{\hat{a}_k,\hat{a}_\ell}=\hat{M}[(\hat{a}_k-a_k)(\hat{a}_\ell-a_\ell)]=$$

$$=\{[W^{-1}]_{k\ell}+2[W^{-1}\,HW^{-1}]_{k\ell}\},$$

Здесь

$$[W]_{k\ell}=-\Big[\sum_{j=1}^{N_{э+ф}}\frac{\partial^2\ell n\,f(X_j;\hat{A})}{\partial a_k\,\partial a_\ell}-\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial^2\ell n\,f(X_i;\hat{A})}{\partial a_k\,\partial a_\ell}\Big]$$

$$[H]_{k\ell}=\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial\,\ell n\,f(X_i;\hat{A})}{\partial a_k}\cdot\frac{\partial\,\ell n\,f(X_i;\hat{A})}{\partial a_\ell}- \tag{25}$$

$$-\frac{1}{N_\phi}\sum_{i=1}^{N_\phi}\frac{\partial\,\ell n\,f(X_i;\hat{A})}{\partial a_k}\sum_{j=1}^{N_\phi}\frac{\partial\,\ell n\,f(X_j;\hat{A})}{\partial a_\ell}.$$

В случае вычитания фона при представлении данных в виде гистограмм оценка матрицы ошибок имеет подобную форму:

$$D_{\hat{a}_k,\hat{a}_\ell}=M[(\hat{a}_k-a_k)(\hat{a}_\ell-a_\ell)]=$$

$$=\{[W^{-1}]_{k\ell}+2[W^{-1}\,HW^{-1}]_{k\ell}\}$$

$$[W]_{k\ell}=-\sum_{j=1}^{k}(n_j^{э+ф}-n_j^{\phi})\frac{\partial^2\ell n\,p_j(\hat{A})}{\partial a_k\,\partial a_\ell};$$

$$[H]_{k\ell} = \sum_{i=1}^{k} n_i^{\text{ф}} \frac{\partial \ln p_i(\hat{A})}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial \ln p_i(\hat{A})}{\partial a_\ell} -$$

$$- \frac{1}{N_{\text{ф}}} \sum_{i=1}^{k} n_i^{\text{ф}} \frac{\partial \ln p_i(A)}{\partial a} \cdot \sum_{j=1}^{k} n_j^{\text{ф}} \frac{\partial \ln p_j(A)}{\partial a_\ell},$$

где k – число ячеек гистограммы; $n_j^{\text{э+ф}}$ – число случаев, зарегистрированных в j -ой ячейке гистограммы в эксперименте эффект + фон; $n_j^{\text{ф}}$ – то же самое, что и $n_j^{\text{э+ф}}$, только в фоновом эксперименте; $N_{\text{ф}}$ – общее число событий в фоновом эксперименте; $p_i(A)$ – вероятность попадания события эффекта в i -ю ячейку гистограммы.

В заключение один из авторов (В.С. Курбатов) выражает признательность С.А. Бунятову, Г.А. Ососкову, И.Н. Силину за обсуждение ряда вопросов, имеющих отношение к рассматриваемой в данной работе проблеме.

Литература

1. R.A. Fisher. Messenger of Math., 41, 155 (1912).
2. Р.А. Фишер. Статистические методы для исследователей. Государственное статистическое издательство, Москва, 1958 г.
3. Г. Крамер. Математические методы статистики. Государственное издательство иностранной литературы, Москва, 1948 г.
4. Л. Яноши. Теория и практика обработки результатов измерений. Издательство "Мир". Москва, 1965 г.
5. С.Н. Соколов, Б.А. Уточкин. Критерий согласия и требования к прибору в методике наложения проекции траектории на трек. Препринт ИФВЭ, СВМ/СЭФ 69-27. Серпухов, 1969 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июля 1970 года.