

© 346.6
K-659

7/11-69

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1 - 4419



Г.И. Копылов

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РЕАКЦИЙ,
В КОТОРЫХ РОЖДАЮТСЯ РЕЗОНАНСЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

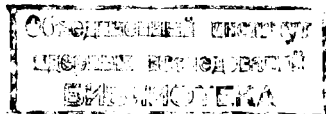
1969

P1 - 4419

Г.И. Копылов

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РЕАКЦИЙ,
В КОТОРЫХ РОЖДАЮТСЯ РЕЗОНАНСЫ

7846/2
чр.



81. Критика методов идентификации реакций

Термин "идентификация реакций" включает в себя два действия: 1) выделение наиболее вероятной гипотезы о реакции; 2) подгонку наблюдаемых величин под эту гипотезу. В обычной программе подгонки (fit - программа) отыскание минимума χ^2 осуществляет оба эти действия. В дальнейшем, говоря об идентификации реакции, мы будем в основном иметь в виду второе из перечисленных действий. Мы займемся вопросом о точности подгонки.

Пусть на опыте измерены импульсы $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ частиц 1, 2, ..., n, и все $\nu = 3n$ компонент сведены в одно "событие" \vec{P} . Мы хотим выяснить справедливость гипотезы, утверждающей, что наблюдалась реакция



Программа подгонки предлагает для этого

- 1) оценить погрешности компонент импульсов

$$\{\Delta \vec{p}_1, \dots, \Delta \vec{p}_n\} \equiv \{\Delta p_1, \dots, \Delta p_\nu\};$$

- 2) найти "событие" \vec{P} , минимизирующее форму

$$\chi^2(\vec{P}, \vec{P}) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(p_\alpha - \bar{p}_\alpha)^2}{\Delta p_\alpha^2} \quad (2)$$

при условии, что компоненты p_α ($\alpha = 1, \dots, \nu$) связаны s законами сохранения;

3) если $\chi_{\min}^2 \leq s(3)$, то гипотеза проходит, а событие P (3) считается подгонкой события \bar{P} под эту гипотезу.

Законы сохранения для гипотезы (1) имеют вид:

$$\vec{f} \equiv \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n - \vec{p}_0 = 0, \quad f^{(4)} \equiv \omega_1 + \dots + \omega_n - \omega_0 = 0, \quad (4)$$

так что $s=4$; гипотеза о рождении одной недектируемой частицы X оставляет лишь один закон сохранения ($s=1$)

$$f^{(5)} \equiv f^{(4)} - \sqrt{(\vec{f})^2 + m_x^2} = 0. \quad (5)$$

К минимуму χ^2 обычно подходят последовательными приближениями. Прибегают либо к методу Лагранжа /1/, минимизируя по P и по λ β функционал

$$\chi^2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(p_\alpha - \bar{p}_\alpha)^2}{\Delta p_\alpha^2} + 2 \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta f^{(\beta)}(P), \quad (6)$$

либо к методу Мороза /2/, минимизируя по P функционал

$$\chi^2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(p_\alpha - \bar{p}_\alpha)^2}{\Delta p_\alpha^2} + T \sum_{\beta=1}^s \frac{[f^{(\beta)}(P)]^2}{[\Delta f^{(\beta)}]^2} \quad (T \gg 1).$$

Мы хотим выделить те стороны описанной процедуры, которые обычно не привлекают внимания физика-экспериментатора.

а) Отыскав событие P , мы, конечно, получаем не истинное положение события P^0 , но некоторую его оценку. Представим себе n -мерное пространство, по осям которого откладываются компоненты всех n импульсов

$$p_1 / \Delta p_1, \quad p_2 / \Delta p_2, \quad \dots, \quad p_\nu / \Delta p_\nu, \quad (\nu = 3n).$$

Представим себе также "энергетическую поверхность" F , образованную пересечением поверхностей

$$f^{(\beta)}(P) = 0 \quad (\beta = 1, \dots, s) \quad (7)$$

(рис. 1). Тогда истинное событие P^0 окажется где-то на F , зарегистрировано же будет событие \bar{P} (вообще говоря, вне F), а найденная минимизацией χ^2 точка P будет лежать на поверхности F , но не обязательно совпадать с точкой P^0 . В самом деле, минимизация χ^2 означает минимизацию расстояния RP , когда точка P лежит на F ; точка P оказывается основанием нормали к F , проходящей через \bar{P} . При этом центр ν -мерного куба со стороной 1 (именно таковы габариты параллелепипеда погрешностей при нашем выборе масштаба по осям) мы вынуждены располагать в точке \bar{P} - единственной известной нам из опыта точке: о выполнении гипотезы (1) мы вынуждены судить по тому, попала ли точка P внутрь куба или нет; из ν координат точек P и \bar{P} мы можем положить соответственно ν -s равными друг другу ($P_a = \bar{P}_a$), а остальные s определить из s законов сохранения; каждая из координат при попадании P в куб будет отличаться не более, чем на 1; отсюда получается критерий (3).

б) Оценка P события P^0 - это вероятностная оценка. Проводя через \bar{P} нормаль к F и принимая ее основание за P^0 , мы неявно предполагаем, что события P^0 распределены на F равномерно. Если бы мы знали, что события P^0 в основном скапливаются в районе R , мы должны были бы вместо (6) обратиться к другому функционалу, учитывающему этот факт.

Попробуем количественно оформить эти соображения (они сходны с идеями, развиваемыми в работах Мороза и др. /3/).

Пусть нам известна амплитуда процесса (1): $\mathcal{M}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \equiv \mathcal{M}(P)$. Тогда плотность вероятности обнаружить событие P^0 есть $dW(P^0) = |\mathcal{M}_0(P^0)|^2 dP^0$. Пусть погрешности регистрации таковы, что событие P оказывается зарегистрированным в точке \bar{P} с вероятностью, даваемой нормальным законом

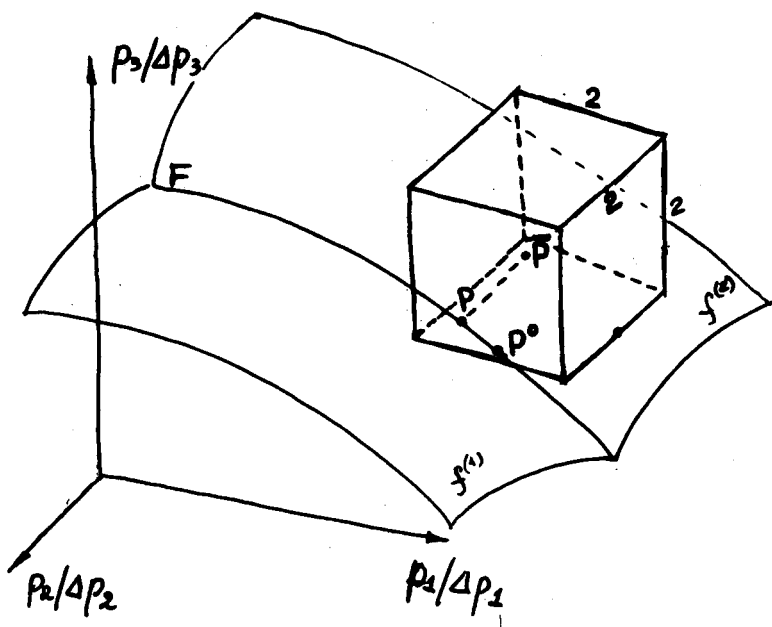


Рис. 1.

$$w(\bar{P}, P^0) d\bar{P} \sim \exp \left[- \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(p_{\alpha}^0 - \bar{p}_{\alpha})^2}{\Delta p_{\alpha}^2} \right] d\bar{P}.$$

Тогда вероятность того, что событие произойдет в точке P^0 , а замечено будет в точке \bar{P} , будет пропорциональна

$$dW(P_0, P) \sim |\mathfrak{M}(P^0)| \exp \left[- \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{p_{\alpha}^0 - \bar{p}_{\alpha}}{\Delta p_{\alpha}} \right)^2 \right] d\bar{P} dP^0. \quad (8)$$

В качестве оценки положения истинной точки P^0 можно также взять такую точку P , чтобы при условии соблюдения законов сохранения достигла максимума вероятность (8). Удобней требовать минимума отрицательного логарифма этой вероятности χ^2 , и тогда мы приходим к задаче: найти точку P , в которой выражение

$$\chi^2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(p_{\alpha} - \bar{p}_{\alpha})^2}{\Delta p_{\alpha}^2} - \ln |\mathfrak{M}(P)|^2 \quad (9)$$

достигает минимума при условии (7)

$$f^{(1)} = 0, \dots, f^{(s)} = 0.$$

Для соблюдения законов сохранения (7) можно было бы предположить, что малейший уход точки P с энергетической поверхности (7) приводит к резкому падению вероятности (8). Это можно выразить, записав вероятность (8) в виде

$$dW(P_0, P) \sim |\mathfrak{M}(P^0)|^2 \exp \left[- \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(p_{\alpha}^0 - \bar{p}_{\alpha})^2}{\Delta p_{\alpha}^2} \right] \exp \left[- T \sum_{\beta=1}^s \frac{(f^{(\beta)})^2}{(\Delta f^{(\beta)})^2} \right] d\bar{P} dP^0. \quad (10)$$

$T \gg 1$

Логарифмируя, приходим к функционалу Мороза

$$\chi^2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(p_{\alpha} - \bar{p}_{\alpha})^2}{\Delta p_{\alpha}^2} + T \sum_{\beta=1}^s \frac{[f^{(\beta)}(P)]^2}{[\Delta f^{(\beta)}]^2} - \ln |\mathfrak{M}(P)|^2, \quad (T \gg 1) \quad (11)$$

При хорошем качестве регистрирующей аппаратуры погрешности малы, поиски оптимальной точки P ограничиваются узкой областью близ \bar{P} . Если при этом амплитуда $\mathcal{M}(P)$ есть плавная функция своих аргументов, то ее изменениями при таких поисках можно пренебречь, считать точки P равномерно распределенными на F (то есть полагать $\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}(\bar{P})$) и искать минимум суммы

$$\sum_{a=1}^{\nu} \frac{(p_a - \bar{p}_a)^2}{\Delta p_a}.$$

Мы приходим к общепринятому методу выделения реакций.

в) Точно так же нужно быть уверенным, что смещения PP^0 следуют нормальному закону распределения - потому что общепринятый функционал (2) есть всего лишь следствие этого закона. В этой связи настаивает выбор тангенса угла погружения $\operatorname{tg} \alpha$ в качестве одной из компонент импульса: в самом деле, что бывает, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$?

Столь же плохо было бы выражать импульсы в сферической системе координат, при этом азимут θ меняется в конечных пределах $(0, \pi)$ (косинус от -1 до $+1$), и на концах интервала изменения нормальный закон невыполним. Надежней всего, вероятно, декартовы прямоугольные координаты.

Неудачный выбор троек чисел, характеризующих импульс частицы, может явиться источником сгущений точек на поверхности F . Например, сгущения в точках $\cos \theta = \pm 1$ будут непременно односторонними ($|\cos \theta| < 1$), что приведет к смещению оценок P в одну сторону. Неудачен может быть и сам выбор поверхности F . Так, если вместе (5) определить $f^{(5)}$ в виде $f^{(5)} \equiv |\vec{f}| - [|\vec{f}^{(4)}|^2 - m^2]^{1/2}$ или $f^{(5)} \equiv [|\vec{f}^{(4)}|^2 - |\vec{f}|^2]^{1/2} - m$ то эти функции не были бы определены в тех точках, где $|\vec{f}^{(4)}| < m$ (соответственно $|\vec{f}^{(4)}| < |\vec{f}|$). Когда событие \bar{P} случайно окажется в этих областях, то оно не сможет служить нулевым приближением при поиске χ_{\min}^2 , процедуры последовательных приближений перестанут сходиться, мы станем говорить об области "существенной нелинейности", в которой методы линеаризации функционала не работают - хотя на самом деле мы всего лишь неумело записали закон 4-инвариантности.

§2. Оценки, даваемые функционалом (9)

Функционал (9), учитывающий априорное распределение точек P^0 , приводит к их смещенным оценкам. Покажем это.

Чтобы не думать о законах сохранения, выберем функции $f^{(\beta)}(P)$ ($\beta=1, \dots, s$) в качестве s координат текущей точки P . Это значит, что из ν координат точки P^0 последние s будут автоматически равны нулю, а первые $\nu-s$ будут независимы друг от друга.

Пусть распределение истинных событий P^0 дается законом

$$\mathcal{N}^2(P^0) dP^0 = \exp[-\Phi(P^0)] dP^0,$$

а распределение экспериментальных точек \bar{P} при данном P^0 - нормальным законом:

$$\exp\left[-\frac{1}{2} P^0 \bar{P} \cdot A \cdot P^0 \bar{P}\right] d\bar{P} \equiv \exp\left[-\frac{1}{2} (P^0 \bar{P})_i A_{ij} (P^0 \bar{P})_j\right] d\bar{P}, \quad (12)$$

где A - матрица экспериментальных смещений.

В качестве функционала идентификации тогда примем

$$\chi_{\mathcal{N}}^2(P, \bar{P}) = \frac{1}{2} P \bar{P} \cdot A \cdot P \bar{P} + \Phi(P).$$

Его минимум найдем из условия

$$\nabla \chi_{\mathcal{N}}^2(P, \bar{P}) = 0. \quad (13)$$

Приближенное решение получаем, считая, что $\Phi(P)$ в окрестности некоторой известной точки Q представимо в виде

$$\Phi(P) = \Phi(Q) + \frac{1}{2} (PQ)_i \cdot \nabla_i \nabla_j \Phi(Q) \cdot (PQ)_j. \quad (14)$$

Для кратности еще обозначим $\nabla_i \nabla_j \Phi(Q) = B_{ij}$. Уравнение (13) примет вид $A \cdot P \bar{P} + B \cdot P Q = 0$. Пусть $P \bar{P} = P P^0 + P^0 \bar{P}$, $P Q = P P^0 + P^0 Q$, тогда смещение точки P от P^0 будет удовлетворять уравнению

$$(A+B) \cdot P P^0 = -A \cdot P^0 \bar{P} - B \cdot P^0 Q. \quad (15)$$

Точку P , удовлетворяющую этому уравнению, обозначим R :

$$R P^0 = -(A+B)^{-1} [A \cdot P^0 \bar{P} + B \cdot P^0 Q]. \quad (16)$$

Из (15) следует $P^0 \bar{P} = -A^{-1} [(A+B) \cdot R P^0 + B \cdot P^0 Q]$. Подстановка в (12) даст распределение точек R при данном P^0 . Показатель экспоненты этого распределения равен

$$-\frac{1}{2} [(A+B) \cdot R P^0 + B \cdot P^0 Q] \cdot A^{-1} \cdot [(A+B) \cdot R P^0 + B \cdot P^0 Q]. \quad (17)$$

Теперь легко получить искомые оценки. Результат усреднения величины Y по X обозначим $\langle Y \rangle_X$. Из (12) следует, что для каждого данного события P^0 $\langle R P^0 \rangle_{\bar{P}} = 0$, тогда из (16) получается величина вектора среднего смещения оценки R точки P^0 относительно самой точки P^0

$$\langle R P^0 \rangle_{\bar{P}} = -(A+B)^{-1} \cdot B \cdot P^0 Q. \quad (18)$$

Из (17) следует, что матрица смещений C вектора $R P^0$ есть

$$C = (A+B) \cdot A^{-1} \cdot (A+B) = A + 2B + B \cdot A^{-1} \cdot B. \quad (19)$$

Сравним эти результаты с тем, что получается при использовании обычного функционала (2). Для этого надо в выведенных формулах положить $\Phi(P^0) = 0$ ($B=0$). Из (18) вытекает, что оценки R при $\Phi=0$ несмещенные: $\langle R P^0 \rangle_{\bar{P}} = 0$, а из (17) - что матрица оценок совпадает с матрицей начальных смещений: $C=A$. Итак, функционал (9) приводит к меньшим погрешностям, чем функционал (2) (потому что $C_{ij} \geq A_{ij}$), но получаемые с его помощью оценки оказываются смещенными (см. (18)). Оценки не смещены в двух случаях: 1) $B=0$ (равномерное распределение), 2) $B=\infty$ ($e^{-\Phi(P^0)}$ - дельта-функция).

Усредним, однако, среднее смещение RP^0 по всем точкам P^0 . Из (14) следует, что $\langle P^0 Q \rangle_{P^0} = 0$, тогда из (18) вытекает $\langle \langle RP^0 \rangle_{P^0} \rangle_{P^0} = 0$.

Мы видим, что уточнение оценок R события P^0 при учете априорного распределения событий покупается за счет смещения этих оценок. Но при этом среднее по всем событиям P^0 смещение R равно нулю (рис. 2).

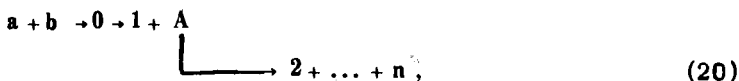
Все сказанное выше имеет своей целью обратить внимание экспериментатора на неясность ряда принципиальных основ идентификации реакций, на существование новых возможностей, и побудить его выяснить для себя, что из сказанного является действительно важным, а что представляет собою напрасные опасения или надуманные новшества. Ниже приведен случай, когда соображения такого рода способны заметно изменить результаты идентификации.

§3. Идентификация реакций, в которых рождаются

резонансы

Мы видели, что добавление члена $\ln \mathcal{K}^2(P)$ в функционал существенно лишь тогда, когда \mathcal{K} — быстроменяющаяся функция. Именно так бывает при рождении резонанса.

Предположим, мы выяснили, что реакция (1) идет по пути



причем характеристики резонанса A — его масса m_A и ширина Γ_A — известны. Ограничимся для простоты случаем $n=3$. Будь резонанс A бесконечно узок, интеграл состояний реакции (20) имел бы вид

$$S = \int \prod_1^3 \frac{d^3 p_i}{2\omega_i} \delta^4(\sum p_i - p_0) \delta((p_2 + p_3)^2 - m_A^2). \quad (21)$$

При конечной ширине резонанса A он обратится в

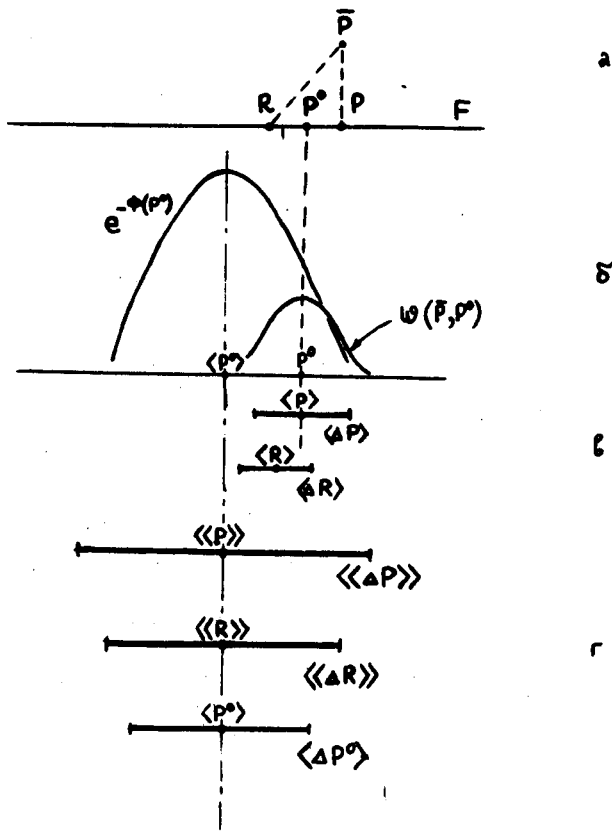


Рис. 2. Расположение точек на поверхности F . P^0 - истинное событие, P - экспериментальная точка, \bar{P} - его оценка с помощью (2), R - его оценка с помощью (8), ω - распределения точек P^0 и \bar{P} , ν - результат усреднения по P^0 для данного события P^0 , γ - результат усреднения по всем P^0 .

$$S = \int \prod_1^3 \frac{d^3 p_i}{2\omega_i} \delta^4(\sum p_i - p_0) \mathcal{B}_A(m_{23}), \quad (22)$$

где $m_{23} = \sqrt{(p_2 + p_3)^2}$, а $\mathcal{B}_A(m_{23})$ - распределение Брейта-Вигнера.

Помня, что реальное влияние на итог идентификации оказывают лишь наиболее быстро меняющиеся факторы в амплитуде \mathcal{M} , мы имеем право положить

$$\mathcal{M}^2(P) = \mathcal{B}_A(m_{23}). \quad (23)$$

Функционал (9) при идентификации каскадной реакции должен, следовательно, иметь вид

$$\chi_{\mathcal{M}}^2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(p_{\alpha} - \bar{p}_{\alpha})^2}{\Delta p_{\alpha}^2} - \ln \mathcal{B}_A(m_{23}) + 2 \sum_{\beta=1}^s \lambda_{\beta} f^{(\beta)}(P). \quad (24)$$

Если бы в реакции рождалось несколько резонансов A', A'' - все равно, одновременно или каскадом, - то вместо второго члена появилась бы в (24) сумма логарифмов

$$- \ln \mathcal{B}_{A'}(m_{1'k'}) - \ln \mathcal{B}_{A''}(m_{1''k''}).$$

Оценим ожидаемое уточнение оценок. Для этого приближенно заменим распределение Брейта-Вигнера гауссовым распределением со средним m_A и дисперсией $(\Gamma_A/2)$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_A/2}{(m - m_A)^2 + (\Gamma_A/2)^2} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Gamma_A/2} e^{-\frac{(m - m_A)^2}{2(\Gamma_A/2)^2}} \quad (25)$$

Тогда (24) примет вид

$$\chi_{\mathcal{M}}^2 = \sum_1^{\nu} \frac{(p_{\alpha} - \bar{p}_{\alpha})^2}{\Delta p_{\alpha}^2} + \frac{(m_{23} - m_A)^2}{(\Gamma_A/2)^2} + 2 \sum_{\beta=1}^s \lambda_{\beta} f^{(\beta)}. \quad (26)$$

Обозначим $\mathcal{F}(p_2, p_3) = m_{23} - m_A$ и разложим его вблизи экспериментальной точки \bar{P} в ряд: $F(p_2, p_3) = F(\bar{p}_2, \bar{p}_3) + \sum_a (\partial F / \partial p_a)(p_a - \bar{p}_a) + \dots$

В итоге в функционале появятся члены вида $(p_a - \bar{p}_a)^2 \left[\frac{1}{\Delta p_a^2} + \frac{1}{(\Gamma_A/2)^2} \left(\frac{\partial F}{\partial p_a} \right)^2 \right]$,
 которые, например, при $\partial F / \partial p_a = 1, \Gamma_A/2 \approx \Delta \bar{p}_a$ обратятся в $\frac{(p_a - \bar{p}_a)^2}{\Delta p_a^2/2}$;

точность оценки соответствующих компонент p_a улучшится вдвое. При

$\Gamma_A/2 \ll \Delta \bar{p}_a$ улучшение точности может быть еще большим, а при $\Gamma_A/2 \gg \Delta p_a$ учет рождения резонансов не улучшит точности.

Само значение χ_{\min}^2 , с которым мы должны сравнивать получающиеся χ_{\min}^2 , проверяя гипотезу (20), при этом не меняется

$$\chi_{\min}^2 \leq s \quad (27)$$

(на это обстоятельство обратил мое внимание Р. Ледницкий).

Конечно, отличия распределения $\mathcal{B}_A(m_{23})$ от гауссова приведут к тому, что и само распределение минимальных значений функционала станет другим. Вид этого распределения и величину критерия отбора χ_{\min}^2 можно, например, получить моделированием. Оно же способно ответить на вопросы о том: 1) насколько сильно смещены оценки при пользовании функционалом (24) по сравнению с функционалом (2); 2) насколько точней (и точней ли) производится идентификация; 3) насколько легче достигается уровень $\chi^2 \leq s$ и способствует ли это более легкому отделению одной реакции от другой при том же экспериментальном уровне погрешностей.

Остановимся подробнее на последнем вопросе. С увеличением энергии ускорителей проводить выделение каналов становится все труднее: экспериментальные погрешности все ближе к характерной для идентификации величине - массе π -мезона. Число событий, с равным успехом причисляемых к двум каналам - без рождения π^0 -мезона и с рождением π^0 -мезона, растет все заметнее /4/. В этих условиях, обнаружив в уже идентифицированных по (2) событиях резонанс A , имеет смысл включить в функционал идентификации член $-\ln \mathcal{B}_A$ и вторично подвергнуть процедуре отделения каналов все зарегистрированные события. Может

оказаться, что добавление в χ^2 члена $-\ln \mathcal{B}_A$ позволит более решительно отнести события к одному из двух каналов: а) с π^0 ; б) без π^0 . Если функционал (9) при высоких энергиях действительно улучшит отделение одного канала реакции от другого, мы простим этому функционалу его грех — смещение оценок.

Разберем также интересный вопрос о том, какие экспериментальные распределения можно включить вместо \mathcal{M} в функционал идентификации (9). Представим, что мы знаем (из данного опыта или из предыдущих опытов) угловое распределение одной из частиц $\mathcal{F}_\theta(\theta_1)$, импульсное распределение той же (или другой) частицы $\mathcal{F}_p(p_1)$ и, например, распределение $\mathcal{F}_m(m_{23})$, имеющее вид фазовой кривой плюс Брейт-Вигнеров пик на месте известного резонанса. Нельзя ли в функционале (9) принять

$$\mathcal{M}^a = \mathcal{F}_\theta(\theta_1) \mathcal{F}_p(p_1) \mathcal{F}_m(m_{23}) \quad (28)$$

и не поможет ли эта экспериментальная информация улучшить оценки точек P ? Ответ будет положителен, если: 1) одновременное распределение по θ_1, p_1, m_{23} теоретически возможно (то-есть между переменными нет функциональной связи); 2) оно факторизуется так, как написано (то-есть между спектрами переменных нет корреляции). Так, перемножая \mathcal{F}_θ и \mathcal{F}_p , мы пренебрегаем корреляцией между θ_1 и p_1 ; если она и впрямь мала, учет (28) может оказаться полезным; если же она велика, то в качестве \mathcal{M}^2 следует употребить двумерное распределение $\mathcal{F}(\theta_1, p_1)$. В частности, одно какое-нибудь экспериментальное распределение всегда можно использовать.

Точности ради отметим, что в качестве \mathcal{M}^2 следует брать не экспериментальные распределения, а частное от их деления на теоретические распределения по соответствующим переменным при $\mathcal{M} = 1$ (потому что экспериментальный спектр есть произведение \mathcal{M}^2 на это теоретическое распределение). В самом деле, пусть нормированное на общее число случаев распределение по некоторой величине $x = x(p_1, \dots, p_n)$ есть $\mathcal{K}(x)dx$ (x может быть совокупностью нескольких величин), а $\mathcal{M}^2 = f(x)$. Введем в интеграл

$$S = \int \prod \frac{d^3 p_i}{2\omega_i} \delta(\sum p_i - p_0) f(x(p_1, \dots, p_n))$$

множитель $dx \delta(x - x(p_1, \dots, p_n))$ и проинтегрируем по всем переменным, кроме x ; получим

$$S = \int f(x) K(x) dx.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{N}^2 = f(x) = \frac{\mathcal{F}(x)}{K(x)}.$$

В частности, экспериментальный спектр масс пар 2+3, состоящий обычно из фазовой фоновой кривой плюс резонансный пик, надо делить на фактор K , равный произведению фазовых объемов пар 2+3 и 1+23

$$K = S_2(m_{23}; m_2, m_3) S_2(m_0; m_1, m_{23}).$$

Спектр масс после этого превратится в кривую, равную единице всюду, кроме узкой области резонанса; если бы мы пренебрегли фоном с самого начала, то кривая была бы всюду, кроме области резонанса, равна не единице, а нулю; при высоком резонансном пике это различие функционал (9) вряд ли заметит.

Конечно, реальное улучшение точности идентификации может возникнуть только от узких распределений: от учета спектров масс резонансов, полюсных амплитуд, реджеобразных t -спектров, узких угловых распределений. Вместе с тем надо подчеркнуть, что лучше опустить в функционале член $-\ln \mathcal{N}^2$, чем подставить вместо него неверное выражение. В последнем случае все оценки могут оказаться смещенными в худшую сторону, в первом же случае будет только увеличено среднее расстояние PP^0 , но сами оценки смещены не будут.

Вопрос о практической применимости предлагаемых методов - в частности, об улучшении делимости каналов и о величине смещения оценок - остается открытым, на него должны ответить экспериментаторы - либо моделируя свои реакции, либо пользуясь надежным экспериментальным материалом.

Я весьма благодарен В. Пеневу за постановку задачи, В. Морозу и Р. Ледницкому - за замечания, способствовавшие выяснению сути выведенных формул.

Л и т е р а т у р а

1. R.Böck. Preprint CERN, 60-30, 1960; 61-29, 1961; V.Ronne. в книге "Proc. 1964 Easter School", Herceg Novi, 1964, v. 1, p.87.
2. В.И. Мороз. Препринт ОИЯИ, P-1958, Дубна, 1965.
3. В.И. Мороз, А.В. Никитин и др. ЯФ, 6, 90, 1967.
4. Е.Н. Кладницкая, В.Е. Комолова и др. Сообщение ОИЯИ, 1-4283, Дубна, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1969 года.