СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р1 - 4280

Г.И.Копылов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

# К КИНЕМАТИКЕ ПАРНОГО РОЖДЕНИЯ РЕЗОНАНСОВ

1969

P1 - 4280

Г.И.Копылов

# К КИНЕМАТИКЕ
# ПАРНОГО РОЖДЕНИЯ РЕЗОНАНСОВ

Речь пойдет о парном рождении резонансов в реакциях типа $\bar{p} + p \to \rho + \rho \to (\pi_1 + \pi_2) + (\pi_3 + \pi_4)$, $\pi^+ + p \to \Delta + \rho \to (p + \pi^+) + (\pi^+ + \pi^-)$ или в общем случае о реакциях

$$0 \to 5 + 6, \quad 5 \to 1 + 2, \quad 6 \to 3 + 4 \tag{1}$$

Могут ли в подобных реакциях пары "чужих" $\pi$ -мезонов $(\pi_1 \pi_3)$ и $(\pi_2 \pi_4)$ также образовывать $\rho$ -мезон? Или, если частицы 2 и 3 тождественны, то какова будет область изменения $(m_{13}, m_{24})$, будет ли она отличаться от области изменения $(m_{12}, m_{34})$ в прямой реакции $0 \to 1 + 2 + 3 + 4$? Последний вопрос важен при расчете фона, возникающего на треугольной диаграмме $(m_{12}, m_{34})$ из-за неразличимости частиц 2 и 3.

На эти и некоторые другие вопросы (см. §2) мы ответим, если рассчитаем область I изменения $(m_{13}, m_{24})$ в процессе (1). Ниже решается эта задача для случая, когда $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \mu$, а $m_5 = m_6 = m$. Более общий случай произвольных масс пока не имеет аналитического решения.

## §1. *Расчет*

Интересующий нас расчет можно проводить по-разному; мы проведем часть решения одним способом, затем продолжим решение по-другому, потом перейдем к третьему способу – в расчете на то, что один из способов окажется пригодным для более сложных задач.

Будем работать в системе покоя 0, в которой импульсы частиц 5 и 6 равны $\vec{p}$ и $-\vec{p}$, а энергии $\omega_5 = \omega_6 = \omega = m_0/2$. На импульсы $\vec{p}$ и $-\vec{p}$ насадим эллипсоиды распадов $5 \to 1+2$ и $6 \to 3+4$ (рис. 1а). Направления импульсов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_3$ однозначно определяют, во-первых, величину $p_1$ и $p_3$, а, кроме того, и векторы $\vec{p}_2$ и $\vec{p}_4$

$$\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1 \ , \quad \vec{p}_4 = -\vec{p} - \vec{p}_3 \ ;$$

значит, тем самым определяются и эффективные массы $m_{13}$ и $m_{24}$. Меняя направления вылета частиц 1 и 3, будем получать различные значения $m_{13}$ и $m_{24}$; нас интересуют те направления, при которых $(m_{13}, m_{24})$ принимают крайние допустимые значения.

Начнем с аналитических формул. В системе покоя 5 зададим косинус $\eta$ угла между $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_5$, в системе покоя 6 – косинус $\xi$ угла между $\vec{p}_3$ и $\vec{p}_5$ и угол $\phi$ между плоскостями $(\vec{p}_1, \vec{p}_5)$ и $(\vec{p}_3, \vec{p}_5)$. Введем еще величину

$$\sigma = (1 - 4\mu^2/m^2)^{1/2} \ ,$$

через которую выражается импульс любой из частиц 1 или 2 (3 или 4) в системе покоя 5 (6):

$$p_i^* = m\sigma/2 \ .$$

Переход в систему покоя 0 даст для энергии частицы 1 выражение

$$\omega_1 = \frac{\omega + p\sigma\eta}{2} \ .$$

Проекция импульса $\vec{p}_1$ на $\vec{p}_5$ будет $(\omega\sigma\eta + p)/2$, а его поперечная компонента – $m\sigma\sqrt{1-\eta^2}/2$. Так мы придем к совокупности исходных формул

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega + p\sigma\eta) \ , \quad p_{1||} = \frac{1}{2}(\omega\sigma\eta + p) \ , \quad |\vec{p}_{1\perp}| = \frac{1}{2} m\sigma\sqrt{1-\eta^2} \ ;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\omega - p\sigma\eta) \ , \quad p_{2||} = \frac{1}{2}(-\omega\sigma\eta + p) \ , \quad \vec{p}_{2\perp} = -\vec{p}_{1\perp} \ ;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega - p\sigma\xi) \ , \quad p_{3||} = \frac{1}{2}(\omega\sigma\xi - p) \ , \quad |p_{3\perp}| = \frac{1}{2} m\sigma\sqrt{1-\xi^2} \ ; \qquad (1)$$

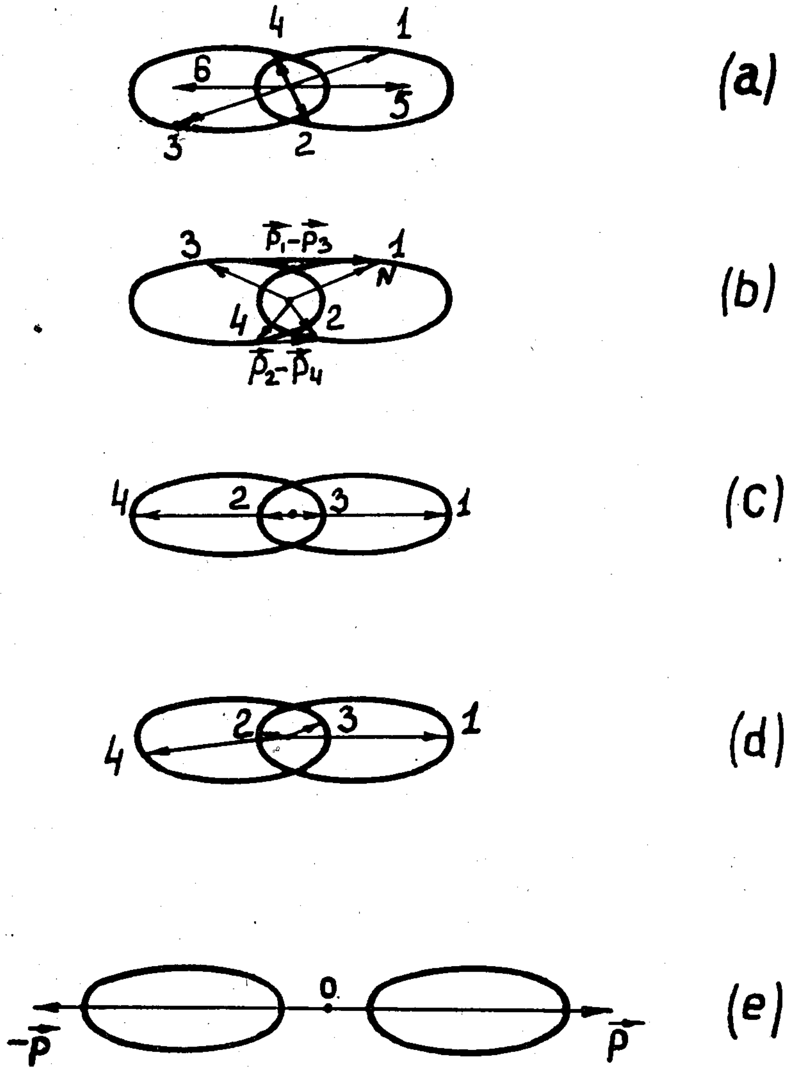
(a)
4
1
6
5
3
2
(b)
3
$\vec{p}_1-\vec{p}_3$
1
N
4
2
$\vec{p}_2-\vec{p}_4$
(c)
4
2
3
1
(d)
4
2
3
1
(e)
0
$-\vec{p}$
$\vec{p}$

Рис. 1.

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega + p\sigma\xi), \quad p_{4||} = \frac{1}{2}(-\omega\sigma\xi - p), \quad \vec{p}_{4\perp} = -\vec{p}_{3\perp} \quad ;$$

$$\sphericalangle(\vec{p}_{1\perp}, \vec{p}_{3\perp}) = \sphericalangle(\vec{p}_{2\perp}, \vec{p}_{4\perp}) = \phi .$$

Теперь мы в состоянии выразить

$$m_{13}^2 = 2\mu^2 + 2\omega_1\omega_3 - 2p_{1||}p_{2||} - 2p_{1\perp}p_{3\perp}\cos\phi$$

через $\xi, \eta, \phi$ :

$$m_{13}^2 = 2\mu^2 + \frac{1}{2}(\omega^2 + p^2)(1 - \sigma^2\eta\xi) + \omega p\sigma(\eta - \xi) - \\ - \frac{1}{2}m^2\sigma^2\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\xi^2}\cos\phi . \tag{2}$$

Квадрат $m_{24}^2$ отличается от $m_{13}^2$ знаком $\eta$ и $\xi$ :

$$m_{24}^2 = 2\mu^2 + \frac{1}{2}(\omega^2 + p^2)(1 - \sigma^2\eta\xi) - \omega p\sigma(\eta - \xi) - \\ - \frac{1}{2}m^2\sigma^2\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\xi^2}\cos\phi . \tag{3}$$

Сразу видно, что в поисках крайних значений $m_{13}$ и $m_{24}$ мы можем ограничиться только значениями $\cos\phi = \pm 1$, потому что зависимость $m_{13}^2$ и $m_{24}^2$ от $\cos\phi$ линейна. Следовательно, края области I принадлежат плоским конфигурациям импульсов $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_4$. Это сильно облегчает поиски.

Теперь воспользуемся физическими соображениями. Мы уже отметили, что когда распад $0 \to 1+2+3+4$ происходит не каскадом (эффективная масса пар 1+2 и 3+4 не фиксирована), то область изменения $(m_{13}, m_{24})$ представляет собою равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $m_0 - 4\mu$

$$2\mu \le m_{24} \le m_0 - 2\mu , \\ 2\mu \le m_{13} \le m_0 - m_{24} . \tag{4}$$

Пусть это будет $\Delta KOL$ на рис. 2, где $E'S = E'T = 2\mu$, а $OL = OK = m_0 - 4\mu$. Искомая область I находится где-то внутри $\Delta KOL$; это область, где соблюдены добавочные условия $m_{12} = m_{34} = m$. Покажем, что она прилегает к гипотенузе AB. В самом деле, рассмотрим конфигурации $\vec{p}_1 + \vec{p}_3 = 0$, $\vec{p}_2 + \vec{p}_4 = 0$ (рис. 1а). При этом

$$\omega_1 + \omega_3 = \sqrt{m_{13}^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_3)^2} = m_{13}, \tag{5}$$

а $\omega_2 + \omega_4 = m_{24}$. Закон сохранения энергии может быть поэтому переписан в виде $m_{13} + m_{24} = m_0$, а это и есть уравнение гипотенузы AB. Крайние точки A и B получаются при $\eta = \pm 1$, $\xi = \pm 1$:

$$A(\omega - p\sigma,\ \omega + p\sigma),\ B(\omega + p\sigma,\ \omega - p\sigma). \tag{6}$$

Чтобы найти уравнение границы ACDB, прибегнем к другому приему. Из закона сохранения импульса $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = -(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) = \vec{p}$ следует тождество

$$(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) + (\vec{p}_2 - \vec{p}_4) = 2\vec{p}. \tag{7}$$

Оно изображается треугольником abc со сторонами $ab = |\vec{p}_1 - \vec{p}_3|$, $bc = |\vec{p}_2 - \vec{p}_4|$ и $ac = |2\vec{p}|$. Величина сторон ab и bc определяется эффективной массой $m_{13}$ и $m_{24}$ и разностями энергий $\omega_1 - \omega_3$ и $\omega_2 - \omega_4$, потому что существуют тождества

$$\begin{aligned} |\vec{p}_1 - \vec{p}_3| &= [(\omega_1 - \omega_3)^2 + m_{13}^2 - 4\mu^2]^{1/2}, \\ |\vec{p}_2 - \vec{p}_4| &= [(\omega_2 - \omega_4)^2 + m_{24}^2 - 4\mu^2]^{1/2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из закона сохранения энергии следует $\omega_1 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_2$. Фиксируя различные значения этой разности r (она меняется от нуля до $p\sigma$) и рассматривая различные треугольники abc с одним и тем же r, получим семейство кривых, связывающих $m_{13}$ с $m_{24}$. Самая внешняя из них, очевидно, получится, если положить $r=0$, а треугольник $abc$ развернуть в отрезок. Здесь мыслимы три возможности: $ab - bc = ac$ (это бывает вдоль дуги $AC$ на рис. 2), $ab + bc = ac$ (это – дуга $CD$) или $-ab + bc = ac$ (это дуга $DB$). Следовательно, уравнения дуг $AC$ и $DB$ суть

$$\left| \sqrt{m_{13}^2 - 4\mu^2} - \sqrt{m_{24}^2 - 4\mu^2} \right| = 2p, \tag{9}$$

уравнение дуги $CD$

$$\sqrt{m_{13}^2 - 4\mu^2} + \sqrt{m_{24}^2 - 4\mu^2} = 2p. \tag{10}$$

Точкам на дуге $ACDB$ отвечают конфигурации типа рис. 1б при различных положениях точки $N$.

Оказывается, однако, что мыслимы и другие граничные конфигурации. Точка $E$, наиболее близкая к началу координат, получается при расположении, показанном на рис. 1в. При этом $\eta=\xi=1$, $\phi=0$, и мы имеем

$$m_{13} = m_{24} = \omega\sqrt{1-\sigma^2} = 2\mu\omega/m = \mu m_0/m,$$

то есть у точки $E$ координаты суть $E(\mu m_0/m, \mu m_0/m)$. Пусть, далее, пара $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ на рис. 1в остается неподвижной ($\eta=1$), а пара $\vec{p}_3$, $\vec{p}_4$ начнет поворачиваться ($\xi$ начнет меняться, см. рис. 1г); тогда $m_{13}$ начнет быстро возрастать, $m_{24}$ медленно убывать, точки $(m_{13}, m_{24})$ начнут двигаться по кривой $EA$. Уравнение этой кривой получим, положив в (2), (3) $\eta=1$, $\phi=0$ и исключив из них $\xi$. Оно может быть записано так, чтобы было видно, что дуга $EA$ действительно проходит через точки $A(\omega - p\sigma, \omega + p\sigma)$ и $E(\omega\sqrt{1-\sigma^2}, \omega\sqrt{1-\sigma^2})$

$$\frac{m_{13}^2 - m_{13}^2(E)}{m_{24}^2 - m_{24}^2(E)} = \frac{m_{13}^2(A) - m_{13}^2(E)}{m_{24}^2(A) - m_{24}^2(E)}.$$

Если в этом уравнении переставить $m_{13}$ и $m_{24}$, получим дугу $EB$.

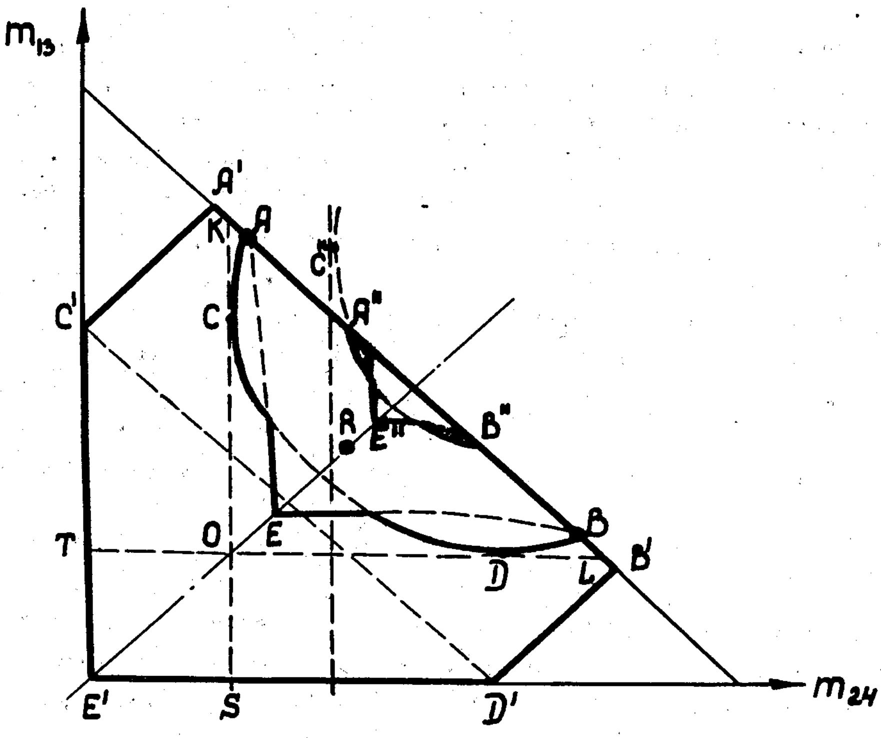


Рис. 2.

Форма областей I , следовательно, довольно сложна: это сумма двух областей, образованных тремя линиями ACDB , AEB и AB, соединяющими точки A и B . При распаде на фотоны ($\mu = 0$) она ограничена прямыми – это A′C′E′D′B′ (уравнение A′C′ есть

$$m_{13} - m_{24} = 2p \equiv (m_0^2 - 4m^2)^{1/2}).$$

Так выглядит область I в распаде $f^0 \to 2\pi^0 \to 4\gamma$ . Область ACEDB примерно соответствует распаду пары $\rho$ – мезонов на $\pi$ – мезоны. Если бы энерговыделение в распаде $\rho \to \pi + \pi$ было невелико (в сравнении с распадом $0 \to \rho + \rho$ ), то область I приобрела бы форму A″E″B″, где дуга A″B″ описывается одним только уравнением (10). При этом расположение эллипсоидов было бы таким, как на рис. 1д.

Рассуждения, которыми была установлена форма I , не были строгими. Строгий подход состоял бы в отображении области $-1 \leq \xi, \eta \leq +1$, $\phi = 0$ и $\pi$ с помощью формул (2) и (3) на плоскость ($m_{13}$, $m_{24}$) (достаточно построить линии $\eta = -\xi$ , $\eta = 1$ и $\xi = 1$ , все другие оказываются внутри них). Но эллипсоиды делают выкладки короче. Они полезны и в задачах посложнее. Так, хотя та же задача для системы

$$\pi^+ + p \to \Delta^{++} + \rho^0 \to (p_1 + \pi_2^+) + (\pi_3^+ + \pi_4^-) \qquad (11)$$

очень громоздка, но отдельные части границы определяются немедленно: эллипсоиды распадов $\Delta \to p + \pi$ и $\rho \to \pi + \pi$ имеют различную форму (рис. 1а), поэтому условие $\vec{p}_1 + \vec{p}_3 = 0$ невыполнимо (или выполнимо в одной – двух точках), так что граница области едва ли касается гипотенузы треугольника на рис. 2. С другой стороны, конфигурации типа рис. 1в и 1г в этом случае возможны, так что область ($m_{13}$, $m_{24}$) вблизи точки E может быть очерчена (точка E уже не будет на оси симметрии). Вообще, эллипсоиды рис. 1 позволяют наметить характерные точки границы.

Представим себе, что мы изучаем реакцию (11) и наносим точки с координатами ($m_{12}$, $m_{34}$) на треугольную диаграмму типа (4). Рождение $\Delta$ и $\rho$ выразится в перенаселенности области $m_{12} \cong m_\Delta$ ,

$m_{34} \cong m_\rho$. Фон составят, во-первых, события из прямой реакции $\pi^+ + p \to p + \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ и из реакций с рождением одного резонанса и, во-вторых, события с координатами $(m_{13}, m_{24})$ – мы их не отличаем от событий $(m_{12}, m_{34})$ ввиду наличия двух тождественных $\pi^+$ -мезонов. Величину фона нужно знать для того, чтобы рассчитать вероятности отдельных каналов реакций. Обычно фон из-за тождественности $\pi$ -мезонов считают равномерным. Рассуждения предыдущего абзаца убеждают нас, что это неверно; события $(m_{13}, m_{24})$ в углы треугольника и к гипотенузе вообще попадать не будут. К сожалению, аналитический расчет подобного фона крайне сложен; надо либо прибегнуть к моделированию, либо при расчете вероятностей каналов вообще избегать проецировать события на плоскость $(m_{ik}, m_{\ell m})$.

## §2. *Задачи*

Задача 1. Могут ли в каскаде $\bar{p} + p \to \rho + \rho \to 4\pi$ пары "чужих" мезонов образовывать резонанс с массой $m_\rho$ ?

Решение. Для этого необходимо, чтобы точка R (рис. 2) с координатами $(m_\rho, m_\rho)$ оказалась внутри области I . Должно быть выполнено условие $m_{13}(R) > m_{13}(E)$, то есть $m_\rho > m_\pi m_0 / m_\rho$, откуда следует условие

$$m_\rho > \sqrt{m_\pi m_0} . \qquad (12)$$

В частности, в распаде пары одинаковых резонансов на лептоны или фотоны $(m \gg \mu)$ ничто не мешает парам лептонов иметь массу резонансов. В распаде пары $\rho$ -мезонов на $\pi$ -мезоны это равенство $m_{13} = m_{24} = m_\rho$ возможно лишь тогда, когда эффективная масса двух $\rho$ -мезонов не превысит

$$m_\rho^2 / m_\pi \approx 4 \text{ Гэв}.$$

Задача 2. В каких пределах может меняться в распаде

$$K^0 \to \overset{5}{\pi}{}^0 + \overset{6}{\pi}{}^0 + \overset{7}{\pi}{}^0, \qquad \overset{5}{\pi}{}^0 \to \gamma_1 + \gamma_2, \qquad \overset{6}{\pi}{}^0 \to \gamma_3 + \gamma_4 \tag{13}$$

эффективная масса тройки частиц $\overset{7}{\pi}{}^0\ \gamma_1\ \gamma_3$ ? На сколько она может отличаться от массы пары $\pi^0\ \pi^0$ в распаде $K^0 \to \rho + \pi^0$ (т.е. от 498 Мэв) или в распаде (13), где $m_{\pi^0\pi^0}$ меняется от $2m_\pi = 270$ до $m_K - m_\pi =$ = 363 Мэв?

Решение. Зададимся массой $m_0$ пары 5+6 и перейдем в систему покоя этой пары. В ней будет известна энергия частицы 7:

$$\omega_7 = (m_K^2 - m_0^2 - m_\pi^2)/2m_\pi .$$

Мы можем, задавшись массой пары 1+3, написать выражение для эффективной массы тройки 1+3+7:

$$m_{137}^2 = m_{13}^2 + m_\pi^2 + 2\omega_{13}\omega_7 - 2p_{13}p_7\cos\theta . \tag{14}$$

Максимум этого выражения достигается при $\cos\theta = -1$ (ничто не мешает в системе покоя 5+6 разлету пары 1+3 и 7 в противоположные стороны). Чтобы определить $\omega_{13}$ в системе покоя 5+6, надо наряду с $m_{13}$ задать и массу $m_{24}$

$$\omega_{13} = \frac{m_0^2 + m_{13}^2 - m_{24}^2}{2m_0} .$$

Ясно, что наибольшее значение $\omega_{13}$ будет достигнуто при наибольшем $m_{13}$ и наименьшим $m_{24}$. Глядя на область I($A'C'E'D'B'$) на рис. 2, мы видим, что следует испытать пары $(m_{13}, m_{24})$ на отрезке $A'C'$. На нем $m_{13} - m_{24} = 2p$, поэтому входящее в формулу для $\omega_{13}$ сочетание $m_{13}^2 - m_{24}^2 \equiv 2p(m_{13} + m_{24})$ достигнет максимума в точке $A'$. В ней, как и повсюду на гипотенузе $A'B'$, импульс $p_{13} \equiv 0$, поэтому (14) приобретает вид

$$m^2_{137\,max} = m^2_{13} + m^2_{\pi} + 2m_{13}\omega_7,$$

где

$$m_{13} = \omega_6 + p_6 = \frac{m_0 + (m_0^2 - 4m_\pi^2)^{1/2}}{2}.$$

Остается выбрать $m_0$, минимизирующее это выражение. Легко убедиться, что максимум достигается при наибольшем $m_0$, равном $m_K - m_\pi$, при этом частица 7 покоится: $\omega_7 = m_\pi$; в итоге

$$m_{137\,max} = m_{13\,max} + m_\pi = \frac{m_K + m_\pi}{2} +$$
$$+ \sqrt{\frac{1}{4}(m_K - m_\pi)^2 - m_\pi^2} \cong 437 \text{ Мэв}.$$

Наименьшее значение $m_{137}$, как легко догадаться, будет реализовано тогда, когда пара 1+3 и частица 7 направятся в одну сторону с наименьшей разницей в скоростях. Для этого положим $\cos\theta = +1$, а пару $(m_{13}, m_{24})$ возьмем в точке $D'$ (рис. 2), что приведет к $m_{13}=0$, $\omega_{13} = p_{13} = m_\pi^2 / 2m_0$. Формула для $m^2_{137}$ обратится в

$$m^2_{137\,min} = m^2_\pi + \frac{m_\pi^2}{m_0}(\omega_7 - p_7) = m_\pi^2 + \frac{m_\pi^4}{m_0\omega_7 + m_0 p_7}.$$

С ростом $m_0$ величина $m_0\,\omega_7$ убывает, поэтому выгоднее всего взять $m_0$ поменьше: $m_0 = 2m_\pi$. В итоге

$$m_{137\,min} \approx m_\pi + \frac{1}{4}(\omega_7 - p_7) \approx 143 \text{ Мэв}.$$

Задача 3. В каких пределах может меняться в распаде

$$K^0 \to \underset{\llcorner\!\to \gamma_1 + \gamma_2}{\pi^{7\,0}} + \underset{\llcorner\!\to \gamma_3 + \gamma_4}{\pi^{8\,0}} + \underset{\llcorner\!\to \gamma_5 + \gamma_6}{\pi^{9\,0}}$$

эффективная масса тройки $\gamma_1\gamma_3\gamma_5$ ?

Р е ш е н и е. Интуиция подсказывает, что наибольшее значение массы $\gamma_1 \gamma_3 \gamma_5$ будет достигнуто одновременно с наибольшим значением массы $\gamma_1 \gamma_3 \overset{9}{\pi}{}^0$.

Выше мы видели, что при этом в системе покоя $K^0$ частица 9 покоится, а масса пары 13 равна $m_{13\,max} = 437 - 135 = 302$ Мэв. Распад покоящейся частицы 9 породит фотоны с энергией $m_\pi/2$, так что

$$m_{\substack{135\\max}} = \sqrt{(m_{\substack{13\\max}} + \frac{1}{2} m_\pi)^2 - (\frac{1}{2} m_\pi)^2} = \sqrt{m_{13_{max}} \; m_{\substack{139\\max}}} \approx 365 \quad \text{Мэв}.$$

Наименьшее значение массы $\gamma_1 \gamma_3 \gamma_5$ равно нулю, потому что такова эффективная масса трех фотонов, летящих в одну сторону, а ничто не мешает трем $\pi^0$ -мезонам разлетаться коллинеарно, например, вдоль оси $z$, а каждому из трех фотонов $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$ вылететь тоже в направлении оси $z$.

Рукопись поступила в издательский отдел

31 января 1969 года.