

Г-859
УФ, 1970, т. 12, в. 4, с. 157-169
ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1 - 4926



В.Г. Гришин, Д.К. Копылова, Г.И. Копылов,
В.Б. Любимов, Б.С. Юлдашев

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
КИНЕМАТИКИ КАСКАДОВ

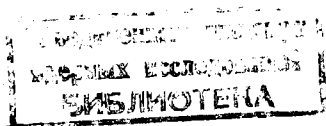
1970

P1 - 4926

В.Г. Гришин, Д.К. Копылова, Г.И. Кспылов,
В.Б. Любимов, Б.С. Юлдашев*

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
КИНЕМАТИКИ КАСКАДОВ**

Направлено в ЯФ



* Институт ядерной физики АН Узбекской ССР, Ташкент

8232/2 чр

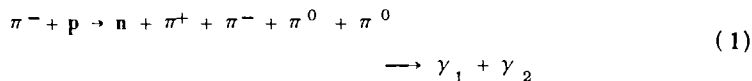
Введение

Когда рождение нескольких частиц происходит каскадом, то в двумерных распределениях по эффективным массам двух групп частиц, взятых из разных ветвей каскада, иногда проявляется некоторая внутренняя структура, а именно: линии уровня этих распределений определяются только характером каскада и массами частиц и от распределения эффективных масс всей системы не зависят. Это явление позволяет в принципе восстанавливать распределение эффективных масс всей системы, измеряя эффективную массу только части продуктов распада. Данная работа представляет собою развитие идеи, изложенной в §3 статьи^{1/}.

§1. Восстановление спектров эффективных масс

$m(\pi^{\pm} \pi^0)$ по спектрам $m(\pi^{\pm} \gamma)$

Рассмотрим следующую задачу. В реакции типа



регистрируются только заряженные частицы и один γ -квант. Необходи-

димо восстановить спектр эффективных масс $m(\pi^\pm \pi^0)$ по измерениям $m(\pi^\pm \gamma)$ (не детектируя π^0 -мезон!).

1. Изобразим интересующую нас часть реакции (1.1) схемой (рис. 1). Эффективная масса пары $(\pi^\pm \pi^0)$ – величина переменная. Эффективная масса частиц 1,2 дается формулой:

$$m_{12}^2 = m_1^2 + 2 \omega_1^{(4)} \omega_2^{(4)} - 2 p_1^{(4)} p_2^{(4)} \cos \theta_{12}^{(4)}, \quad (1.2)$$

где

$$\omega_1^{(4)} = -\frac{m_0^2 - m_1^2 - m_4^2}{2m_4}, \quad \omega_2^{(4)} = \frac{m_4}{2}. \quad (1.3)$$

Индексы $\omega_i^{(k)}$, $p_i^{(k)}$ означают, что энергия и импульс i -частицы заданы в системе покоя частицы k . Так как распределение распадных γ -квантов по $\cos \theta_{12}^{(4)}$ равномерное, то спектр m_{12}^2 при заданной массе m_0 есть π -образная кривая:

$$n(m_{12}^2) = \frac{1}{4 p_1^{(4)} p_2^{(4)}} = \frac{1}{\sqrt{[m_0^2 - (m_1 + m_4)^2][m_0^2 - (m_1 - m_4)^2]}} \quad (1.4)$$

в пределах:

$$m_{12 \min}^2 = f^-(m_0^2, m_1^2) = m_1^2 + 2 \omega_1^{(4)} \omega_2^{(4)} - 2 p_1^{(4)} p_2^{(4)}, \quad (1.5)$$

Эти пределы, как функция m_0^2 , изображены на рис. 2 отдельно для $m_2=0$ и для $m_2 \neq 0$.

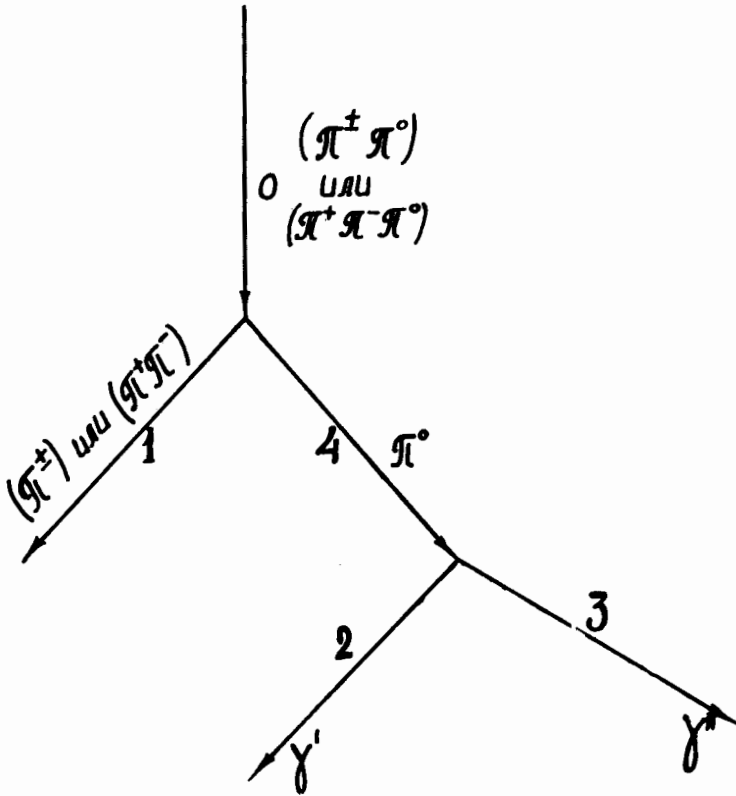


Рис. 1.

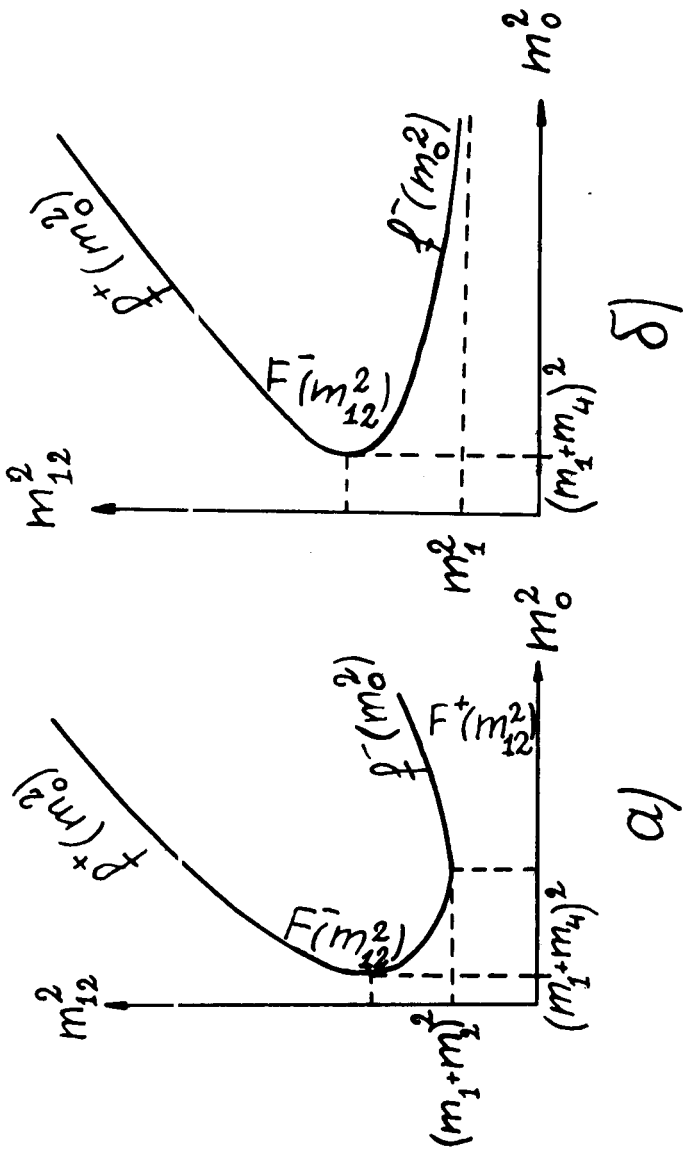


Рис. 2. Пределы изменения m_{12}^2 в зависимости от m_0^2 . а) $m_2 \neq 0$; б) $m_2 = 0$.

Когда плотность спектра m_0^2 есть $N(m_0^2)$, то

$$n(m_{12}^2) = \int_{m_{0 \min}^2}^{m_{0 \max}^2} \frac{N(m_0^2) d m_0^2}{4 p_2^{(4)} p_1^{(4)}}. \quad (1.6)$$

При $m_2=0$ верхний предел есть ∞ (реально значения m_0 ограничены массой M всей системы), а нижний получим, решая (1.5) относительно m_0^2 :

$$m_{0 \min}^2(m_{12}^2) = F^{-1}(m_{12}^2) = m_{12}^2 \left(1 + \frac{m_4^2}{m_{12}^2 - m_1^2}\right). \quad (1.7)$$

В нашем случае $m_1 = m_4 = m_\pi$ и

$$m_{0 \min}^2 = \frac{m_{12}^4}{m_{12}^2 - m_\pi^2}. \quad (1.8)$$

При $m_2 \neq 0$ оба предела переменны:

$$m_{0 \min}^2 \equiv F^{\pm}(m_{12}^2) = m_1^2 + m_4^2 + 2 \omega_1^{(2)} \omega_4^{(2)} \pm 2 p_1^{(2)} p_4^{(2)}, \quad (1.9)$$

где

$$\omega_1^{(2)} = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 - m_2^2}{2 m_2}, \quad \omega_4^{(2)} = \frac{m_4^2 + m_2^2 - m_3^2}{2 m_2}. \quad (1.10)$$

2. Обратимся теперь непосредственно к реакции (1.1). Перепишем (1.6) в виде

$$n(m_{12}^2) = \int_{m_{0\min}^2(m_{12}^2)}^{\infty} \frac{N(m_0^2) dm_0^2}{R(m_0^2)}, \quad (1.11)$$

где

$$R(m_0^2) = \sqrt{m_0^2(m_0^2 - 4m_{\pi}^2)}. \quad (1.12)$$

Из рис. 2б видно, что наименьшее значение нижнего предела в интеграле (1.11) есть $(m_1 + m_4)^2$; при этом $m_{12}^2 = f^+ = f^- = 2m_{\pi}^2$, интеграл максимален, и в спектре $n(m_{12}^2)$ при $m = \sqrt{2}m_{\pi}$ следует ожидать появления максимума (или плато) независимо от спектра $N(m_0^2)$. Чтобы найти $N(m_0^2)$, продифференцируем (1.11) по m_{12}^2 :

$$\frac{dn(m_{12}^2)}{dm_{12}^2} = - \frac{N(m_0^2)}{R(m_0^2)} \frac{dm_{0\min}^2}{dm_{12}^2}.$$

Из (1.8) получим

$$\frac{dm_{12}^2}{dm_{0\min}^2} = \pm \frac{m_{12}^2 - m_{\pi}^2}{R(m_0^2)}.$$

В итоге приходим к

$$N\left(\frac{m^2}{\pi}\right) = \left| \left(\frac{m^2}{\pi\gamma} - m_{\pi}^2 \right) \frac{dn\left(\frac{m^2}{\pi\gamma}\right)}{dm_{\pi\gamma}^2} \right|, \quad (1.13)$$

где

$$m_{\pi\pi}^2 = \frac{m_{\pi\gamma}^4}{m_{\pi\gamma}^2 - m_{\pi}^2}.$$

Восстановление $N(m_{\pi\pi}^2)$ может быть независимо проведено как по участку спектра $n(m_{\pi\gamma}^2)$ слева от $m_{\pi\gamma} = \sqrt{2} m_{\pi}$ (где $\frac{dn}{dm_{\pi\gamma}^2} \geq 0$), так и по участку справа (где $\frac{dn}{dm_{\pi\gamma}^2} \leq 0$).

Формулы, восстанавливающие $N(m_{\pi\pi}^2)$, справедливы в любых реакциях, где рождается π^0 -мезон, а регистрируется один γ -квант. Они особенно полезны, когда нет возможности выделить определенный канал реакции, например, когда мишень облучена нейтронами или нейтрино всевозможных энергий, или когда, как в (1.1), рождается много нерегистрируемых нейтральных частиц. В распадах типа $K^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} \pi^0 \pi^0$ или $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ по подобным формулам можно, регистрируя заряженные частицы и один γ -квант, восстановить спектры $n(\pi^{\pm} \pi^0)$.

3. Мы применили формулу (1.13) для восстановления спектра $n(\pi^{\pm} \pi^0)$ в реакции (1.1) при $p_{\text{с}} = 4$ Гэв, в которой регистрировался один γ -квант/2/. Полученная в этом опыте (по 2374 событиям) сумма спектров $n(m_{\pi^+ \gamma})$ и $n(m_{\pi^- \gamma})$ аппроксимировалась кривой типа

$$n(m_{\pi\gamma}) = b(m_{\pi\gamma} - a) \exp[-\alpha(m_{\pi\gamma} - a)] \quad (1.14)$$

с помощью программы, описанной в работе^{/3/} (см рис. 3). Было получено $\chi^2 = 20$ при 26 экспериментальных точках. Спектр $N(m_{\pi^{\pm} \pi^0})$ определялся из формулы

$$N(m_{\pi^{\pm} \pi^0}) = \left| \frac{m(\pi^{\pm} \pi^0)(m_{\pi^{\pm} \gamma}^2 - m_{\pi}^2)}{2 m_{\pi^{\pm} \gamma}} \frac{d}{dm_{\pi^{\pm} \gamma}} \left(\frac{n(m_{\pi^{\pm} \gamma})}{m_{\pi^{\pm} \gamma}} \right) \right|. \quad (1.15)$$

Он в основном согласуется (рис. 4) со спектром $N(m_{\pi^+ \pi^-})$ из той же реакции (1.1), особенно с результатом его приближения фазовыми кривыми^{/2/}.

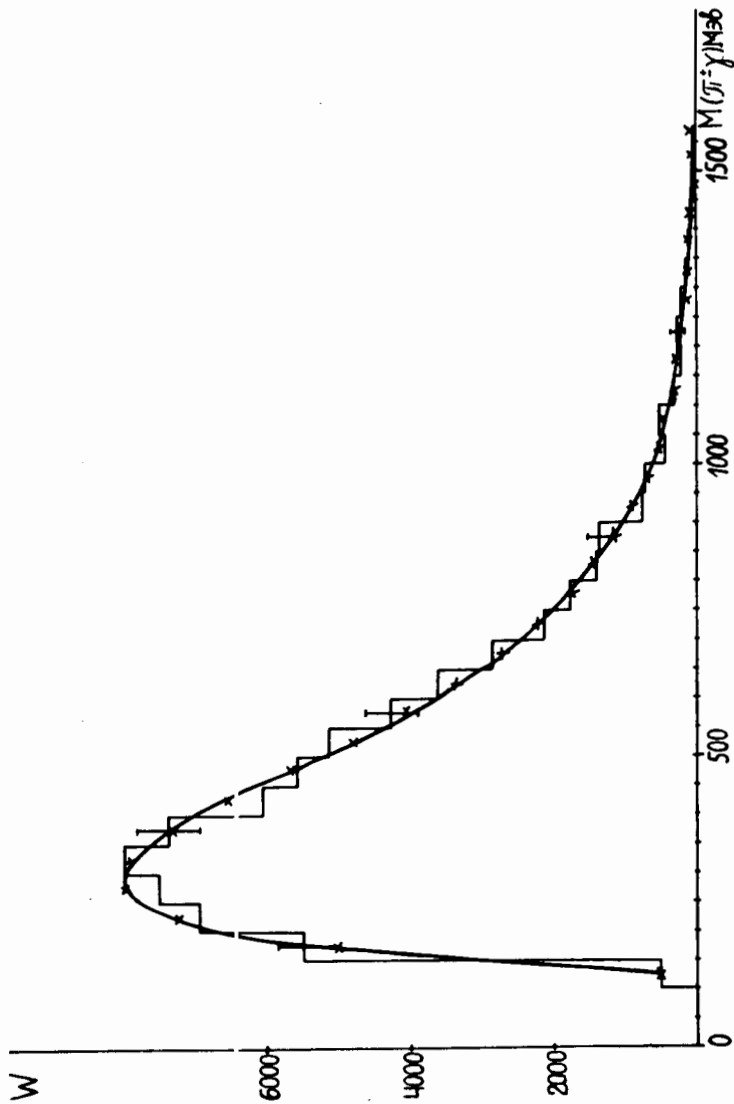


Рис. 3. Распределение событий типа $(\pi^+ \gamma)$ по $m(\pi^+ \gamma)$ с учётом весов. Гладкая кривая - аппроксимирующая функция.

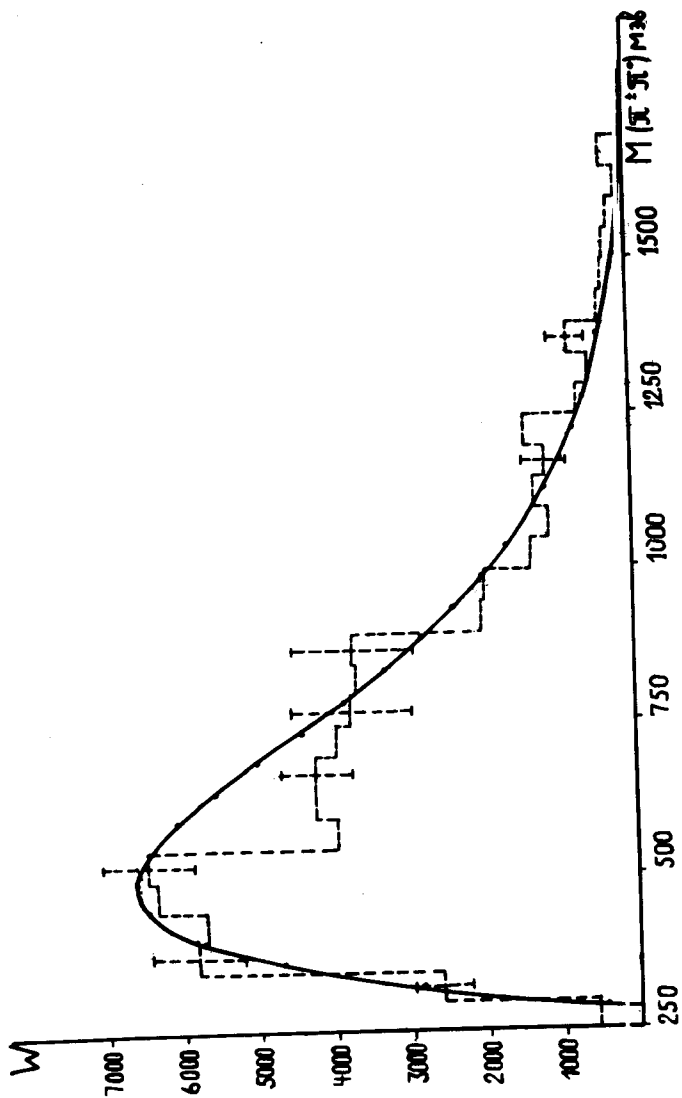


Рис. 4. Восстановленный спектр эффективных масс $m(\pi^{\pm}\pi^0)$ с учётом весов событий (гладкая кривая). Пунктирная гистограмма - соответствующее экспериментальное распределение тех же событий по $m(\pi^{\pm}\pi^-)$.

Погрешности восстановления спектра $N(m_{\pi^+\pi^0})$ при данном выборе функции (1.14) достигают (3+5)% при ошибках экспериментальной гистограммы $n(m_{\pi^+\gamma}) \approx (8-10)\%$. Чтобы точнее оценить погрешность, мы разыграли 8000 событий типа $\pi^-p \rightarrow n \pi^+\pi^-\pi^0 \pi^0$ при $p \approx 4$ Гэв (по программе ФОРС^{4/}), получив в результате спектры $N(m_{\pi\pi})$ и $n(m_{\pi\gamma})$ (рис. 5,6). Спектр $n(m_{\pi\gamma})$ мы попытались приблизить функцией типа $y = c(x-a)^\alpha (b-x)^\beta \exp(-\gamma x)$. Это дало $\chi^2 = 40$ при 21 точке (точки $m_{\pi\gamma} = 575+775$ Мэв плохо ложатся на кривую, этому отвечает $m_{\pi\pi} \approx 600-800$ Мэв). Как видно из рис. 6, восстановленный спектр (сплошная кривая) и гистограмма хорошо согласуются в пределах статистических ошибок ($\pm 5\%$) за исключением участка 600-800 Мэв. Мы заключаем, что восстанавливаемые "гладкие" спектры имеют примерно ту же точность, что и гистограмма $n(m_{\pi\gamma})$. Оценка истинной погрешности в случае наличия в $n(m_0)$ узких пиков представляется сложной задачей.

§2. Использование двумерных распределений

Представим теперь, что в каскаде (рис. 1) одна из частиц 1 или 2 является на самом деле группой частиц; тогда ее масса m_1 (или m_2) переменна. Пусть мы в состоянии измерять ее значение в каждом событии (наряду со значением m_{12}). Тогда мы будем иметь двумерные распределения $n(m_{12}^2, m_1^2)$ или $n(m_{12}^2, m_2^2)$. Чтобы связать плотность этого распределения с $N(m_0^2)$ нужно еще задаться вероятностью тех или иных значений m_1^2 или m_2^2 .

1. Разберем сначала случай, когда меняется m_2^2 . Допустим, что упомянутая вероятность есть $w(m_2^2, m_4^2)$. Зная эту функцию, мы можем присвоить каждому событию (m_{12}^2, m_2^2) "вес" $\frac{1}{w(m_2^2, m_4^2)}$, учитывающий вероятность наблюдения m_2^2 . Суммарная плотность

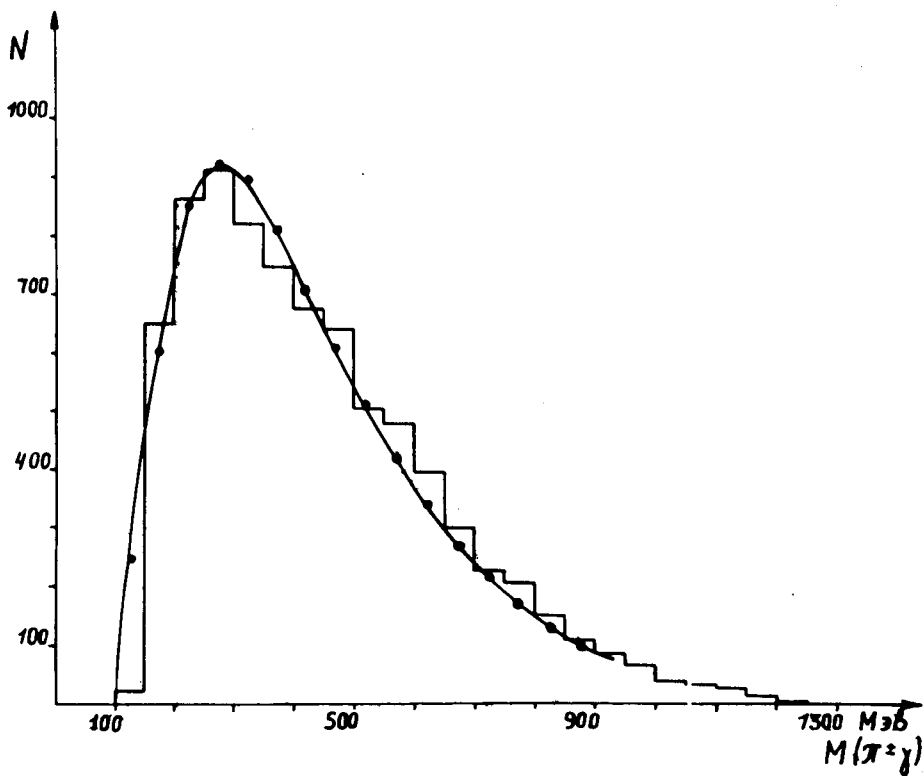


Рис. 5. Распределение моделированных событий по $m(\pi\gamma)$. Гладкая кривая - аппроксимирующая функция.

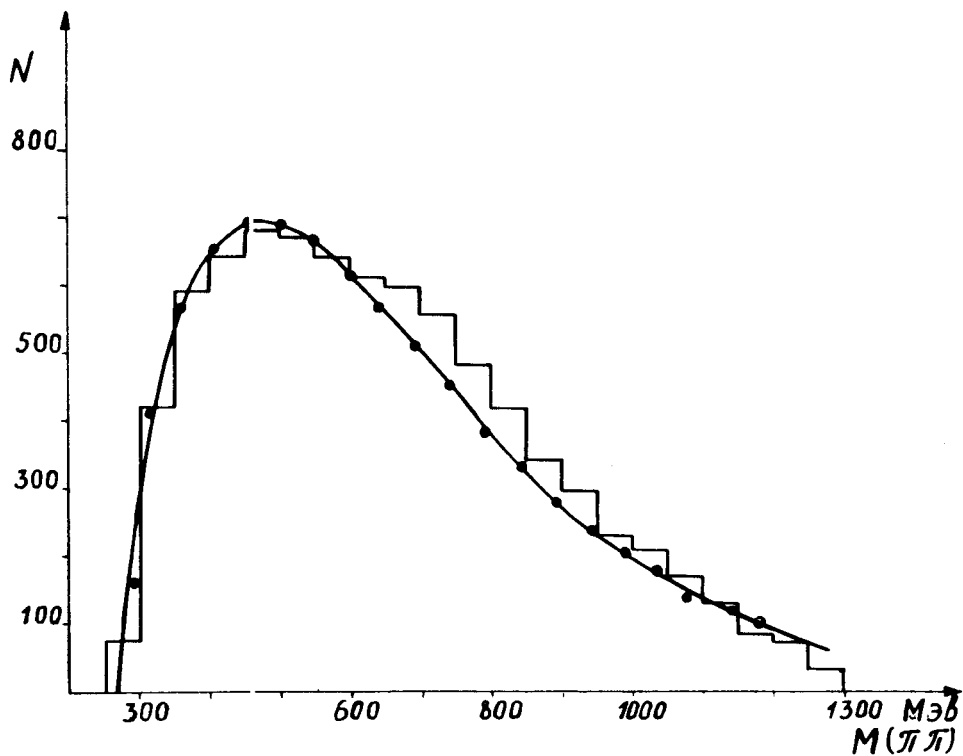


Рис. 6. Распределение моделированных событий по $m(\pi\pi)$. Гладкая кривая - восстановленный спектр по $m(\pi\pi)$.

веса событий близ точки (m_{12}^2, m_2^2) будет равна $\frac{n(m_{12}^2, m_2^2)}{w(m_2^2, m_4^2)}$.
 Она связана с $N(m_0^2)$ уравнением (1.6):

$$\frac{n(m_{12}^2, m_2^2)}{w(m_2^2, m_4^2)} = \int_{m_{0 \min}^2}^{m_{0 \max}^2} \frac{N(m_0^2) \alpha m_0^2}{4 p_1^{(4)}(m_0^2) p_2^{(4)}(m_2^2)} dm_0^2, \quad (2.1)$$

в котором мы отметили, от каких величин зависят импульсы p_1 и p_2 .
 Пределы в (2.1) даются прежними формулами (1.7-1.10).

В явном виде

$$\frac{n(m_{12}^2, m_2^2)}{w(m_2^2, m_4^2)} \cdot \frac{2 p_2^{(4)}(m_2^2)}{m_4} = \int_{m_{0 \min}^2}^{m_{0 \max}^2} \frac{N(m_0^2) dm_0^2}{\sqrt{[m_0^2 - (m_1 + m_4)^2]} \sqrt{[m_0^2 - (m_1 - m_4)^2]}} \quad (2.2)$$

Под интегралом нет величин, зависящих от m_{12}^2 и m_2^2 . Введем поэтому функцию $\Phi(z)$ следующим образом:

$$\Phi(z) = \int_{(m_1 + m_4)^2}^z \frac{N(m_0^2) dm_0^2}{\sqrt{m_0^2 - (m_1 + m_4)^2} \sqrt{m_0^2 - (m_1 - m_4)^2}} \quad (2.3)$$

и придем к соотношению

$$\begin{aligned} \nu(m_{12}^2; m_2^2) &\equiv \frac{2 p_2^{(4)}(m_2^2)}{m_4 w(m_2^2; m_4^2)} n(m_{12}^2; m_2^2) = \\ &= \Phi(F^+(m_{12}^2; m_2^2)) - \Phi(F^-(m_{12}^2; m_2^2)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

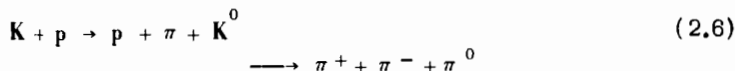
Будем искать $\Phi(z)$ в виде $\sum_m a_m \Phi_m(z)$, где $\Phi_m(z)$ — какие-то выбранные нами известные функции. Тогда можно методом максимума правдоподобия подобрать значения a_m , наилучшим образом удовлетворяющие тождеству (2.4). Производная функции Φ даст спектр $N(m_0^2)$.

Равенство (2.4) означает, что распределение ν на плоскости $(m_{12}^2; m_2^2)$ обладает определенной структурой, не зависящей от спектра $N(m_0^2)$ (см. § 3 и 4).

Выведенные формулы позволяют, например, в реакции (1.1) восстановить спектр $\pi(\pi^\pm \pi^0)$, когда π^0 -мезон наблюдается по распадам Далица

$$\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + \gamma, \quad (2.5)$$

а γ -квант не регистрируется (такая ситуация может встретиться в водородных или стримерных камерах). В реакциях типа



таким способом можно по измерениям масс пар $\pi\pi^+$ и $\pi^+\pi^-$, не детектируя π^0 , восстановить спектр масс πK и т.п.

2. Случай, когда меняется m_1 , требует добавочных допущений. Теперь вероятность иметь то или иное значение m_1^2 должна, вообще говоря, зависеть от m_0 , а значения m_0 мы не знаем. Уравнение, связывающее $n(m_{12}^2, m_1^2)$ и $N(m_0^2)$, мы вынуждены записать в виде:

$$n(m_{12}^2; m_1^2) = \frac{\int_{m_{0\min}^2}^{m_{0\max}^2} N(m_0^2) w(m_1^2, m_0^2) d m_0^2}{4 p_2^{(4)} p_1^{(4)} (m_1; m_0^2)} \quad (2.7)$$

и, задавшись видом $w(m_1^2, m_0^2)$, решать это уравнение численно. Допустим, однако, что в системе частиц α, β (это продукты распада частиц 1 и 4) выполнена гипотеза фазового объема:

$$w(m_1^2; m_0^2) = \frac{S_2(1; \alpha, \beta) S_2(0; 1, 4)}{S_3(0; \alpha, \beta, 4)} = \frac{\pi^2 p_\alpha^{(4)} p_1^{(1)}}{m_1 m_0 S(m_0)}, \quad (2.8)$$

где

$$p_\alpha^{(1)} = \frac{1}{2m_1} \sqrt{m_1^2 - (m_\alpha + m_\beta)^2} \sqrt{m_1^2 - (m_\alpha - m_\beta)^2}. \quad (2.9)$$

Так как $p_1^{(0)} m_0 = p_1^{(4)} m_4$, то $p_1^{(4)}$ в (2.7) сокращается, и мы приходим к уравнению

$$n(m_{12}^2; m_1^2) = \frac{(\pi/2)^2 m_4 p_\alpha^{(1)}}{p_2^{(4)} m_1} \int_{m_0^2 \min}^{m_0^2 \max} \frac{N(m_0^2) d m_0^2}{m_0^2 S_3(m_0)} \quad (2.10)$$

$$(m_\alpha + m_\beta \leq m_1 \leq m_{12}).$$

В нем опять под интегралом не осталось величин, зависящих от m_1 . Пределы даются, в зависимости от m_2 , либо формулами (1.7), либо (1.9). Введем теперь первообразную

$$\Phi(z) = \int_z^\infty \frac{N(m_0^2) d m_0^2}{m_0^2 S_3(m_0)}. \quad (2.11)$$

Она монотонно убывает на участке своего определения $(m_a + m_{\beta} + m_4)^2 \leq z \leq \infty$. Введем также "вес" \tilde{p} события $(m_{12}^2; m_1^2)$, равный $m_1 / p_a^{(1)}$, и константу $k = \frac{(\pi/2)^2 m_4}{p_2^{(4)}}$. Опять функция

$$\nu(m_{12}^2; m_2^2) = \frac{1}{k} n(m_{12}^2; m_1^2) \tilde{p}(m_1^2) \quad (2.12)$$

определяется только значениями первообразной Φ :

$$\nu(m_{12}^2; m_1^2) = \Phi(F^-(m_{12}^2; m_1^2)) - \Phi(F^+(m_{12}^2; m_1^2)), \quad m_2 \neq 0 \quad (2.13)$$

$$\nu(m_{12}^2; m_1^2) = \Phi(F^-(m_{12}^2; m_1^2)), \quad m_2 = 0. \quad (2.14)$$

Функция Φ , будучи найдена из (2.13, 2.14), восстановит нам спектр масс m_0 .

$$N(m_0^2) = -m_0^2 S_3(m_0) \frac{d\phi(m_0^2)}{dm_0^2}. \quad (2.15)$$

3. Мы применили эти формулы для восстановления спектра масс $m(\pi^+ \pi^- \pi^0)$ в реакции (1.1) при $p_s = 4 \text{ ГэВ}^{1/2}$. Для этого в каждом событии вычислялись массы $(\pi^+ \pi^-)$ и $(\pi^+ \pi^- \gamma)$, и событию присваивался вес $\tilde{p} = \frac{m_{\pi\pi}}{\frac{2}{2} \frac{m_{\pi\pi} - 4m_{\pi^0}^2}{2}}$. Распределение плотности веса на плоскости $(m_{\pi\pi}^2, m_{\pi\pi\gamma}^2) \equiv (m_1^2, m_{12}^2)$ должно было - в предположении справедливости фазового объема - удовлетворять уравнению (2.14):

$$\nu(m_{12}^2; m_1^2) = \Phi(z); \quad z = m_{12}^2 \left(1 + \frac{m_{\pi}^2}{m_{12}^2 - m_1^2} \right). \quad (2.16)$$

Для каждого данного m_1 наименьшее значение z достигается при $m_{12}^2 = m_1^2 + m_1 m_\pi$. При этом $\Phi(z)$ - максимумально. Следовательно, на плоскости (m_1^2, m_{12}^2) максимум плотности веса ν при движении вдоль прямых $m_1 = \text{const}$ достигается на линии CD $m_{12}^2 = m_1^2 + m_1 m_\pi$ независимо от спектра $N(m_0^2)$ (рис. 7).

Разобьем плоскость $m_{12}^2 \geq m_1^2 > 4m_\pi^2$ линиями уровня $z = \text{const}$ на полосы. Уравнение (2.16) утверждает, что вдоль каждой полосы на равные площади приходится равная "сумма весов" ν и что ν изменяется лишь при переходе от одной полосы к другой, независимо от спектра $N(m_0^2)$.

Мы поэтому построили гистограмму "весов", приходящихся на последовательные полосы z . Искомая функция $\Phi(z)$ получается делением столбцов этой гистограммы на площадь полосы $Q(z)$ (рис. 7).

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{Q(z_0; \Delta)} \sum_{z_0 \leq z \leq z_0 + \Delta} \tilde{p}(m_1^2) \quad (z_0 \geq 9m_\pi^2). \quad (2.17)$$

Эта площадь равна разности площадей областей gnH и EmF

$$Q(z_0, \Delta) = q(z_0 + \Delta) - q(z_0), \quad (2.18)$$

где

$$q(z) = \frac{1}{2} (z - 3m_\pi^2) R - m_\pi^2 z \ln \frac{z - 3m_\pi^2 - R}{z - 3m_\pi^2 + R} \quad (2.19)$$

$$R = \sqrt{(z - 9m_\pi^2)(z - m_\pi^2)}. \quad (2.20)$$

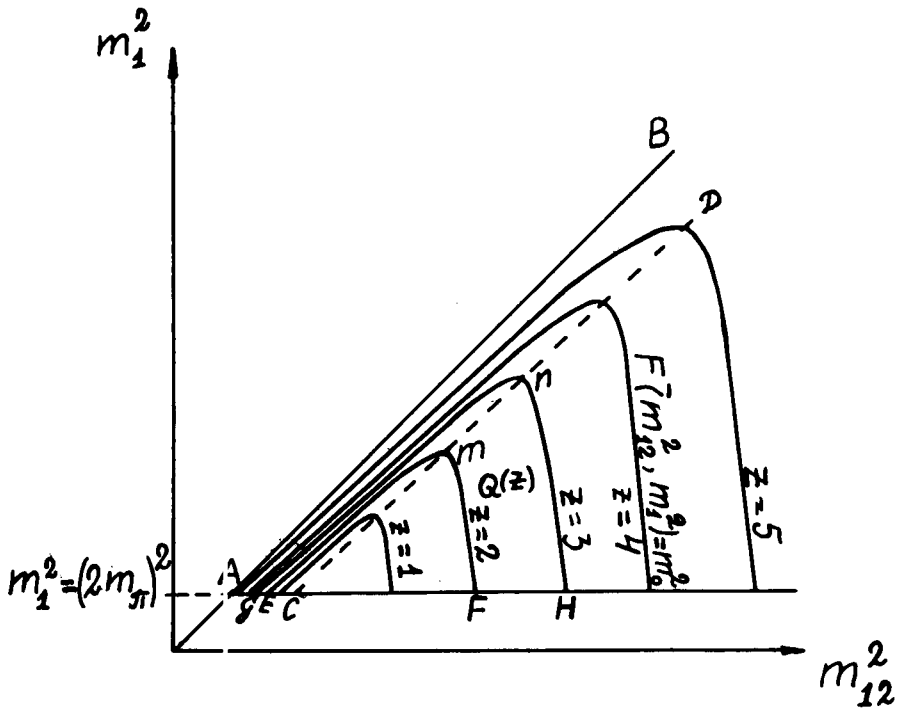


Рис. 7.

На рис. 8,9 приведен вид первообразной $\Phi(z)$, полученной этим способом, и восстановленный спектр $\frac{dN(m_0)}{dm_0}$.

§3. Структура распределений

Мы только что видели, что распределение плотности веса на плоскости (m_{12}^2, m_1^2) обладает при $m_2 = 0$ определенной структурой, не зависящей от вида "затравочной" функции $N(m_0^2)$. Линии изменения веса определяются только одной кинематикой (функциями $z(m_1^2, m_{12}^2)$), а $N(m_0^2)$ влияет лишь на скорость изменения. Точно так же и в общем случае ($m_2 \neq 0$) распределения плотностей "весов" $\nu(m_{12}^2; m_1^2)$ и $\nu(m_{12}^2; m_2^2)$ характеризуются некоторой, хотя и более сложной, структурой.

1. При $m_2 \neq 0$ плотность $\nu(m_{12}^2; m_1^2)$ дается формулой (2.13). На рис. 10 показано семейство линий уровня функции $F(m; m)$ для реакции $\pi^- p \rightarrow n + \pi^+ + \pi^- + \rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (вместо них удобнее строить совпадающие с ними линии $m_{12}^2 = f^{\pm}(m_0^2; m_1^2)$).

Эти линии с ростом m_0 расходятся от точки e . У каждой линии на рисунке указано в некоторых условных единицах значение m_0^2 .

Пусть максимальное значение m_0 в данной реакции есть M . Тогда отрезок gH линии уровня $F^{\pm}(m_{12}^2; m_1^2) = M^2$ делит плоскость на две части AHg и Hgk . В области Hgk верхний предел интеграла (2.10) есть M , следовательно, (2.13) можно переписать так:

$$\nu(m_{12}^2; m_1^2) = \Phi(F^{-}(m_{12}^2; m_1^2)). \quad (3.1)$$

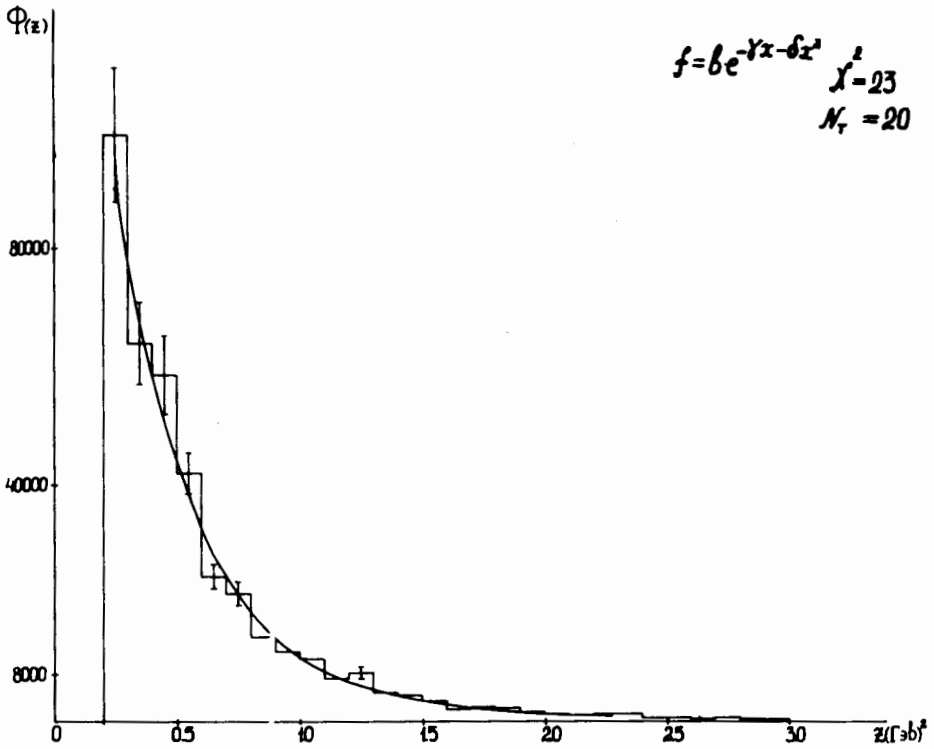


Рис. 8. $\Phi(z)$ для случаев типа (1.1) при $p_c = 4$ Гэв с учётом весов событий. Гладкая кривая - аппроксимирующая функция.

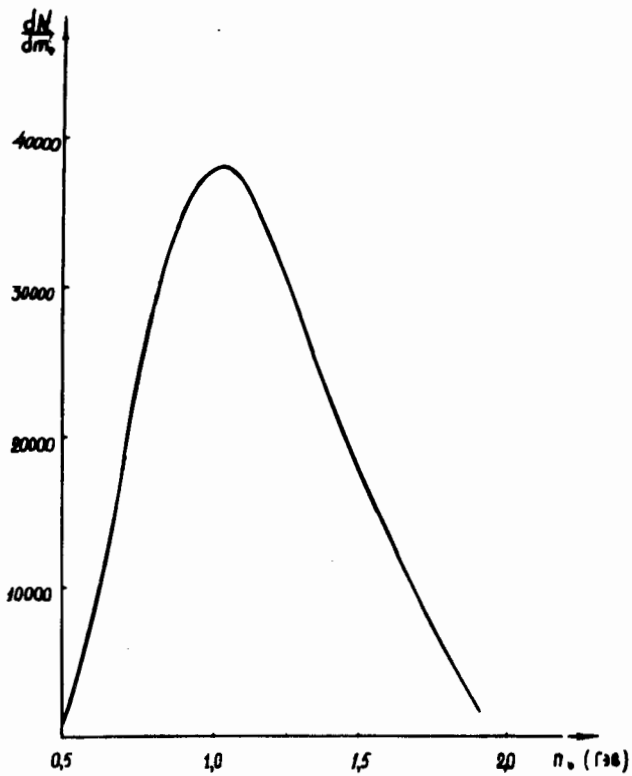


Рис. 9. Восстановленный спектр $\frac{dN}{dm}$ в зависимости от $m_0 = m(\pi^+ \pi^- \pi^0)$.

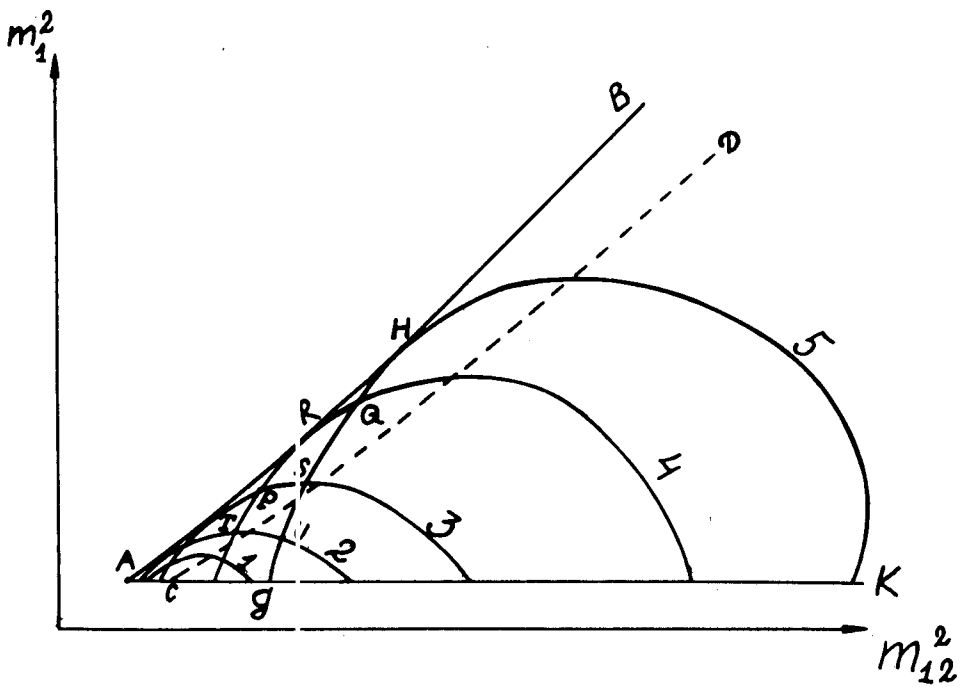


Рис. 10. Семейство линий уровня функции $F^{\pm}(m_{12}^2; m_1^2)$ для реакции $\pi^- p \rightarrow n \pi^+ \pi^- \rho^0 \rightarrow \pi_2^+ + \pi_3^-$.

Таким образом, в области Hgk линии уровня функции ν и F^- совпадают, и справедливо все, что говорилось выше о свойствах плотности ν при $m_2 = 0$.

В области ANg через каждую точку $(m_{12}^2; m_1^2)$ проходят две линии уровня $F^\pm = z$, одна при малом z — это F^- , другая при большом — это F^+ . Вдоль AB $\nu = 0$, и уравнение (2.13) утверждает, что плотность ν монотонно растет при удалении от любой точки границы вдоль линии уровня F^\pm в любую сторону.

Рассмотрим теперь четырехугольник, образованный какими-нибудь линиями уровня, например, $PSUT$ или $PRQS$. Мы имеем, согласно (2.13),

$$\nu(P) = \Phi(3) - \Phi(4), \quad \nu(T) = \Phi(2) - \Phi(4),$$

$$\nu(U) = \Phi(2) - \Phi(5), \quad \nu(S) = \Phi(3) - \Phi(5)$$

и т.д. Отсюда вытекает искомая структура плотности веса: в области ANg в произвольном четырехугольнике, составленном из линий уровня, сумма плотностей в противоположных вершинах одинакова

$$\nu(P) + \nu(U) = \nu(T) + \nu(S) \quad \nu(S) = \nu(P) + \nu(Q). \quad (3.2)$$

Вместо переменных m_{12}^2 , m_1^2 можно ввести новые переменные z', z'' с помощью формул

$$z' = F^-(m_{12}^2, m_1^2), \quad z'' = F^+(m_{12}^2, m_1^2). \quad (3.3)$$

Область, в которую лягут точки с координатами (z', z'') , показана на рис. 11. Уравнение границы $СК$ есть $z'' = F^+(f^+(z', 4m_\pi^2))$, $z' > (2m_\pi + m_4)^2$, границы $СА - z'' = F^+(f^-(z', 4m_\pi^2) - 4m_\pi^2)$, $z' < 4m_\pi^2 + 3m_4^2$ линии,

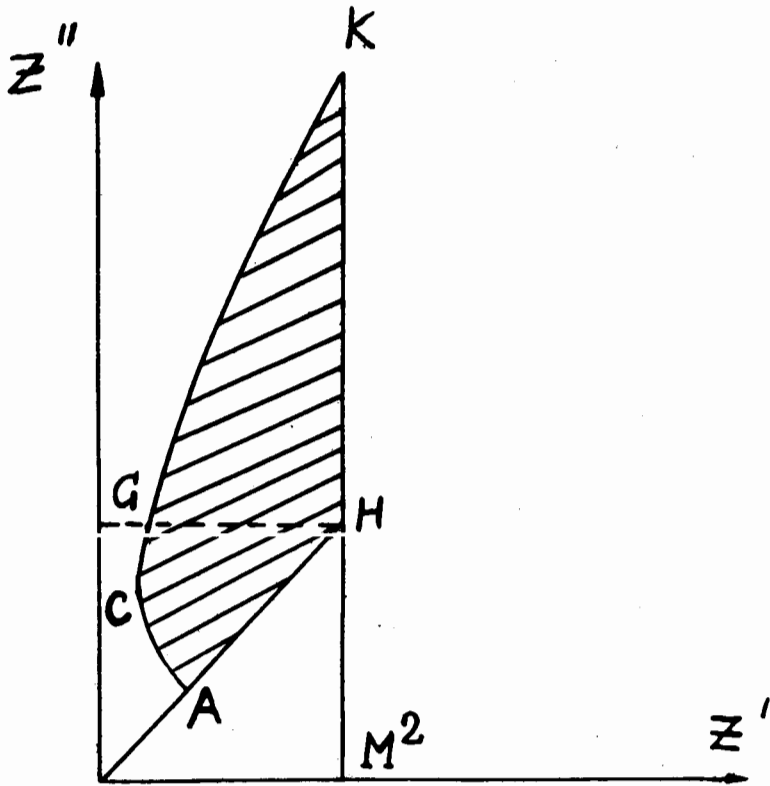


Рис. 11.

АН - $z'' = z'$, $z' > 4m_{\pi}^2 + 3m_4^2$. Выше прямо: gH плотность $\tilde{\nu}(z', z'') \equiv \nu(m_{12}^2(z', z''), m_1^2(z', z''))$ зависит только от z' , а ниже - плотности $\tilde{\nu}$ в вершинах любых прямоугольников связаны условием (3.2).

2. Плотность веса $\nu(m_{12}^2, m_2^2)$, введенная в §2.1, также обладает подобными свойствами. Линии уровня $F^{\pm}(m_{12}^2, m_2^2)$ показаны на рис. 12 для некоторых условных значений $m_0^2 = z \quad \cdot 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Пусть gHK - линия уровня при наибольшем возможном в данной реакции $m_0^2 = M^2$. Тогда в области gHK линии равных плотностей веса ν совпадают с линиями $F^{-}(m_{12}^2, m_2^2)$, а в области $ABHg$ опять выполняется "условие четырехугольника" (3.2).

§4. Кинематический потенциал

1. Мы видим, что двумерные взвешенные распределения эффективных масс $\nu(x, y)$ имеют иной раз простое строение: можно указать такую функцию $\Phi(z)$, что

$$\nu(x, y) = \Phi(\phi^+(x, y)) - \Phi(\phi^-(x, y)) \quad (4.1)$$

или еще проще

$$\nu(x, y) = \Phi(\phi(x, y)), \quad (4.2)$$

где $\phi(x, y)$ - известная функция, определяемая только кинематикой процесса. Это свойство отдаленно напоминает свойства потенциала в теории поля, когда векторное поле в пространстве получается из некоторой скалярной функции вычислением градиента.

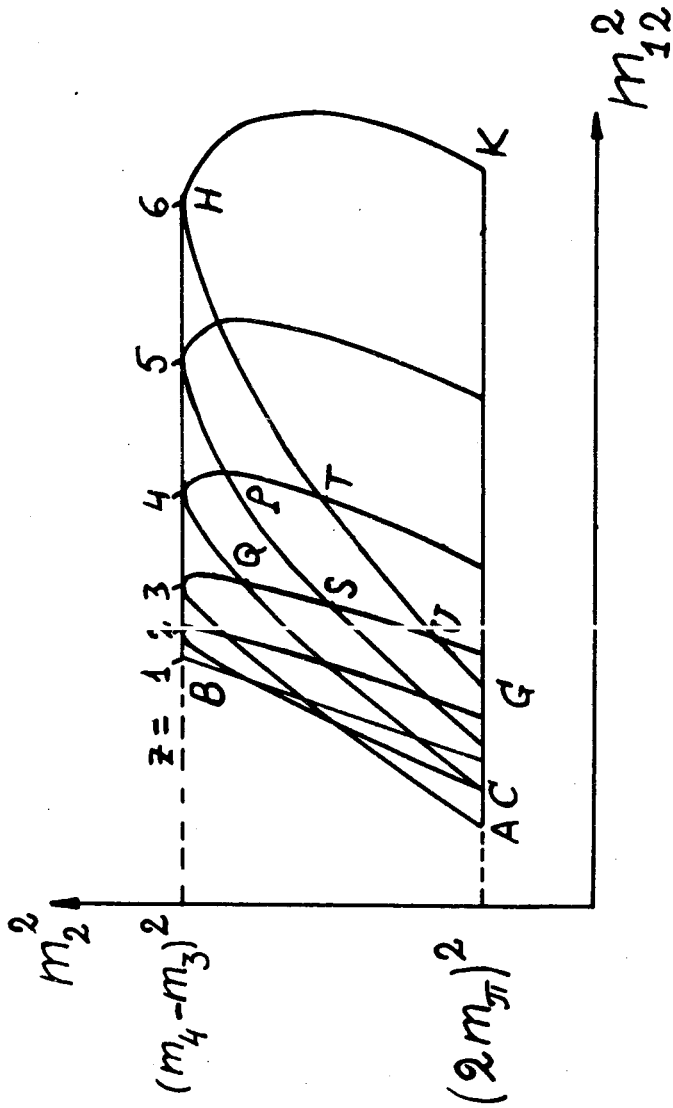


Рис. 12. Линии уровня $F^\pm(m_{12}^2, m_2^2)$.

Мы условимся говорить поэтому в случае (4.1), (4.2), что поле плотностей весов точек $P(x, y)$ фазового пространства (x, y) обладает кинематическим потенциалом $\Phi(z)$; оно определяется разностью потенциалов $\Phi(z)$ в точках z , представляющих собою отображение точек P с помощью функций $z = \Phi^\pm(P)$. Такое поле плотностей обладает специфическими свойствами: в случае (4.2) его линии уровня совпадают с линиями уровня функций ϕ^- , в случае (4.1) действует "равенство четырехугольника" (3.2).

Существование у плотности ν кинематического потенциала есть следствие того, что в интегральном уравнении, связывающем ν с N , зависимость от координат точки P входит только в пределы интегрирования.

В качестве примера поля плотностей, у которого нет кинематического потенциала, приведем распределение по dm_{12}^2 и m_{125}^2 в каскаде $0 \rightarrow 1 + 4 \rightarrow 1 + (2 + 3) \rightarrow 5 + 6$

$$n(m_{12}^2; m_{125}^2) = \frac{m_4 m_3}{4 p_2^{(4)} p_5^{(3)}} \int_{f^-}^{f^+} \frac{N(m_0^2) dm_0^2}{\sqrt{m_0^2 - (m_1 + m_4)^2} \sqrt{m_0^2 - (m_1 - m_4)^2} \sqrt{m_0^2 - (m_{12} - m_3)^2}} \times \\ \times [m_0^2 - (m_{12} + m_3)^2]^{-1/2}.$$

$$f^\pm = m_{12}^2 + m_3^2 + 2 \omega_{12}^{(5)} \omega_3^{(5)} \pm 2 p_{12}^{(5)} p_3^{(5)}, \quad \omega_{12}^{(5)} = \frac{m_{125}^2 - m_{12}^2 - m_5^2}{2 m_5},$$

$$\omega_3^{(5)} = \frac{m_3^2 + m_5^2 - m_6^2}{2 m_5}.$$

Потенциал отсутствует, так как под интегралом стоит m_{12} .

2. Потенциальным характером могут обладать и двумерные энергетические распределения. Пусть мы в распаде $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ измеряем энергию ω_{12} и эффективную массу m_{12} пары $\pi^+ \pi^-$; вероятность получить m_{12} пусть будет $W(m_{12})$, тогда каждому случаю (ω_{12}, m_{12}) можно присвоить вес $\frac{1}{W(m_{12})}$. Суммарный вес событий в окрестности точки (ω_{12}, m_{12}) будет равен $n(\omega_{12}, m_{12})/W(m_{12})$. Если бы распад K^0 был двухчастичным, мы бы написали ^{5/}:

$$n(\omega_1) = \frac{m_0}{2p_1^*} \int_{\omega_{0\min}}^{\omega_{0\max}} \frac{N(\omega_0) d\omega_0}{p_0} \quad (4.4)$$

В нашем распаде на три частицы нужно только заменить $n(\omega_1)$ на $n(\omega_{12}, m_{12})/W(m_{12})$. Мы получаем

$$\frac{n(\omega_{12}, m_{12})}{W(m_{12})} \cdot \frac{2p_{12}^*(m_{12})}{m_0} = \Phi(f^+(\omega_{12}, m_{12})) - \Phi(f^-(\omega_{12}, m_{12})), \quad (4.5)$$

где

$$\Phi(z) = \int_{m_0}^z N(\omega_0) \frac{d\omega_0}{p_0} \quad (4.6)$$

$$f^\pm = \frac{\omega_{12} \omega_0^* \pm p_{12} p_0^*}{m_{12}}, \quad \omega_0^* = \frac{m_0^2 + m_{12}^2 - m_3^2}{2m_{12}}$$

3. Хотя существование потенциала облегчает восстановление спектра первичных частиц, оно не является необходимым условием такого

восстановления и не дает оптимальных условий восстановления. Рассмотрим, например, восстановление $N(\omega_0)$ в процессе $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ по измерениям m_{12} и \vec{p}_{12} . Показано^{/6,7/}, что $N(\omega_0)$ при фиксированном m_{12} удовлетворяет уравнению

$$N(U_0) + \frac{1}{2} \int K\left(\frac{U_0 - \xi}{2}\right) N(\xi) d\xi = n(U_0), \quad (4.7)$$

где ядро K определяется амплитудой распада $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ при фиксированном m_{12} и есть функция m_{12} , а аргумент U_0 в правой части вычисляется из наблюдений m_{12}, \vec{p}_{12} по определенным правилам

$$U_0 = U_{12} \pm U_{12}^*, \quad U_{12} = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega_{12} + p_{12} \cos \theta_{12}}{\omega_{12} - p_{12} \cos \theta_{12}},$$

$$U_{12}^* = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega_{12}^* + \pi_{12}^*}{\omega_{12}^* - \pi_{12}^*}, \quad \omega_{12}^* = \frac{m_0^2 + m_{12}^2 - m_3^2}{2m_0},$$

$$\pi_{12}^* = \sqrt{\omega_{12}^{*2} - \omega_{12}^2 - p_{12}^2 \cos^2 \theta_{12}}, \quad K(x) = (2V_{12}^* \operatorname{ch}^2 x)^{-1},$$

$$V_{12}^* = p_{12}^* / \omega_{12}^*, \quad |x| \leq \operatorname{arth} V_{12}^*.$$

Пусть теперь спектр m_{12} есть $W(m_{12})$, тогда каждому событию (m_{12}, \vec{p}_{12}) можно поставить в соответствие вес $W^{-1}(m_{12})$. Для определения $N(U_0)$ теперь получим уравнение:

$$N(U_0) + \frac{1}{2} \int K\left(\frac{U_0 - \xi}{2}\right) N(\xi) d\xi = \frac{n(U_0, m_{12})}{W(m_{12})}, \quad (4.8)$$

в котором от m_{12} зависит ядро K и пределы интегрирования. Так как в новом уравнении (4.8) сохранена более подробная информация о распадах, оно позволяет восстановить $N(U_0)$ точнее, чем уравнение (4.7), получаемое из него интегрированием по m_{12} . Хотя плотность n/W не обладает потенциалом, уравнение (4.8) лучше "потенциального" уравнения (4.5) из-за наличия члена $N(U_0)$.

4. Все упомянутые нами до сих пор потенциальные поля плотности могут быть использованы для восстановления спектров первичных частиц. Но подобные поля возникают и в условиях, когда в восстановлении нужды нет. Тогда они представляют собою просто двумерные распределения определенной структуры, не зависящей от спектров первичных частиц. Проверка наличия такой структуры на опыте служит оправданием тех допущений, при которых выводятся соответствующие уравнения (обычно - гипотезы фазового объема). Приведем примеры таких полей.

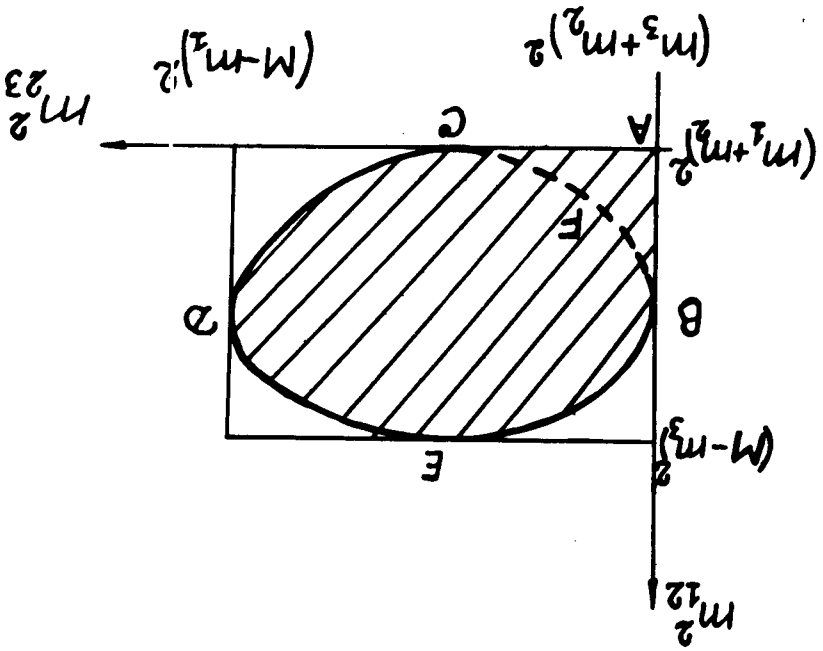
А. Система трех частиц $1 + 2 + 3$ с неопределенной массой $m = m_{123}$ ($m_0 \leq M$), распределения в которой регулируются гипотезой фазового объема. Пространство переменных (m_{23}^2, m_{12}^2) представляет собою ^{/8/} фигуру Далица для распада $0 \rightarrow 1+2+3$ с $m_0 = M$, к которой присоединены нижний левый угол прямоугольника, описанного вокруг фигуры (см. рис. 13).

Поле плотностей $n(m_{23}^2, m_{12}^2)$ здесь является потенциальным, причем внутри фигуры Далица BEDCF выполняется условие (4.2), вне ее, в угле ВАFC - условие (4.1). Функции Φ и ϕ^\pm имеют вид

$$\phi = \int_{(m_1+m_2+m_3)^2}^z \frac{d m_0^2 N(m_0^2)}{m_0^2 S_3(m_0^2)}, \quad (4.9)$$

где S_3 - фазовый объем системы $1 + 2 + 3$,

FIG. 19.



$$\phi^{\pm}(m_{12}^2, m_{23}^2) = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2(\omega_1 + \omega_3)m_2 + 2\omega_1\omega_3 \pm 2\rho_1\rho_3$$

$$\omega_1 = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}, \quad \omega_3 = \frac{m_{23}^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_2}. \quad (4.10)$$

Б. Четверка частиц $1 + 2 + 3 + 4$ с заданным $m_{1234} = m_0$ в предположении, что ее состояния подчиняются гипотезе фазового объема. Тогда ^{/8/} область изменения J переменных m_{234}^2, m_{12}^2 есть фигура Далица для распада частицы с массой m на частицы с массами $m_1, m_2, m_3 + m_4$, к которой присоединен правый нижний угол описанного вокруг нее прямоугольника (см. рис. 3 из ^{/8/}).

Поле плотностей в J носит потенциальный характер:

$$\Phi(z) = \int_{(m_3+m_4)^2}^z dm_{34}^2 S_2(m_{34}; m_3, m_4),$$

$$\phi_{234}^{\pm}(m_{12}^2, m_{234}^2) = m_{234}^2 + m_2^2 - 2\omega_{234}\omega_2 \pm 2\rho_{234}\rho_2,$$

$$\omega_{234} = \frac{m_0^2 - m_1^2 - m_{234}^2}{2m_1}, \quad \omega_2 = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1}.$$

В этом случае известен даже явный вид функции $\Phi(z)$.

В. В той же системе и в тех же предположениях пространство переменных (m_{123}^2, m_{231}^2) также представляет собою фигуру Далица с присоединенным углом (рис. 4 из ^{/8/}). Поле плотностей потенциально:

$$\Phi(z) = \int_{(m_2+m_3)^2}^z dm_{23}^2 S_2(m_{23}; m_2, m_3),$$

но линии уровня другие:

$$\phi^{\pm}(m_{123}^2, m_{234}^2) = m_{123}^2 + m_{234}^2 - m_0^2 + 2\omega_1\omega_4 \pm 2p_1p_4,$$

$$\omega_1 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_{234}^2}{2m_0}, \quad \omega_4 = \frac{m_0^2 + m_4^2 - m_{123}^2}{2m_0}.$$

Г. В каскаде знакомого нам типа $0 \rightarrow 1 + 4 \rightarrow 1 + (2 + \pi + \pi)$ распределение в плоскости $(m_{12}^2, m_{\pi\pi}^2)$ обладает кинематическим потенциалом

$$n(m_{12}^2; m_{\pi\pi}^2) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{m_4 S_3(m_4)} \sqrt{\frac{m_{\pi\pi}^2 - 4m_{\pi}^2}{m_{\pi\pi}^2}} \times \quad (4.11)$$

$$\times [\Phi(F^+(m_{12}^2, m_{\pi\pi}^2)) - \Phi(F^-(m_{12}^2, m_{\pi\pi}^2))],$$

причем потенциал Φ определяется формулой (2.3), а функции F^{\pm} можно взять из (1.9), полагая $m_3 = m_{\pi\pi}$.

Л и т е р а т у р а

1. Г.И. Копылов. ЖЭТФ, 46, 2063, 1964.
2. В.Г. Гришин, М. Иреш, Д.К. Копылова и др. Сообщение ОИЯИ Р1-4412, Дубна 1969; Ядерная физика, 10, 1204, 1969.
3. И.Н. Силин. Препринт ОИЯИ 11-3362, Дубна 1967.
4. В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ 1-3574, Дубна 1964.
5. Г.И. Копылов. ЖЭТФ, 33, 430, 1957.
6. Г.Г. Тахтамышев. Препринт ОИЯИ, 2543, 1966.

7. Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ, Р-2797, Дубна 1966.
8. Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ, Р1-4279, Дубна 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 февраля 1970 года.