СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1 - 4290

Г.И.Копылов

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРИФЕРИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

I

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1969

P1 - 4290

Г.И.Копылов

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРИФЕРИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

I

В статье излагается метод моделирования периферических взаимодействий. Обычный метод генерации случайных звезд (типа программы ФОРС /1,2,3/) для этого не годится: он рассчитан на всевозможные углы вылета вторичных частиц, в периферийных же взаимодействиях преобладают малые углы (малые передачи импульса), работа ЭВМ по программе ФОРС становится неэффективной. Существуют, правда, паллиативы: задаться экспериментальным распределением углов вылета самой тяжелой из вторичных частиц (в с.ц.м.), а направления других разыгрывать по программе ФОРС. Но дальнейшие обобщения на этом пути невозможны. Излагаемый же метод, по-видимому, такие обобщения допускает.

§1. Центральные взаимодействия очень высокой множественности

Прежде чем обратиться к моделированию периферических взаимодействий, полезно рассмотреть возможность моделирования таких центральных взаимодействий, в которых возникает очень много вторичных частиц. Программа ФОРС, например, дает случайные звезды с множественностью не более 20. Как с ее помощью разыграть 40-лучевую случайную звезду? (В принципе программа ФОРС позволяет моделировать звезды при любых n, но накопление систематических ошибок могло бы при больших n исказить результаты).

Поступим следующим образом. Разобьем все n частиц на две группы A и B, по n_A и n_B частиц в каждой

$$A \to 1+2+\ldots+n_A$$
$$B \to 1+2+\ldots+n_B. \tag{1}$$

Пусть компоненты импульса группы A в с.ц.м. равны $(p_A, \eta_A = \cos\theta_A, \phi_A)$, эффективные массы групп $0, A$ и B равны m_0, m_A и m_B, суммы масс покоя частиц из групп $0, A$ и B суть μ_0, μ_A и μ_B, а кинетическая энергия частиц из групп $0, A$ или B в их системах покоя суть T_0, T_A или T_B. Тогда интеграл состояний (фазовый объем) всех n частиц можно представить в виде /4/

$$S_n(m_0) = \iiiint\limits_{I} dm_A^2 dm_B^2 d\eta_A d\phi_A \frac{1}{4}\frac{p_A}{m_0} S_{n_A}(m_A) S_{n_B}(m_B), \tag{2}$$

где область интегрирования I есть

$$\begin{gathered} 0 \le T_A \le T_0 \\ 0 \le T_B \le T_0 - T_A \\ -1 \le \eta_A \le 1 \\ 0 \le \phi_A \le 2\pi. \end{gathered} \tag{3}$$

Формула (2) позволяет разыгрывать случайные звезды с множественностью n, если мы умеем разыгрывать случайные звезды с множественностью n_A и n_B. Рассчитаем фазовые объемы $S_{n_A}(m_A)$ и $S_{n_B}(m_B)$ в нужном интервале масс $0 \le T_A, T_B \le T_0$. Разыграем четверку случайных чисел r_1, r_2, r_3, r_4 в интервале (0,1). Из чисел r_1, r_2 выберем меньшее r' и большее r''. Вычислим четверку чисел T_A, T_B, η_A, ϕ_A по формулам

$$T_A = r' T_0 \ , \quad T_B = (r'' - r') T_0 \ ,$$

$$\eta_A = 2r_3 - 1 \ , \quad \phi_A = 2\pi r_4 \ . \tag{4}$$

Присвоим этой четверке вес

$$\Phi = 8\pi m_A m_B p_A m_0^{-1} S_{n_A}(m_A) S_{n_B}(m_B) \ . \tag{5}$$

Разыграв N таких четверок, найдем наибольшее $\Phi = \bar{\Phi}$. Применим метод браковки: оставим лишь те N' четверок, для которых добавочное случайное число r_5 приведет к

$$r_5 \bar{\Phi} < \Phi \ . \tag{6}$$

Эти N' четверок окажутся распределенными с плотностью Φ. Каждая из них определяет собою два 4-импульса $(\vec{p}_A, \omega_A)$ и $(\vec{p}_B, \omega_B)$. Обычные программы случайных звезд /1-3/ позволяют разыграть далее распады частиц A и B с импульсами p_A и p_B соответственно на n_A и n_B частиц.

В программе ФОРС /1/ для этого применяется браковка. Разыгрывается случайная звезда (n_A импульсов, удовлетворяющих законам сохранения и имеющих переменных вес K_{n_A}). Заранее известен максимальный вес $\bar{K}_{n_A}$ как функция m_A. При одних и тех же (m_A, p_A) розыгрыш звезды и случайного числа r повторяется до тех пор, пока условие $K_{n_A} > r \bar{K}_{n_A}$ не будет выполнено. Затем то же повторяется для распада B. Эта процедура возможна и при неединичных амплитудах распада.

Когда амплитуда распада постоянна, удобно пользоваться программой Чандлера /2/, которая сразу дает звезды веса единица. В дальнейшем для простоты мы будем предполагать, что случайные звезды генерируются по методу Чандлера.

При больших n вес Φ обладает в области I острым пиком, метод браковки (6) неэффективен. Чтобы сгладить пик, воспользуемся отображением треугольника

$$0 \le T_A \le T_0 \ , \qquad 0 \le T_B \le T_0 - T_A \tag{7}$$

на прямоугольник

$$0 \le \cos\theta \le 1 \ , \qquad 0 \le \phi \le \pi/2 \tag{8}$$

с помощью замены

$$\begin{aligned} T_A &= T_0 \cos^2\theta \, , \\ T_B &= T_0 \sin^2\theta \cos^2\phi \ , \\ T_C &\equiv T_0 - T_A - T_B = T_0 \sin^2\theta \sin^2\phi \end{aligned} \tag{9}$$

(см. /5/). В новых переменных $d\cos\theta \, d\phi \, d\cos\theta_A \, d\phi_A$ вес Ψ равен (обозначено $F_i(m_i) = m_i S_{n_i}(m_i)$)

$$\Psi = T_0^2 \, 4\pi \cos\theta \sin^2\theta \cdot \cos\phi \sin\phi \cdot \frac{p_A}{m_0} F_A(m_A) F_B(m_B). \tag{10}$$

В нерелятивистском пределе между p_A и $\sqrt{T_C}$ существует строгая пропорциональность, в других случаях $\sqrt{T_C}$ представляет собою наиболее быстро меняющуюся часть p_A. Так, в ультрарелятивистском случае

$$T_A \gg \mu_A , \quad T_B \gg \mu_B , \quad T_0 \gg \mu_0$$

$$p_A = \frac{\sqrt{[m_0^2 - (m_A + m_B)^2][m_0^2 - (m_A - m_B)^2]}}{2m_0} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{T_0^2 - (T_A+T_B)^2}\ \sqrt{T_0^2-(T_A-T_B)^2}}{2T_0} =$$

$$= \frac{1}{2T_0}\sqrt{T_C}\sqrt{T_0+T_A+T_B}\ \sqrt{T_0^2-(T_A-T_B)^2}\ .$$

Поэтому перепишем (10) в виде

$$\Psi = 4\pi T_0^{5/2}\cos\theta\sin^3\theta\ \cos\phi\sin^2\phi\ \frac{p_A}{m_0\sqrt{T_C}}\ F_A(m_A)\,F_B\ (m_B)\ . \tag{12}$$

Введем новые переменные (x,y) с помощью соотношений

$$Y(\theta,\phi) = \int_0^{\phi} d\phi\cdot\cos\phi\ \sin^2\phi\ \ F_B(m_B) \tag{13}$$

$$y\ (\theta,\phi) = Y(\theta,\phi)/\,Y\ (\theta,\pi/2) \tag{14}$$

$$X(\cos\theta) = \int_0^{\cos\theta} d\cos\theta\ \cos\theta\cdot\sin^3\theta\ \ F_A(m_A)\ Y\ (\theta,\frac{\pi}{2})\,. \tag{15}$$

$$x(\cos\theta) = X(\cos\theta)/\,X(1)\ . \tag{16}$$

Новые переменные меняются независимо друг от друга в квадрате (0,1). Обратные функции $\theta = \theta(x)$, $\phi=\phi(x,y)$ однозначны. В переменных (x,y) вес (12) сглаживается:

$$\Psi = \mathrm{const}\cdot\frac{1}{4}\ \frac{p}{m_0\sqrt{T_C}}\ , \tag{17}$$

где константа равна

$$X(1)\,T_0^{5/2}\ \ 16\pi\ . \tag{18}$$

Если условия протекания реакции таковы, что фазовый объем S_1 представляется в виде $const \cdot T_1^{1/2 a_1}$ (так бывает в нерелятивистском и ультрарелятивистском пределе), то вес Ψ факторизуется, переменные x и y определяются независимо (см. формулы (31,32) в /5/). Теперь в переменных (x, y) вес Ψ постоянен, розыгрыш звезд приобретает 100%-ную эффективность,

§2. *Модели с заданной неизотропностью*

В нецентральных взаимодействиях амплитуда множественного рождения перестает быть константой, в ней появляются более или менее сложные факторы, зависящие от угла вылета частиц. Рассмотрим простейший путь введения неизотропности. Пусть известно распределение углов между компаунд-частицей A и начальной частицей a в с.ц.м. Пусть оно дается функцией $f(\eta_A)d\eta_A$, причем эта функция не зависит ни от m_A, ни от m_B и не меняет, следовательно, распределения по (m_A, m_B)

$$S_n(m_0) = \iiiint_I dm_A^2\, dm_B^2\, d\eta_A\, d\phi_A\, f(\eta_A) \frac{p_A}{4m_0} S_{n_A}(m_A) S_{n_B}(m_B). \tag{19}$$

Розыгрыш такой модели ничем почти не отличается от розыгрыша центральных взаимодействий, более того, можно дать правило, по которому каждой "центральной" звезде можно поставить в соответствие звезду "нецентральную". В самом деле, для "центральных" звезд функция $f(\eta_A) = \frac{1}{2}$, в остальном же их распределения по условию не отличаются от распределений звезд в нашей новой модели. Пусть мы каким-то образом разыграли очередную случайную "центральную" звезду (например, по программе /2/) веса единица. Вычислим в ней в с.ц.м. азимутальный и полярный углы векторов

$$\vec{p}_A = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_{n_A} \qquad \vec{p}_B = \vec{p}_0 - \vec{p}_A,$$

а именно

$$\eta_A = \frac{\vec{z}\,\vec{p}_A}{p_A}, \quad \cos\phi_A = \frac{\vec{x}\vec{p}_A}{p_A\sqrt{1-\eta_A^2}}, \quad \sin\phi_A = \frac{\vec{y}\,\vec{p}_A}{p_A\sqrt{1-\eta_A^2}}. \tag{20}$$

Затем в соответствии с распределением $f(\eta_A)d\eta_A$ разыграем новый косинус полярного угла η_A', оставляя азимутальный угол прежним. Направим прежние по величине импульсы $\vec{p}_A$, $\vec{p}_B$ в новом направлении

$$\vec{z}\vec{p}_A' = p_A\eta_A', \quad \vec{x}\vec{p}_A' = \vec{x}\vec{p}_A\sqrt{1-\eta_A'^2}\cos\phi_A,$$

$$\vec{y}\vec{p}_A' = \vec{y}\,\vec{p}_A\sqrt{1-\eta_A'^2}\,\sin\phi_A,$$

или

$$\vec{z}\vec{p}_A' = \vec{z}\,\vec{p}_A\frac{\eta_A'}{\eta_A}, \quad \vec{x}\vec{p}_A' = \vec{x}\vec{p}_A\cdot k, \quad \vec{y}\vec{p}_A' = \vec{y}\,\vec{p}_A\cdot k, \quad k = \sqrt{\frac{1-\eta_A'^2}{1-\eta_A^2}}. \tag{21}$$

Импульсы всех частиц группы A переведем в систему, где $\vec{p}_A = 0$:

$$\vec{p}_i^{\,*} = \vec{p}_i - \vec{p}_A\frac{\omega_i + \omega_i^*}{m_A + \omega_A}, \quad \omega_i^* = \frac{\omega_i\omega_A - \vec{p}_i\vec{p}_A}{m_A}, \tag{22}$$

а затем из этой системы отсчета в систему, где импульс группы A равен $\vec{p}_A'$

$$\vec{p}_i' = \vec{p}_i^{\,*} + \vec{p}_A\frac{\omega_i^* + \omega_i'}{m_A + \omega_A}, \text{ где } \omega_i' = \frac{\omega_i^*\omega_A + \vec{p}_i^{\,*}\vec{p}_A}{m_A}. \tag{23}$$

Так же следует поступить с частицами из группы B . Звезда станет неизотропной, не меняя своего единичного веса.

К сожалению, опыт показывает, что неизотропность нецентральных взаимодействий сопровождается изменением спектра масс групп A и B Перейдем к таким моделям.

§3. Моделирование периферических взаимодействий

В моделях с периферическим взаимодействием в интеграл состояний обычно вводится распределение по t – квадратам 4-передач импульса от b к B (или от a к A) так, чтобы малые (по модулю) значения t встречались много чаще больших. В дополнение к факторам S_{n_A}, S_{n_B} в интеграл состояний подключают также множители $f_A(m_A), f_B(m_B)$. В итоге сечение процесса выражается интегралом

$$\sigma = \iiiint dm_A^2\, dm_B^2\, d\eta_A d\phi_A \times$$
$$\times\ S_{n_A}(m_A) S_{n_B}(m_B) f_A(m_A) f_B(m_B) \frac{1}{4} \frac{p_A}{m_0} f(t). \tag{24}$$

Удобно заменить η на t. Так как

$$t = (p_a - p_A)^2 = m_a^2 + m_A^2 - 2\omega_a \omega_A + 2 p_a p_A \eta_A \tag{25}$$

и так как при фиксированных m_A, m_B величины $\omega_a, \omega_A, p_a, p_A$ в с.ц.м. тоже фиксированы

$$\omega_A = \frac{m_0^2 + m_A^2 - m_B^2}{2 m_0}, \quad p_A^2 = \omega_A^2 - m_A^2, \tag{26}$$

то

$$\frac{1}{4} \frac{p_A}{m_0} d\eta_A = \frac{dt}{8 m_0 p_a}, \tag{27}$$

так что

$$\sigma = \frac{1}{8 m_0 p_a} \iiiint dm_A^2\, dm_B^2\, dt\, d\phi_A\, S_A f_A S_B f_B f(t). \tag{28}$$

Величина t всегда отрицательна. Она меняется в пределах

$$0 \le -t^{+} \le -t \le -t^{-} , \tag{29}$$

где

$$t^{\pm} = m_a^2 + m_A^2 - 2\omega_a \omega_A \pm 2 p_a p_A . \tag{30}$$

Предел $-t^{+}$ очень близок к нулю, а слагаемые по обе стороны от знака $\pm$ в (30) бывают при высоких энергиях очень велики. Для этого случая хороша приближенная формула

$$-t^{+} = \frac{\alpha\beta\, m_0^2 + (\alpha-\beta)(\alpha m_b^2 - \beta m_a^2)}{p_a^2} , \tag{31}$$

где

$$\alpha = \frac{m_A^2 - m_a^2}{2m_0} , \qquad \beta = \frac{m_B^2 - m_b^2}{2m_0} . \tag{32}$$

Заметим, кстати, что в этих же условиях отказывает и формула (25), если с ее помощью вычисляют по t угол вылета A. Лучше вычислять синус половины угла между A и a

$$\sin \frac{1}{2}\theta_A = \sqrt{\frac{t^{+} - t}{2 p_a p_A}} . \tag{33}$$

Вид функции $f(t)$ в разных моделях различен. В "модели Чу-Лоу" $f(t) = (t - m_\pi^2)^{-2}$ /6/, в "моделях с форм-фактором" $f(t) = \phi(t)(t - m_\pi^2)^{-2}$ /7/, где $\phi(t)$, в свою очередь, быстро убывает с ростом $|t|$. В реакциях типа

$$\pi + N \to \pi + \ldots + \pi + N \tag{34}$$

можно, как показано в /8/, группу B образовать из одного конечного нуклона N, а в группу A включить все π -мезоны, приняв при этом

$$f(t)=e^{kt}\,, \tag{35}$$

где k – константа. Тогда в (28) члены, зависящие от m_B, выпадут. В работе /9/ показано, что в реакции

$$N+N \to \pi + \ldots + \pi + N + N \tag{36}$$

при высоких энергиях следует в группы A и B включать по одному нуклону, а π -мезоны перераспределять по группам произвольным образом, при этом

$$f(t)=\phi(t)(t-m_\pi^2)^{-2}, \tag{37}$$

а

$$f_A = m_A^2\,, \quad f_B = m_B^2\,. \tag{38}$$

Как и в §1, розыгрыш звезд, подчиняющихся закону (28), должен происходить в две стадии: 1) розыгрыш четверок параметров T_A, T_B t, ϕ_A, распределенных по (28); 2) для каждой такой четверки розыгрыш распада A и B. Вторая стадия, как мы знаем, проходит с высокой (100% или близкой к этому) эффективностью, остается лишь наметить путь розыгрыша четверок T_A, T_B, t, ϕ_A. Он близок к тому пути, по которому мы шли в §1.

Начнем с πN -взаимодействий типа (34), (35). В этом случае ($B \equiv N$)

$$\sigma \sim \int dm_A^2\, dt\, d\phi_A\, f(t)\, S_{n_A}(m_A). \tag{39}$$

Вычислим первообразную от $f(t)$

$$\lambda(t)=\int_t^0 f(t)\,dt\,. \tag{40}$$

Введем новую переменную r с помощью

$$\lambda(t) = r\,\lambda(t^+) + (1-r)\,\lambda(t^-). \tag{41}$$

Это дает

$$f(t)dt = -d\lambda(t) = +[\lambda(t^-) - \lambda(t^+)]\;dr\,, \tag{42}$$

так что

$$\sigma = \int_0^{T_0} dT_A \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi_A \;[\lambda(t^-) - \lambda(t^+)]\; S_{n_A}(m_A). \tag{43}$$

Подынтегральная функция уже лишилась острого пика по t , но зависимость ее от m_A может еще быть сильной. В этом случае надо протабулировать на $(0, T_0)$ функцию

$$\mu_A(T_A) = \int_0^{T_A} dT_A\; 2m_A\, S_{n_A}(m_A)[\lambda(t^-) - \lambda(t^+)], \tag{44}$$

и ввести на $(0,1)$ новую переменную

$$s_A = \frac{\mu_A(T_A)}{\mu_A(T_0)}. \tag{45}$$

Тогда

$$\sigma = \mu_A(T_0) \int_0^1 ds_A \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi_A\,. \tag{46}$$

По случайным числам s_A и r можно определить T_A (как корень уравнения (45)) и t (как корень уравнения (41)), после чего разыгрыш ϕ_A в интервале $(0, 2\pi)$ полностью определяет собою импульсы частиц A и $B \equiv N$.

Сходным образом можно моделировать такие πN и $N\bar{N}$ – соударения, в которых массы обеих компаунд-частиц A и B заранее не фиксированы. Усложнения здесь невелики. Запишем (28) так:

$$\sigma = \int_0^{T_0} dT_B F_B(m_B) \int_0^{T_0-T_B} dT_A F_A(m_A) \int_{t^-}^{t^+} dt\, f(t) \int_0^{2\pi} d\phi_A \ , \tag{47}$$

включив в $F_A(F_B)$ все факторы, зависящие только от $m_A(m_B)$. Проведем и здесь замену t на r с помощью (40), (41). После интегрирования по r и ϕ_A останется двумерный интеграл по области I

$$T_A \geq 0, \quad T_B \geq 0, \quad T_A + T_B \leq T_0 \tag{48}$$

от функции

$$\Phi(T_A, T_B) = F_A(m_A) \cdot F_B(m_B) [\lambda(t^-) - \lambda(t^+)] . \tag{49}$$

Точки (T_A, T_B) с плотностью Φ разыгрывают либо методом браковки, либо сглаживая плотность путем замены переменных $(T_A, T_B) \to (x, y)$ с помощью равенств

$$Y(T_B, T_A) = \int_0^{T_A} dT_A F_A(m_A) [\lambda(t^-) - \lambda(t^+)]$$
$$0 \leq T_B \leq T_0, \quad 0 \leq T_A \leq T_0 - T_B \ , \tag{50}$$

$$y(T_B, T_A) = Y(T_B, T_A) / Y(T_B, T_0 - T_B)$$
$$0 \leq y \leq 1 \ , \tag{51}$$

$$X(T_B) = \int_0^{T_B} dT_B F_B(m_B) Y(T_B, T_0 - T_B)$$
$$0 \leq T_B \leq T_0 \tag{52}$$

$$x(T_B) = X(T_B) / X(T_0) \ ,$$
$$0 \leq x \leq 1 . \tag{53}$$

В переменных x, y, r, ϕ_A интеграл (47) обращается в

$$\sigma = X(T_0)\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 dr\int_0^{2\pi} d\phi_A .$$

Случайное число x позволяет получить T_B, а $y - T_A$; число r определяет t и затем η_A', наконец, ϕ_A определяет полностью импульсы $\vec{p}_A, \vec{p}_B$ частиц A и B. Дальнейший розыгрыш идет как в §1. Эффективность такого метода розыгрыша – 100%, достижимы очень высокие множественности.

Практическая проверка предлагаемого метода не производилась.

Литература

1. *В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ Р-2027, Дубна, 1965.*
2. *J.P. Chandler, C.A.Tilger. Preprint, Indiana Univ., 1966.*
3. *G.R.Lynch. Preprint UCRL-10335, 1962.*
4. *Г.И. Копылов. ЖЭТФ, 39, 10, 1060(формула 23).*
5. *Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ Р1-4281, Дубна, 1969.*
6. *G.F.Chew, F.E.Low, Phys. Rev., 113, 1640, 1959.*
7. *E.Ferrari, F.Selleri. Nuovo Cim., 24, 453, 1962.*
8. *G.Biatkowski, R.Sosnowski. Phys. Lett., 25B, 519,1967.*
9. *Е.Л. Фейнберг, Д.С. Чернавский. УФН, 82, 3, 1964.*

Рукопись поступила в издательский отдел

31 января 1969 года.