

К-659

19/III - 69

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1 - 4279



Г. И. Копылов

ДИАГРАММЫ ДАЛИЦА МНОГОЧАСТИЧНЫХ
СИСТЕМ В ИНВАРИАНТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1969

P1 - 4279

Г.И. Копылов

7727/2 up

ДИАГРАММЫ ДАЛИЦА МНОГОЧАСТИЧНЫХ
СИСТЕМ В ИНВАРИАНТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Диаграмма Далица, как известно, позволяет проецировать на двумерное многообразие состояния системы трех частиц 1,2,3 в виде точек с координатами $(m_{23}^2, m_{12}^2)(m_{ik}$ - эффективная масса системы $i+k)$. Если пары 1+2 и 2+3 образуют резонансы с массами m' и m'' , то полосы $m_{12}=m'$ и $m_{23}=m''$ выделяются на диаграмме своей густой населенностью. Поэтому диаграмма Далица удобна для изучения систем, в которых одна и та же частица может входить в состав двух резонансов - в данном случае резонансов в парах 1+2 и 2+3.

Для многочастичных систем диаграмма Далица неизвестна. Однако задача о проецировании на плоскость состояний таких систем может быть поставлена, причем как раз для случая, когда одна и та же частица может входить в состав двух разных групп частиц (не обязательно пар). Такие диаграммы позволили бы отделять друг от друга каналы реакций, в которых одна и та же частица способна возникать от распада двух различных резонансов. Хотя возникающие распределения в области изменения пар инвариантных масс уже не обладают равномерностью, свойственной обычной диаграмме Далица, это не является помехой в той задаче, ради которой они строятся: вычисление относительной вероятности двух каналов реакции. Надо только заранее рассчитать "нормативные" (безрезонансные) распределения.

В этой работе для ряда практически интересных случаев будет рассчитана форма области изменения эффективных масс двух групп частиц, имею-

ших общую часть. Окажется, что во всех случаях она имеет форму фигуры Далица, к которой присоединен один из углов описанного вокруг фигуры прямоугольника. Будет также рассчитано нормативное распределение событий в этой области. Рождение резонансов, как и обычно, будет при этом выделяться повышенной населенностью полос, параллельных осям координат.

Решение поставленных задач упрощается, если предварительно сформулировать лемму.

§1. Лемма о движении фигуры Далица

Задача. Дан распад $0 \rightarrow 1+2+3$. Масса одной из вторичных частиц возрастает до своего предельно допустимого значения (например, m_1 до $m_0 - m_2 - m_3$), или масса первичной частицы 0 убывает до $m_1 + m_2 + m_3$. При этом прочие массы считаются постоянными. Как меняется при этом на плоскости (m_{23}^2, m_{12}^2) форма и положение фигуры Далица?

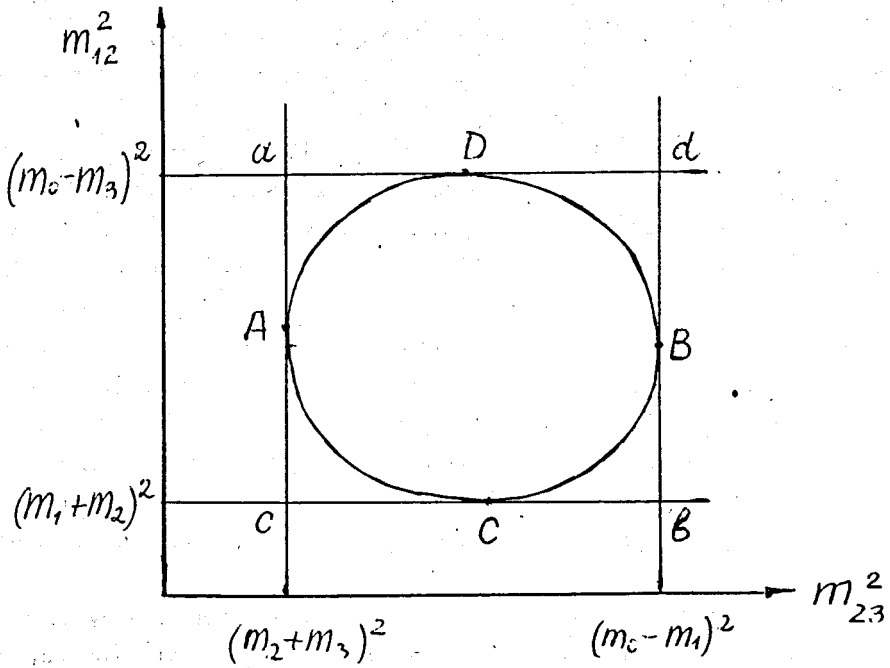


Рис.1.

Упрощенное решение (рис.1). Фигура Далица вписана в прямоугольник $adbc$, образованный отрезками прямых $m_{23}^2 = (m_2 + m_3)^2$, $m_{23}^2 = (m_0 - m_1)^2$, $m_{12}^2 = (m_1 + m_2)^2$, $m_{12}^2 = (m_0 - m_3)^2$.

Длина сторон прямоугольника уменьшается при уменьшении энерговыведения T в распаде, например $bc = T(m_0 - m_1 + m_2 + m_3)$. Когда одна из масс m_0, m_1, m_2, m_3 стремится к своему кинематическому пределу (m_1, m_2, m_3 - снизу, m_0 - сверху), то энерговыведение стремится к нулю, прямоугольник, а вместе с ним и фигура Далица, стягивается в точку. Будем называть её предельной точкой. Когда $m_1 \rightarrow m_0 - m_2 - m_3$, то предельная точка - это точка a , потому что линии ac и ad при изменении m_1 остаются неподвижными. Когда $m_2 \rightarrow m_0 - m_1 - m_3$, то неподвижны прямые ad и bd , так что фигура стягивается в точку d . Когда $m_3 \rightarrow m_0 - m_1 - m_2$, то фигура сожмется в точку b . А когда $m_0 \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$, то неподвижны линии ac и cb , и фигура Далица обратится в точку c .

Без доказательства примем следующее свойство фигуры Далица: точки пересечения её границ с лучами, проведенными из предельной точки, по мере удаления соответствующей переменной массы от предельного значения монотонно удаляются от предельной точки.

Выделенные фразы составляют содержание леммы. Решение задачи мы назвали упрощенным, потому что, во-первых, не доказываем последнее свойство и, во-вторых, не оговариваем особо случаев, когда одна из постоянных масс равна нулю (при этом скорость монотонного удаления границ может иногда стать равной нулю).

§2. Одна частица, общая двум парам

В системе n частиц ($n \geq 3$) найти область изменения (m_{23}^2, m_{12}^2) и нормативное распределение над этой областью.

При $n = 3$ ответ мы знаем: область ограничена фигурой Далица, распределение над нею однородно и равно

$$d^2 S = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{dm_{23}^2 dm_{12}^2}{m_{123}^2} \quad (1)$$

Ясна и идея расчета при $n > 3$: эффективная масса системы 1+2+3 больше уже не фиксирована, она меняется от $\mu_{123} = m_1 + m_2 + m_3$ до $m_0 - m_4 - \dots - m_n$; искомая область будет суммой (в том смысле, какой придает этому слову теория множеств) областей при всевозможных m_{123} , а распределение - суммой (в обычном арифметическом смысле этого слова) подобных же распределений над отдельными диаграммами Далица. Найти сумму областей I изменения (m_{23}^2, m_{12}^2) по всем m_{123} поможет лемма. При $m_{123} = \mu_{123}$ энергосумма равно нулю, фигура обратится в точку с (рис.2). С увеличением m_{123} фигура расширяется и отодвигается от точки с; её границы монотонно удаляются по лучам с вершиной с; при наибольшем допустимом m_{123} , равном $M = m_0 - m_4 - \dots - m_n$, фигура Далица займет позицию ADBC. Присоединив к ней угол АсС, получим искомую область I.

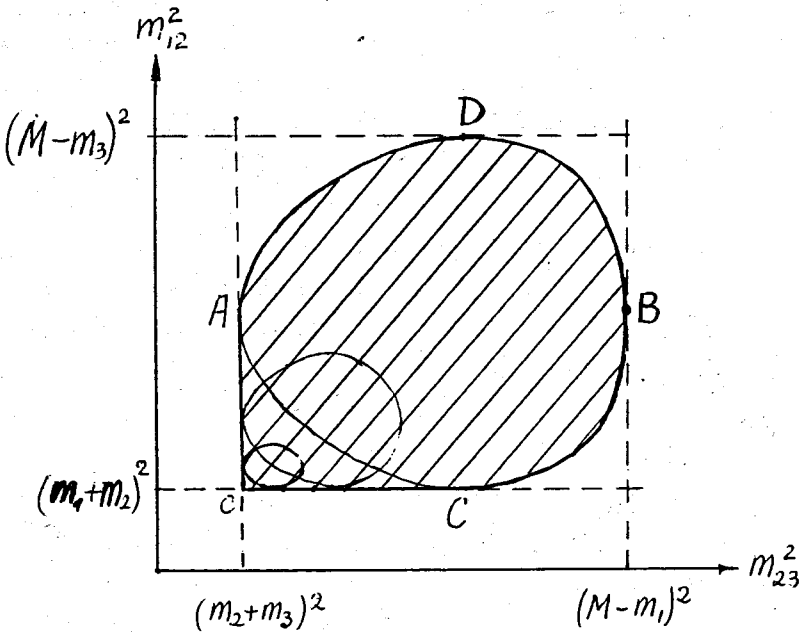


Рис.2.

В системе $1+2+\dots+n$ распределение по m_{123}^2 даётся в приближении фазового объема фактором $S_{n-2}(0; 123, 4, \dots, n)$ dm_{123}^2 , то-есть фазовым объемом системы с полной массой m_0 и с массами частей m_{123}, m_4, \dots, m_n . Равенство (1) может быть переписано в виде

$$\frac{d^3 S}{dm_{23}^2 dm_{12}^2 dm_{123}^2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{S_{n-2}(0; 123, 4, \dots, n)}{m_{123}^2} \quad (2)$$

Следовательно, распределение Φ по $dm_{23}^2 dm_{12}^2$ в области 1

$$S = \iint_I dm_{23}^2 dm_{12}^2 \Phi(m_{23}^2, m_{12}^2) \quad (3)$$

будет даваться интегралом

$$\Phi(m_{23}^2, m_{12}^2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_{f'}^{f''} \frac{dm_{123}^2}{m_{123}^2} S_{n-2}(0; 123, 4, \dots, n) \quad (4)$$

Оно нормировано на S_n -фазовый объем всех n частиц.

Вычислим пределы интегрирования - границы изменения m_{123}^2 при фиксированных m_{23}^2, m_{12}^2 . Имеем в системе покоя частицы 2

$$m_{123}^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2(\omega_1 + \omega_3)m_2 + 2\omega_1\omega_3 - 2p_1p_3 \cos \theta_{13}$$

Так как m_{12}^2 и m_{23}^2 фиксированы, то в той же системе отсчета

$$\omega_1 = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}, \quad \omega_3 = \frac{m_{23}^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_2}, \quad p_1^2 = \omega_1^2 - m_1^2$$

Крайние значения m_{123}^2 осуществляются при $\cos \theta_{13} = \pm 1$

$$(m_{123}^2)_{\max}^{\min} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2(\omega_1 + \omega_3)m_2 + 2\omega_1\omega_3 \pm 2p_1p_3 \quad (6)$$

В интеграле (4) нижний предел f' , следовательно, равен $(m_{123}^2)_{\min}$, верхний же равен меньшему из чисел M^2 и $(m_{123}^2)_{\max}$. При $n=4$ интеграл в (4) берется, при больших n не обойтись без численного интегрирования.

Особняком стоит случай $m_2 = 0$. Область I при этом просто совпадает с соответствующей фигурой Далица при $m_{123} = M$, а пределы интегрирования в (4) суть

$$f'' = M^2$$

$$f' = (m_{12}^2 + m_{23}^2 - m_1^2 - m_3^2) \left(\frac{m_{23}^2}{m_{23}^2 - m_1^2} + \frac{m_{12}^2}{m_{12}^2 - m_1^2} \right). \quad (7)$$

Распределение Φ плавно убывает от точки с к дальним краям области I. О характере убывания можно составить представление на примере распада на четыре ультрарелятивистские частицы ($n=4, m_i=0$):

$$\Phi(m_{12}^2, m_{23}^2) = m_0^2 \ln \frac{m_0^2}{m_{12}^2 + m_{23}^2} - (m_0^2 - m_{12}^2 - m_{23}^2)$$

внутри квадрата $m_{12}^2 + m_{23}^2 \leq m_0^2$.

Резонансы в системах 1+2 и 2+3 вызовут "незаконную" перенаселенность полос $m_{12} = \text{const}$ и $m_{23} = \text{const}$.

§3. Одна частица, общая паре и тройке ($n=4$)

В системе четырех частиц с определенной энергией покоя m_0 ("распад $0 \rightarrow 1+2+3+4$ ") рассчитаем нормативное распределение по $dm_{12}^2 dm_{234}^2$. Зафиксируем массу m_{34} компаунд-частицы (3+4). Тогда областью изменения m_{12}^2, m_{234}^2 будет фигура Далица для распада частицы 0 на три частицы с массами m_1, m_2 и m_{34} , распределение будет равномерным

$$\frac{d^2 S}{dm_{12}^2 dm_{234}^2} \Big|_{m_{34} = \text{const}} = \left(\frac{\pi}{2m_0} \right)^2. \quad (8)$$

Однако, на самом деле, масса m_{34} переменна. В фазовообъемном приближении ее значения распределены по закону

$$\frac{dS}{dm_{34}^2} = S_2(34; 3, 4). \quad (9)$$

Перемножая (8) и (9), получим плотность Φ распределения по dm_{234}^2, dm_{12}^2 в виде

$$\Phi(m_{234}^2, m_{12}^2) = \left(\frac{\pi}{2m_0}\right)^2 \int_{f'}^{f''} dm_{34}^2 S_2(34; 3, 4), \quad (10)$$

где S_2 — фазовый объем системы с массой m_{34} , распадающейся на частицы с массами m_3 и m_4

$$S_2(ab; a, b) = \frac{\pi p_a^*}{m_{ab}} = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{m_{ab}^2 - (m_a + m_b)^2} \sqrt{m_{ab}^2 - (m_a - m_b)^2}}{m_{ab}^2}. \quad (11)$$

Интеграл в (10) берется элементарно.

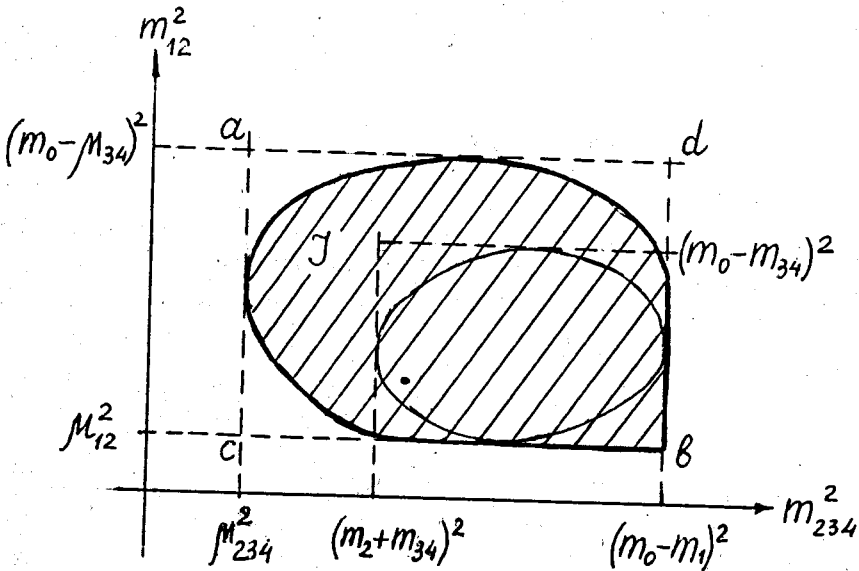


Рис.3.

При наибольшем допустимом значении $m_{34} = m_0 - m_1 - m_2$ фигура Далица обращается в точку b (рис.3). Наибольшей площади она достигает при $m_{34} = \mu_{34} \equiv m_3 + m_4$. Из леммы следует, что область I , в которой могут меняться параметры m_{234}^2 и m_{12}^2 , есть фигура Далица (для распада частицы 0 на три частицы с массами m_1, m_2 и μ_{34}), к которой присоединен угол α в α описанного вокруг нее прямоугольника. Эта область была найдена ранее¹, однако наш путь решения несравненно проще и естественней.

Пределы интегрирования в (10) получаются как граничные значения m_{34} при заданных m_0, m_{12}, m_{234} . Их легко подсчитать в системе покоя частицы 1

$$(m_{34}^2)_{\min}^{\max} = (p_{234} - p_2)_{\max}^2 = m_{234}^2 + m_2^2 - 2\omega_{234}\omega_2 + 2p_{234}p_2, \quad (12)$$

где

$$\omega_{234} = \frac{m_0^2 - m_1^2 - m_{234}^2}{2m_1}, \quad \omega_2 = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1}, \quad p_1^2 = \omega_1^2 - m_1^2. \quad (13)$$

Нижним пределом в (10) может оказаться и число $\mu_{34}^2 = (m_3 + m_4)^2$ если оно больше, чем $(m_{34}^2)_{\min}$.

Когда $m_1 = 0$, то нижний предел всегда μ_{34}^2 , а верхний предел вместо (12) дается выражением

$$f'' = (m_0^2 + m_2^2 - m_{234}^2 - m_{12}^2) \left(\frac{m_{234}^2}{m_0^2 - m_{234}^2} - \frac{m_2^2}{m_{12}^2 - m_2^2} \right). \quad (14)$$

С помощью формул этого параграфа можно изучать реакции типа $\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi + \pi$ (в которых ожидается рождение изобар и двух-трех-частичных бозонных резонансов).

§4. Пара, общая двум тройкам (n=4)

В реакции $a + b \rightarrow 0 \rightarrow 1+2+3+4$ измеряют распределение на плоскости (m_{123}^2, m_{234}^2) , ожидая появления резонансов в системах $1+2+3$ и $2+3+4$ (например, $p + p \rightarrow N + \pi + \pi + N$ или $p + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \pi^+$). Изобразим эту реакцию так: $0 \rightarrow 1+(23)+4$. Нам снова предстоит рассмотреть фигуру Далица, но при переменной массе m_{23} . При наибольшем значении $m_{23} = m_0 - m_1 - m_4$ она сожмется в точку d (рис.4), затем с уменьшением m_{23} фигура начнет расплываться и при $m_{23} = \mu_{23} = m_2 + m_3$ достигнет своего наибольшего размаха. Уже знакомая нам монотонность удаления границ фигуры от предельной точки объясняет, почему область I есть фигура Далица (для распада частицы 0 на частицы с массами m_1, μ_{23}, m_4), к которой присоединен угол d описанного прямоугольника. Плотность распределения на ней дается интегралом

$$\Phi(m_{234}^2, m_{123}^2) = \left(\frac{\pi}{2m_0}\right)^2 \int_{\max(\mu_{23}^2, r)}^{r^+} dm_{23}^2 S_2(23; 2, 3). \quad (15)$$

Пределы получим, представив m_{23}^2 в виде $(p_0 - p_1 - p_4)^2$ и ведя расчет в системе покоя 0

$$m_{23}^2 = m_0^2 + m_1^2 + m_4^2 - 2m_0(\omega_1 + \omega_4) + 2\omega_1\omega_4 - 2p_1p_4 \cos \theta_{14}.$$

В этой системе

$$\omega_1 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_{234}^2}{2m_0}, \quad \omega_4 = \frac{m_0^2 + m_4^2 - m_{123}^2}{2m_0}, \quad p_1^2 = \omega_1^2 - m_1^2, \quad (16)$$

так что пределы выглядят следующим образом:

$$f^{\pm} = m_{123}^2 + m_{234}^2 - m_0^2 + 2\omega_1\omega_4 \pm 2p_1p_4. \quad (17)$$

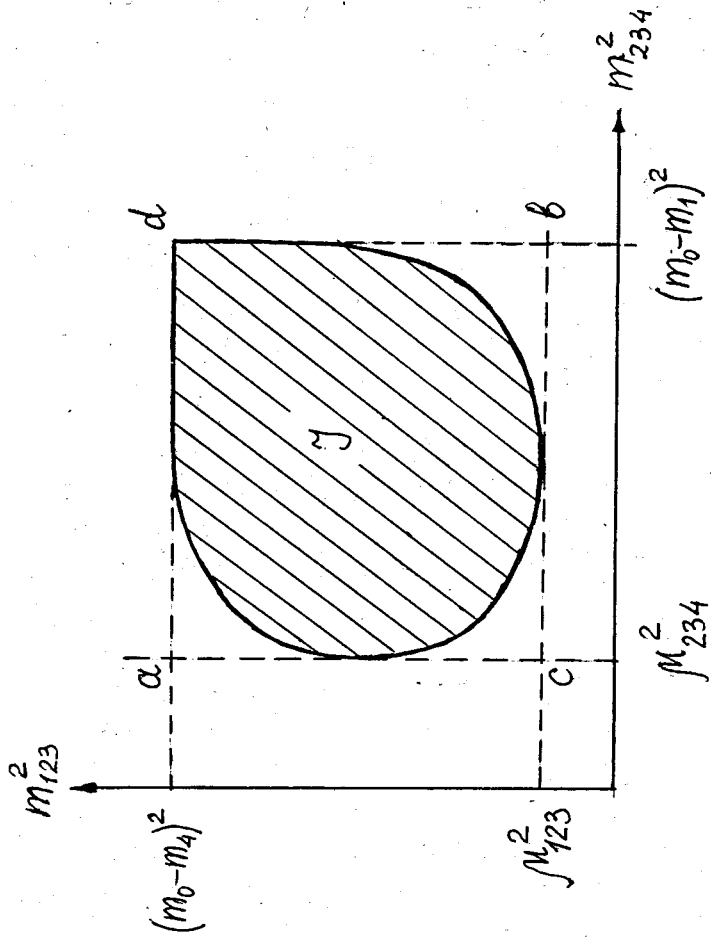


Рис. 4.

§5. Частица, общая двум тройкам ($n = 5$)

Какую форму имеет область изменения (m_{123}^2, m_{345}^2) в системе пяти частиц 1-5 с определенной эффективной массой? Представим распад на пять частиц в виде распада на три частицы (12), 3, (45), две из которых обладают переменной массой. Если закрепить m_{12} и m_{45} , то фигура Далица изобразится схемой (а) на рис.5. Пусть теперь начнет изменяться m_{12} , а масса m_{45} пусть пока будет неизменна. Область изменения (m_{123}^2, m_{345}^2) изобразится схемой (б). Если, наконец, начать менять и массу m_{45} в разрешенных пределах ($m_4 + m_5, m_0 - \mu_{12} - m_3$), то получим искомого область I - это диаграмма Далица для распада на частицы с массами $m_1 + m_2, m_3$ и $m_4 + m_5$, к которой присоединены два угла - левый верхний и правый нижний описанного прямоугольника (рис.5в).

Плотность распределения по этой области дается двукратным интегралом

$$\Phi(m_{123}^2, m_{345}^2) = \iint dm_{12}^2 dm_{45}^2 S_2(12; 1, 2) S_2(45; 4, 5) \quad (18)$$

При заданных m_{123}, m_{345} и произвольном m_{45} величина m_{12} не может превзойти ни $m_{123} - m_3$, ни $m_0 - m_{345}$, иначе станет невозможен либо распад (123) \rightarrow (12) + 3, либо распад $0 \rightarrow$ (12) + (345). Следовательно,

$$\mu_{12} \leq m_{12} \leq \min(m_{123} - m_3, m_0 - m_{345}) \quad (19)$$

А когда значение m_{12} в этих пределах выбрано, то задача вычисления границ m_{45} решается формулой (12).

$$(m_{45}^2)_{\max}^{\min} = m_{345}^2 + m_3^2 - 2\omega_{345} \omega_3 \pm 2\rho_{345} \rho_3 \quad (20)$$

где

$$\omega_{345} = \frac{m_0^2 - m_{12}^2 - m_{345}^2}{2m_{12}}, \quad \omega_3 = \frac{m_{345}^2 - m_{12}^2 - m_3^2}{2m_{12}} \quad (21)$$

С другой стороны, должно быть соблюдено и условие, аналогичное (19):

$$\mu_{45} \leq m_{45} \leq \min(m_{345} - m_3, m_0 - m_{123}) \quad (22)$$

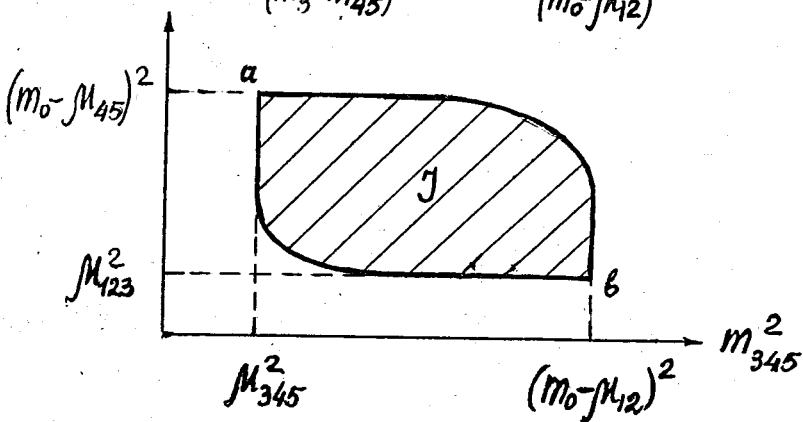
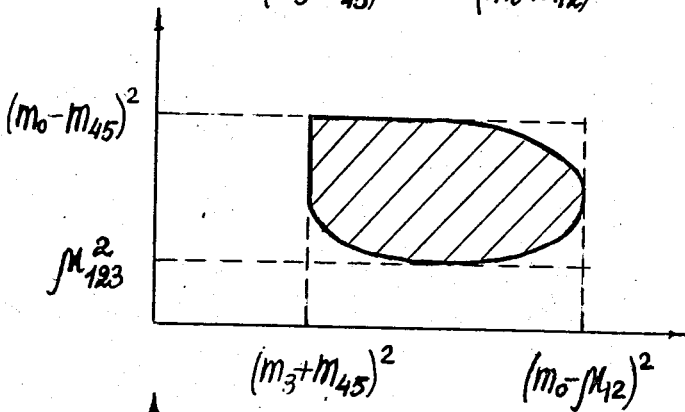
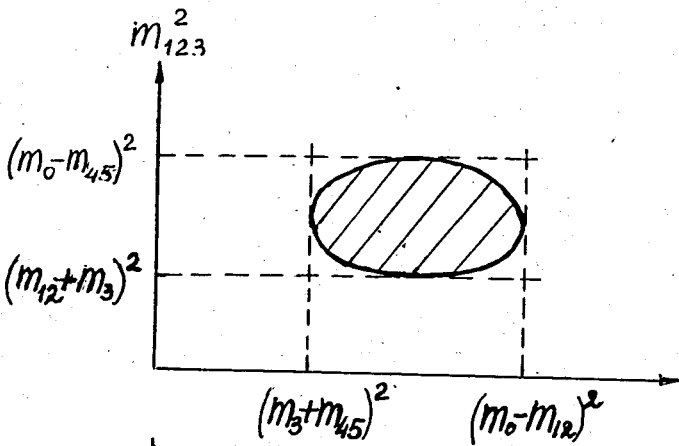


Рис.5.

Поэтому формулы (20) и (22) следует на всякий случай объединить в одну

$$\max(\mu_{45}, m_{45} \min_{45}) \leq m_{45} \leq \min(m_{45 \max}, m_{345} - m_3, m_0 - m_{123}). \quad (23)$$

Сходным образом можно рассчитать области изменения пар масс в более сложных системах.

Так, в распаде $0 \rightarrow 1+2+3+4+5+6$ область изменения (m_{1234}^2, m_{3456}^2) есть фигура Далица для распада на частицы с массами $m_1 + m_2$, $m_3 + m_4$ и $m_5 + m_6$, к которой добавлены углы a, b, c описанного вокруг нее прямоугольника. В распаде $0 \rightarrow 1+\dots+7$ область изменения (m_{1234}^2, m_{3456}^2) есть попросту прямоугольник, описанный вокруг фигуры Далица для распада системы с массами $(m_0 - m_7) \rightarrow (m_1 + m_2) + (m_3 + m_4) + (m_5 + m_6)$. Но четырехчастичные резонансы встречаются редко. Большой практический смысл имеет следующее утверждение, касающееся области изменения (m_{123}^2, m_{234}^2) в каскаде $0 \rightarrow 1+2+6 \rightarrow 3+4$.

Вычислим предварительно границы m и M изменения m_{23} в этом каскаде. Тогда искомая область (рис.6) ограничена двумя дугами и двумя отрезками: ABCD — фигура Далица для распада на частицы с массами m_1, m_2 и m_4 ; AF и ED — отрезки сторон описанного вокруг нее прямоугольника; FE — часть границы фигуры Далица при $m_{23} = M$. Сходным образом усложняются области I и в других рассмотренных выше системах, если распад происходит каскадом.

Литература

1. P.Nyborg, H.S.Song, W.Kerman, R.H.Good, *Phys. Rev.*, 140B, 915, 1965; P.Nyborg, *Phys. Rev.*, 140B, 921 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел

23 января 1969 года

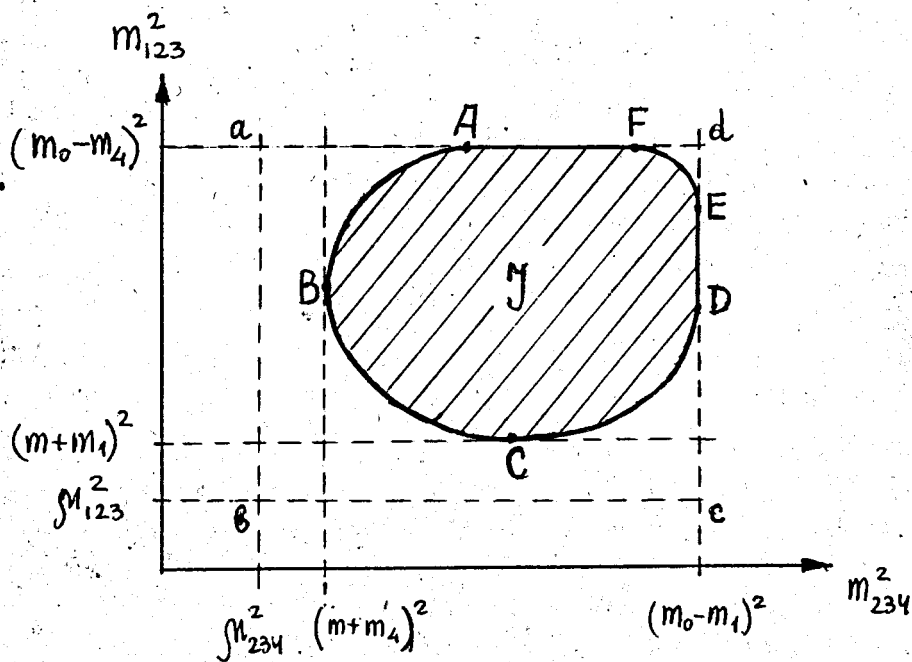


Рис. 6.