СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

P1 - 4281

Г.И.Копылов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ ДАЛИТЦА

1969

P1 - 4281

Г.И.Копылов

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ ДАЛИТЦА

Проецируя фазовое пространство нескольких частиц на плоскость, обычно пользуются либо диаграммой Далица (при трех частицах), либо треугольной диаграммой (при $n > 3$). Форма фигуры Далица сложна. Мы покажем, однако, что подходящим выбором переменных, характеризующих состояние тройки частиц, ее можно обратить в прямоугольник.

В §2 будут рассмотрены некоторые свойства треугольных диаграмм и, в частности, возможность сглаживания фона на этих диаграммах, что позволяет сблизить их свойства со свойствами диаграммы Далица.

§1. *Прямоугольная диаграмма Далица*

Дан распад $0 \to 1 + 2 + 3$. Амплитуда распада пусть равна константе. Будем характеризовать состояние тройки частиц эффективными массами пар 12 и 23: m_{12} и m_{23}. Тогда интеграл состояний (фазовый объем) системы может быть представлен в виде

$$S_3 = \left(\frac{\pi}{2m_0}\right)^2 \iint dm_{23}^2 \, dm_{12}^2 \, . \qquad (1)$$

Область интегрирования есть фигура Далица. Отсутствие множителей при дифференциалах означает равномерность фона в отсутствие резонансов в системе $1 + 2 + 3$.

Чтобы сделать область интегрирования прямоугольником, вспомним, что при фиксированном m_{23}^2 величина m_{12}^2 зависит линейно от η – косинуса угла вылета частицы 2 в системе покоя 23. Сам же косинус всегда меняется от -1 до $+1$ независимо от того, чему равно m_{23}. Сделаем η одной из переменных новой диаграммы. Имеем

$$m_{12}^2 = m_0^2 + m_3^2 - 2m_0 \frac{\omega_{23}\omega_3 + p_{23}p_3\eta}{m_{23}}, \tag{2}$$

где

$$\omega_{23} = \frac{m_0^2 + m_{23}^2 - m_1^2}{2m_0}, \qquad \omega_3 = \frac{m_{23}^2 + m_3^2 - m_2^2}{2m_{23}}, \tag{3}$$

$$p_i^2 = \omega_i^2 - m_i^2 .$$

Поэтому

$$dm_{12}^2 = R\,d\eta , \tag{4}$$

где

$$R = 2m_0 p_{23} p_3 / m_{23} \equiv$$

$$\equiv \frac{\sqrt{(m_0+m_1)^2 - m_{23}^2}\sqrt{(m_0-m_1)^2 - m_{23}^2}\sqrt{m_{23}^2 - (m_2+m_3)^2}\sqrt{m_{23}^2 - (m_2-m_3)^2}}{2m_{23}^2}. \tag{5}$$

Интеграл (1) обращается в

$$S_3 = \left(\frac{\pi}{2m_0}\right)^2 \int_{(m_2+m_3)^2}^{(m_0-m_1)^2} dm_{23}^2 \; R(m_{23}^2) \int_{-1}^{+1} d\eta .$$

Хотя область интегрирования прямоугольна, тем не менее плотность вероятности наблюдать тройку 1,2,3 с параметрами (m_{23}^2, η) неоднородна – зависит от m_{23}^2. Выберем теперь по переменной m_{23}^2 новую шкалу – такую, чтобы первообразная от $R(m_{23}^2)$ изменялась равномерно

$$r = \int\limits_{(m_2+m_3)^2}^{m_{23}^2} R(m_{23}^2)\,dm_{23}^2 \Big/ \int\limits_{(m_2+m_3)^2}^{(m_0-m_1)^2} R(m_{23}^2)\,dm_{23}^2 . \tag{6}$$

Новая переменная r обладает такими свойствами: $r=0$ при $m_{23}=m_2+m_3$, $r=1$ при $m_{23}=m_0-m_1$, r монотонно растет с ростом m_{23}, обратная функция $m_{23}^2(r)$ однозначна, и

$$R(m_{23}^2)\,dm_{23}^2 = \frac{1}{2} S_3 \;dr$$

($S_3 = S_3(m_0; m_1, m_2, m_3)$ – фазовый объем тройки ,2,3). В переменных (r,η) интеграл состояний обращается в

$$S_3 = \frac{1}{2} S_3 \int\limits_0^1 dr \int\limits_{-1}^{+1} d\eta . \tag{7}$$

Все состояния с постоянной амплитудой в прямоугольнике (r,η) (рис.1) равновероятны. Сгущения точек пропорциональны квадрату амплитуды. Переход от прямоугольника к фигуре Далица производится по формуле $m_{23}^2 = m_{23}^2(r)$ и затем по формуле (2). Ясен и обратный переход.

Функция (6) легко табулируется, а иногда выражается и аналитически. В распаде на три ультрарелятивистских частицы

$$r = 2(m_{23}^2/m_0^2) - (m_{23}^2/m_0^2)^2,$$

откуда

$$m_{23}^2 = m_0^2(1-\sqrt{1-r}). \tag{8}$$

В нерелятивистском случае

$$\pi r = 2\left(2\frac{\tau}{T_0}-1\right)\sqrt{\frac{\tau}{T_0}\left(1-\frac{\tau}{T_0}\right)} - \arccos\left(\frac{2\tau}{T_0}-1\right), \tag{9}$$

где

$$\tau = m_{23}-m_2-m_3, \qquad T_0 = m_0-m_1-m_2-m_3. \tag{10}$$

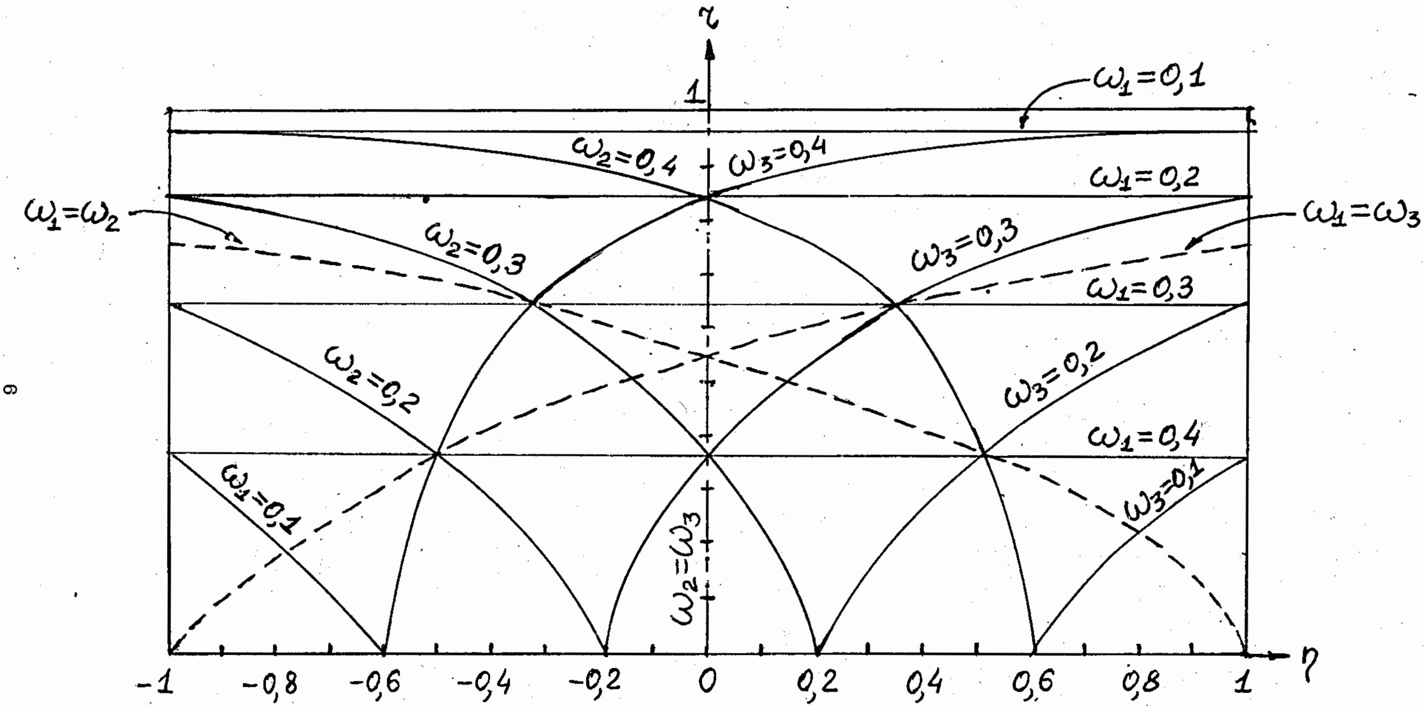


Рис.1. Диаграмма распада на три ультрарелятивистских частицы.

Прямоугольная диаграмма применима во всех случаях, в которых применяют и обычную диаграмму Далица. Отметим еще возможность отобразить фигуру Далица на круг /1/.

§2. *Системы нескольких частиц*

Рассмотрим распад типа

$$0 \to 1+2+\ldots+n \qquad (n \geq 4)$$

Разобьем n частиц на две группы A и B, по n_A и n_B частиц в каждой, причем $n_A \geq 2$, $n_B \geq 2$ и $n_A+n_B=n$. Эффективная масса первой группы есть M_A, второй M_B, кинетическая энергия частиц группы в ее системе покоя есть T_A, T_B. Область изменения (T_A, T_B) есть, как известно, прямоугольный треугольник

$$\begin{aligned} &0 \leq T_A \leq T_0 , \\ &0 \leq T_B \leq T_0 - T_A . \end{aligned} \qquad (11)$$

Тот же вид имеет область (T_A, T_B) и в случае, когда $n_A+n_B<n$.

В предположении, что амплитуда распадов частиц 0, A и B постоянна, интеграл состояний n частиц представим в виде

$$S_n = \int dm_A^2\, dm_B^2\, S_2(0;A,B) S_{n_A}(m_A) S_{n_B}(m_B), \qquad (12)$$

где $S_k(m_k)$ – фазовый объем k частиц с эффективной массой m_k. Распределение по $dm_A\, dm_B$, следовательно, в этом случае неравномерно

$$\frac{d^2 S}{dm_A\, dm_B} = 4m_A m_B S_2(m_0; m_A, m_B) S_{n_A}(m_A) S_{n_B}(m_B) \quad (n_A+n_B=n). \qquad (13)$$

Когда, кроме групп A и B, в системе остается еще какая-то группа C из k частиц с массами $m_{C1},\dots,m_{Ck}$, то распределение усложняется ненамного

$$\frac{d^2S}{dm_A\,dm_B} = 4m_Am_BS_{2+k}(m_0;m_A,m_B,m_{C1},\dots,m_{Ck})S_{n_A}(m_A)S_{n_B}(m_B). \qquad (14)$$

Когда же A и B – это не группы частиц, а настоящие резонансы, то интеграл состояний равен

$$S = \iint dm_A^2\,dm_B^2\;S_2(m_0;m_A,m_B)BW(m_A^2)BW(m_B^2), \qquad (15)$$

где BW – спектр массы резонанса (формула Брейта-Вигнера). Когда резонанс бесконечно узок, на диаграмме (11) мы получаем две заселенные полосы, параллельные катетам (рис. 2).

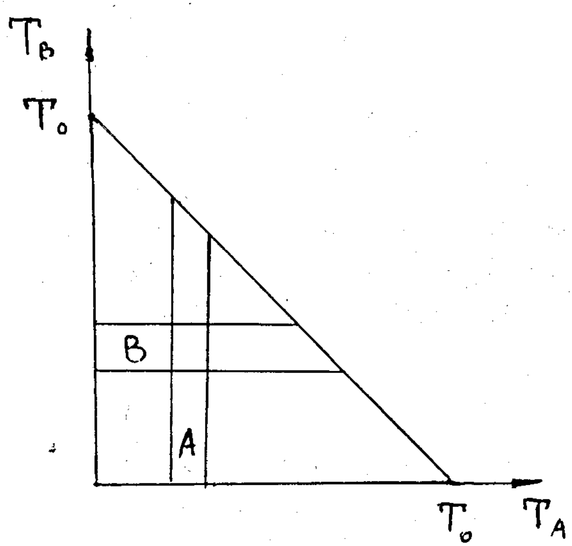


Рис. 2.

Полосы эти чаще всего образуются на фоне распределений типа (13), (14). Неравномерность фона носит другой характер. Чтобы составить себе представление о нем, рассмотрим нерелятивистский предел. Тогда можно положить

$$m_A S_{n_A}(m_A) \approx T_A^{\frac{1}{2}\alpha_A}, \quad m_B S_{n_B}(m_B) \approx T_B^{\frac{1}{2}\alpha_B},$$
$$S_2(m_0; m_A, m_B) \approx T_C^{\frac{1}{2}}, \tag{16}$$

где

$$\alpha_i = 3n_i - 5 \tag{17}$$

$$T_C = T_0 - T_A - T_B. \tag{18}$$

Максимум в распределении (13) придется при этом на

$$T'_A = \alpha_A \kappa T_0, \quad T'_B = \alpha_B \kappa T, \quad T'_C = \kappa T, \tag{19}$$

где

$$\kappa = (1 + \alpha_A + \alpha_B)^{-1}. \tag{20}$$

Линии уровня в окрестности точки (T'_A, T'_B) – это эллипсы

$$(T_A - T'_A + T_B - T'_B)^2 + \alpha_A^{-1}(T_A - T'_A)^2 + \alpha_B^{-1}(T_B - T'_B)^{-2} = \text{const}. \tag{21}$$

При $\alpha_A = \alpha_B = \alpha$ большая ось эллипса параллельна гипотенузе, а отношение полуосей равно $\sqrt{2\alpha + 1}$ (рис. 3).

В других случаях положение максимума в фоне иное. Так, рассмотрим фон в реакции

$$\pi^+ + p \to 0 \to A + B \to (\overset{1}{\pi}{}^+ + \overset{2}{\pi}{}^-) + (\overset{3}{p} + \overset{4}{\pi}{}^+) \tag{22}$$

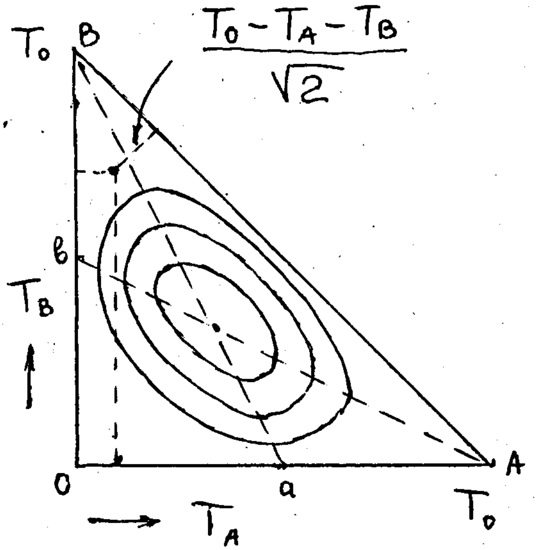


Рис. 3.

в предположении, что

$$T_0 \ll m_0,\ T_B \ll m_3 + m_4, \quad \text{но } T_A \text{ произвольно} \tag{23}$$

и $m_1 = m_2 = m$. Легко обнаружить, что теперь максимум придется на точку (T_A', T_B') с координатами

$$T_A' = \sqrt[3]{4m^2(T_0+2m)} - 2m, \quad T_B' = \frac{1}{2}(T - T_A'). \tag{24}$$

С увеличением числа частиц в группе A максимум по m_A при фиксированном m_B смещается вправо. При малых m_A можно считать нерелятивистским распад группы A :

$$S_{n_A}(m_A) \approx T_A^{\frac{1}{2}a_A},$$

при больших m_A можно считать нерелятивистским распад

$$0 \to A + B$$

$$S_2(m_0; m_A, m_B) \approx (T_0 - T_A - T_B)^{\frac{1}{2}},$$

поэтому приближенно распределение по T_A при фиксированном T_B есть

$$\left.\frac{d^2S}{dm_A\,dm_B}\right|_{m_B=\mathrm{const}} \approx T_A^{\frac{1}{2}(3n_A-5)}(T_0 - T_B - T_A)^{\frac{1}{2}}.$$

В точке

$$\frac{T_A'}{T_0 - T_B} = 1 - \frac{1}{3n_A - 4} \qquad (25)$$

оно имеет максимум, который с увеличением n_A смещается вправо. Максимум этот не резок (в сравнении с резонансными максимумами(15)), однако приводит к "оттоку" фона от $T_A' = 0$ тем большему, чем больше n_A. Это объясняет, почему на диаграмме ($m_{p\pi}$, $m_{\pi\pi\pi}$) фон по сравнению с диаграммой ($m_{p\pi}$, $m_{\pi\pi}$) сдвинут вправо (рис. 4; взят из работы /3/).

Подобно диаграмме Далица, треугольную диаграмму можно превратить в прямоугольник. Для этого, например, поступим так. Перепишем (13):

$$d^2S = dT_A\,dT_B\,\Phi(T_A, T_B)$$

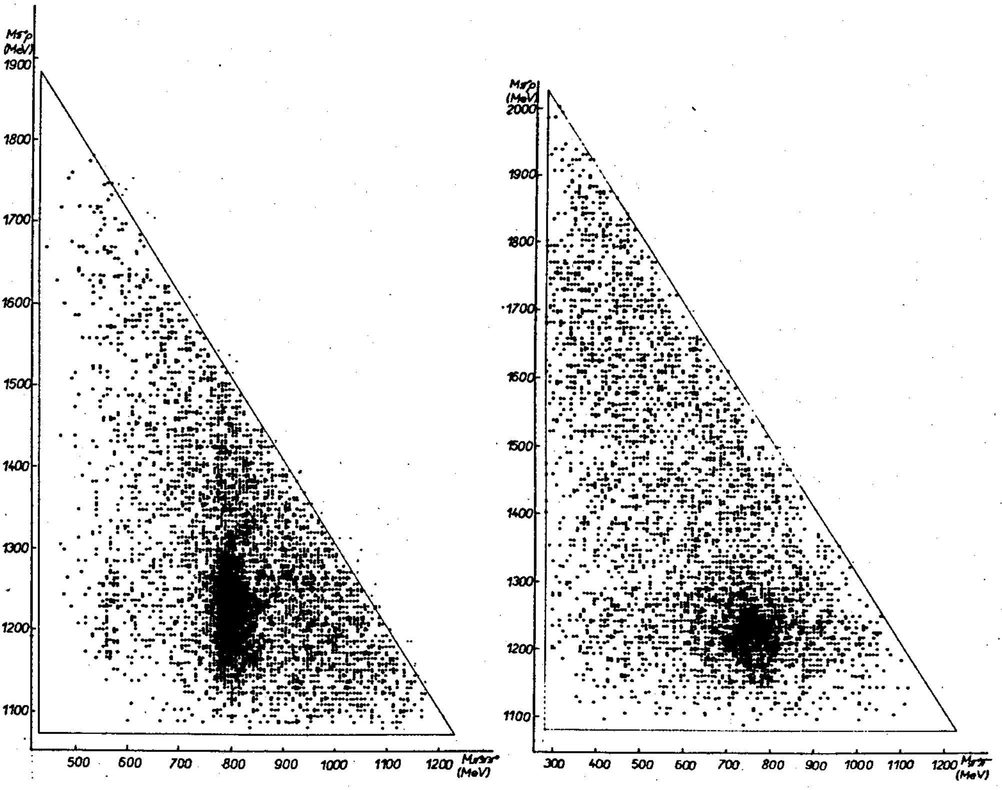
и формально введем δ -функцию

$$d^3S = dT_A\,dT_B\,dT_C\,\Phi(T_A, T_B)\,\delta(T_A + T_B + T_C - T_0). \qquad (26)$$

Здесь (см. рис. 3) T_C – расстояние точки 0 от гипотенузы, умноженное на $\sqrt{2}$, причем

$$0 \le T_C \le T_0.$$

Произведем теперь замену переменных



(MeV)
1900
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
(MeV)
(MeV)
2000
1900
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
(MeV)

Рис. 4.

$$T_A = T_0 \, (r\cos\theta)^2,$$

$$T_B = T_0 \, (r \sin\theta \cos\phi)^2 \qquad (27)$$

$$T_C = T_0 \, (r \sin\theta \sin\phi)$$

и проинтегрируем по r, полагая затем $r = 1$

$$d^2 S = T_0^2 \cdot 4\cos\theta \sin^2\theta \, d\cos\theta \cdot \cos\phi \cdot \sin\phi \, d\phi \cdot \tilde{\tilde{\Phi}}(\theta, \phi) . \qquad (28)$$

Переменные (θ, ϕ) меняются независимо друг от друга в прямоугольнике

$$0 \le \cos\theta \le 1$$

$$0 \le \phi \le \pi/2 . \qquad (29)$$

Распределение $\tilde{\tilde{\Phi}}(\theta, \phi)$ – это функция $\Phi(T_A, T_B)$, выраженная через θ и ϕ. Конечно, в формулах (27) можно, не меняя множителей при $\tilde{\tilde{\Phi}}$, делать любые перестановки правых частей. Этим можно воспользоваться, чтобы резонансы изображались полосками, параллельными осям координат. Так будет при замене (27) с резонансами в группе A. Однако резонансы в группе B изобразятся на диаграмме косыми полосами.

На первый взгляд, прежний треугольник не хуже нашего прямоугольника. Однако прямоугольник позволяет факторизовать распределения и сгладить фон резонансов. Пусть, например, энерговыделение T_0 невелико, воспользуемся тогда нерелятивистским приближением

$$\tilde{\tilde{\Phi}} \approx T_A^{\frac{1}{2} a_A} \; T_B^{\frac{1}{2} a_B} \; T_C^{\frac{1}{2}} . \qquad (30)$$

Замена даст

$$\tilde{\tilde{\Phi}} = (\sin\theta)^{3+\alpha_B} (\cos\theta)^{1+\alpha_A} (\sin\phi)^2 (\cos\phi)^{1+\alpha_B} \, d\cos\theta \, d\phi \; .$$

Введем x и y в $0 \le x, \; y \le 1$ так, чтобы было

$$x = \frac{\int_0^{\cos\theta} (\sin\theta)^{3+\alpha_B} (\cos\theta)^{1+\alpha_A} d\cos\theta}{\int_0^1 (\sin\theta)^{3+\alpha_B} (\cos\theta)^{1+\alpha_A} d\cos\theta} , \tag{31}$$

$$y = \frac{\int_0^{\phi} \sin^2\phi \, (\cos\phi)^{1+\alpha_B} d\phi}{\int^{\pi/2} \sin^2\phi \, (\cos\phi)^{1+\alpha_B} d\phi} . \tag{32}$$

Тогда будем иметь

$$\tilde{\tilde{\Phi}}(x, y) \sim dx \, dy \, .$$

Равномерность в нерелятивистском пределе гарантирует отсутствие сильных фоновых сгущений на диаграмме $0 \le x, \; y \le 1$ и при любых сколь угодно высоких энергиях /2/.

Рассмотрим еще сглаживание фона в случае реакции (22), когда выполнены условия (23). Тогда

$$S_A \sim (1 - 4\, m_\pi^2 / m_A^2)^{1/2}, \quad , \qquad S_B \sim T_B^{1/2} \quad , \qquad S_C \sim T_C^{1/2} \quad .$$

Замена (27) даст

$$d^2 S \sim \left[1 - \frac{4\, m_\pi^2}{(2 m_\pi + T_0 \cos^2\theta)^2} \right]^{1/2} \sin^4\theta \cos\theta \, d\cos\theta \cdot \sin^2 2\phi \, d\phi \; .$$

Мы видим, что и здесь распределение по (θ, ϕ) факторизуется. Выражая x через θ, а y через ϕ по образцу формул (31), (32), мы добьемся равномерности фона в квадрате $0 \le x, y \le 1$. Выкладки, сходные с проведенными, позволяют решить задачу о моделировании периферических взаимодействий при сверхвысоких энергиях, когда процесс описывается полюсными диаграммами. Обычный способ моделирования /2/ в применении к полюсным диаграммам не эффективен. Между тем, сглаживание распределений по (m_A, m_B) позволит эффективно разыгрывать массы групп A и B, а распад "частиц" A и B легко моделируется обычным путем.

Литература

1. *Ю.А. Симонов. ЯФ, 3, 630, 1966; В.В. Пустовалов, Ю.А. Симонов. ЖЭТФ, 51, 345, 1966.*
2. *В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ Р11-3193, Дубна 1967.*
3. *N.Angelov, A.B.Feniuk, I.M.Gramenitzky, Kh.Kanazirski, M.Khristov, P.Kerachev, A.M.Moiseev, A.Prokeš, M.D.Shafranov, L.A.Tikhonova. Paper presented to 14 Intern. Conf. on High Energy Physics, Vienna, 1968.*

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1969 года.