ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1 - 3268

Ю.М. Казаринов, В.С. Киселев, А.М. Розанова,
И.Н. Силин

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

ДИСКРИМИНАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПРИ БЛИЗКИХ ЗНАЧЕНИЯХ χ^2

1967.

P1 - 3268

Ю.М. Казаринов, В.С. Киселев, А.М. Розанова,
И.Н. Силин

ДИСКРИМИНАЦИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ ПРИ БЛИЗКИХ ЗНАЧЕНИЯХ χ^2

Проблема дискриминации рабочих гипотез приобретает весьма важное практическое значение в задачах определения амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния выше порога мезонообразования. Именно при этих энергиях недостаток экспериментального материала обычно приводит к тому, что результаты фазового анализа оказываются неоднозначными. Даже при двух наиболее хорошо изученных энергиях, 400 и 630 Мэв, существует по крайней мере по два набора фазовых сдвигов примерно равновероятных по χ^2-критерию /1/. Выбор наиболее вероятной гипотезы (или гипотез) с помощью достаточно строгого критерия позволит в этом случае правильно спланировать дальнейшие эксперименты и тем самым частично избавит от чрезвычайно сложных и дорогих опытов.

До сих пор в задачах такого типа оценка достоверности рабочей гипотезы в большинстве работ производилась по χ^2-критерию. Уже несколько лет тому назад, однако, в работе /2/ обращалось внимание на то, что в подобных случаях χ^2-критерий дает слишком слабую оценку. В связи с этим при сравнении двух гипотез со значениями $\chi^2 = M_1$ и M_2, соответственно, было предложено в качестве оценки вероятности ошибочно отбросить гипотезу 2 при $M_1 < M_2$ считать вероятность того, что при повторении эксперимента будет выполнено условие: $M_2 \leq M_1$. Позднее в работе /3/ путем моделирования повторения эксперимента с помощью метода Монте-Карло была оценена эта вероятность для двух решений в фазовом анализе при энергии 210 Мэв. В результате было показано, что одно из решений может быть отброшено с вероятной ошибкой меньше одного процента. Последующие эксперименты подтвердили этот результат.

В дальнейшем в работе /4/ было обращено внимание на то, что при выборе наиболее достоверной гипотезы нужно рассматривать лишь ситуации, сходные с реализовавшейся в эксперименте, и оценивать вероятность того, что бо́льшее значение χ^2 соответствует верной гипотезе. Несомненно то, что на этой основе может быть найден более сильный критерий, чем предложенный в работе [2]. Следует заметить, однако, что выражение, полученное в работе [4], для вероятности отбросить верную гипотезу 2

$$P = \frac{1}{L_1/L_2+1}, \tag{1}$$

где L_1 и L_2 – максимальные значения функции правдоподобия для первой и второй гипотезы, соответственно, может дать в случае гипотез, содержащих подгоняемые параметры, заниженную оценку. Это легко показать на довольно простых примерах.

Вопрос о дискриминации двух конкурирующих гипотез рассматривался также и в работе [5], однако удовлетворительных результатов применительно к задачам нашего типа получено не было. В данной работе мы предлагаем некоторое решение этой проблемы и практически применяем его для дискриминации решений в фазовом анализе на энергии 630 Мэв.

Сформулируем задачу.

Пусть мы имеем n измеренных значений $F_j \pm \sigma_j$ (ошибки распределены по нормальному закону и независимы). Согласно двум имеющимся гипотезам, экспериментальные значения, возможно, описываются одной из двух функций от целого аргумента j $(j=1,2,\dots,n)$, вообще говоря, содержащих неизвестные параметры a_k, x/

$$f_{1j}(a_1,\dots,a_{m_1}) \quad \text{и} \quad f_{2j}(a_1,\dots,a_{m_2}).$$

Требуется оценить вероятность того, что при отбрасывании второй гипотезы будет отброшена верная гипотеза.

В дальнейшем все рассмотрение будет проводиться в n-мерном евклидовом пространстве E_n, скалярное произведение определено как

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{j=1}^{n} r_{1j}\, r_{2j}\, w_j \quad \text{при} \quad w_j = \frac{1}{\sigma_j^2}. \tag{2}$$

---

x/ На самом деле в фазовом анализе приходится выбирать не между разными функциями f, а между разными областями параметров одной функции. Однако эта задача сводится к рассматриваемой.

Набор экспериментальных данных и гипотезы можно рассматривать как векторы $\vec{F}$, $\vec{f}_1(a_1, \ldots, a_{m_1})$ и $\vec{f}_2(a_1, \ldots, a_{m_2})$ в этом пространстве.

Применяются следующие обозначения.

Величины, отмеченные штрихом (например, $\vec{f}_2'$, Δ', M_2'), получены с помощью оптимизированных параметров a_k, т.е. параметров, полученных при подгонке гипотез под F_i.

Значок „э" внизу (например, $\Delta_э'$, $\vec{f}_{2э}'$) означает, что величина соответствует экспериментальным значениям F_i, т.е. $\vec{F}_э$, а не абстрактной выборке из генеральной совокупности.

Горизонтальная черта вверху (например, $\bar{\delta}$, $\bar{F}_i$) означает усреднение по генеральной совокупности всех возможных реализаций эксперимента.

$\sigma^2(x)$ – дисперсия, а $\sigma^2(x,y)$ – ковариация величин, стоящих в скобках. Выражение типа $P(A \geq B)$ понимается как вероятность того, что $A \geq B$. Для краткости вместо $\vec{f}(a_1, \ldots, a_m)$ будем писать $\vec{f}(a)$.

Для решения нашей задачи можно применить прием, аналогичный сравнению одной гипотезы с экспериментальными данными по χ^2-критерию. А именно: мы можем построить некоторый функционал $T(\vec{F}, \vec{f}_1(a), \vec{f}_2(a))$ и оценить распределение вероятности $p_T(T)$ (T – функция случайного вектора $\vec{F}$) в предположении, что верна гипотеза $\vec{f}_2(a)$. И если значение T, соответствующее $\vec{F}_э$, маловероятно в интегральном смысле по сравнению с допустимым согласно $p_T(T)$, то гипотеза $\vec{f}_2(a)$ маловероятна. В зависимости от того, насколько удачен выбор T, оценка будет более или менее сильной.

В качестве такого функционала естественно взять разность значений χ^2 гипотез $\Delta' = M_2' - M_1'$ x/. Это соответствует духу принципа максимума правдоподобия.

Будем решать задачу в два этапа xx/.

---

x/ В общем случае метода максимума правдоподобия $\Delta' = 2(\ln L_1' - \ln L_2')$.

xx/ Распределение $p_{\Delta'}(\Delta')$ можно пытаться получить прямо, например, методом Монте-Карло, однако при этом, вообще говоря, придется разыгрывать не только $\vec{F}$ относительно модели точного решения, но и модель точного решения $\vec{f}_2$ относительно $\vec{f}_{2э}$ в соответствии с его ошибками. Однако корректность такой процедуры надо еще доказать.

Сначала получим оценку вероятности ошибки первого рода для случая гипотез, не содержащих неизвестных параметров, $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ x/. Затем используем результат для решения более общей задачи, когда гипотезы содержат подгоняемые параметры, но линейно зависят от них. При этом удается, как будет видно ниже, построить мажорированную оценку вероятности ошибки первого рода, учитывающую возможность дополнительной флюктуации разности минимумов χ^2 гипотез за счёт неизвестных параметров. На этой оценке не сказывается наше незнание истинной гипотезы.

Построим в пространстве E_n полную систему ортонормированных векторов $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ с одним условием:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_2 - \vec{f}_1}{|\vec{f}_2 - \vec{f}_1|} \tag{3}$$

Разложим векторы $\vec{F} - \vec{f}_1$ и $\vec{F} - \vec{f}_2$ по системе этих векторов:

$$\vec{F} - \vec{f}_1 = \sum_{k=1}^{n} t_{1k}\vec{e}_k; \qquad \vec{F} - \vec{f}_2 = \sum_{k=1}^{n} t_{2k}\vec{e}_k .$$

Тогда

$$M_1 = |\vec{F} - \vec{f}_1|^2 = \sum_{k=1}^{n} t_{1k}^2; \; M_2 = |\vec{F} - \vec{f}_2|^2 = \sum_{k=1}^{n} t_{2k}^2 . \tag{4}$$

Будем предполагать, что $M_2 \geq M_1$.

$$t_{sk} = \sum_{j=1}^{n} (F_j - f_{sj}) e_{kj} w_j \qquad (s = 1,2;\; k = 1,\dots,n).$$

t_{sk} распределены нормально, так как они линейные функции нормально распределенных F_j. Вычислим матрицы ошибок

$$\sigma^2(t_{sk}, t_{si}) \qquad (s = 1,2;\quad k,i = 1,\dots,n).$$

$$\sigma^2(t_{sk}, t_{si}) = \overline{\Delta t_{sk} \cdot \Delta t_{si}} = \sum_{j,\ell=1}^{n} \overline{\Delta F_j \cdot \Delta F_\ell}\, e_{kj}\, e_{i\ell}\, w_j\, w_\ell =$$

$$= \sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\delta_{\ell j}}{w_j} e_{kj}\, e_{i\ell}\, w_j\, w_\ell = \sum_{j=1}^{n} e_{kj}\, e_{ij}\, w_j = \delta_{ki}. \tag{5}$$

---

x/ В этом случае наш подход эквивалентен применению критерия Неймана-Пирсона (см. работу /5/, стр. 37).

δ_{kl} возникает в силу независимости погрешностей F_j и ортонормированности $\vec{e}_k$. Таким образом, для каждой из гипотез t_{sk} независимы и имеют единичные дисперсии. Это довольно известный факт равномерного распределения шумов по степеням свободы. Здесь существенно использовано то, что $\vec{e}_k$ и $\vec{f}_s$ не зависят от F_j. В противном случае формула (5) неверна, т.к. нужно учитывать дисперсию $\vec{e}_k$ и $\vec{f}_s$.

Докажем теперь, что $t_{1k} = t_{2k}$ при $k \neq 1$. Действительно,

$$t_{1k} - t_{2k} = \sum_{j=1}^{n} (F_j - f_{1j}) e_{kj} w_j - \sum_{j=1}^{n} (F_j - f_{2j}) e_{kj} w_j = \qquad (6)$$

$$= \sum_j (f_{2j} - f_{1j}) e_{kj} w_j = \delta_{k1} | \vec{f}_2 - \vec{f}_1 |$$

вследствие (3) и ортогональности $\vec{e}_k$.

Таким образом, мы получили важный результат: разность χ^2 двух фиксированных гипотез полностью определяется составляющими шумов в первой гармонике, дисперсии которых равны единице. Причём $t^2_{21_э} \geq \Delta_э$. Кроме того, для верной гипотезы $\bar{t}_{sk} = 0$.

Обозначим $|\bar{\Delta}| = | \vec{f}_2 - \vec{f}_1 |^2$. Из /7/ и /6/ следует, что

$$\Delta = M_2 - M_1 = -|\bar{\Delta}| - 2\sqrt{|\bar{\Delta}|}\, t_{21} . \qquad (9)$$

Как и следовало ожидать, при предположении, что верна 2-я гипотеза, Δ должно быть в среднем отрицательным. Оценим вероятность того, что Δ окажется положительным и не меньшим, чем $\Delta_э$.

$$p_\Delta(\Delta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi|\bar{\Delta}|}} \exp\left(-\frac{(\Delta + |\bar{\Delta}|)^2}{8|\bar{\Delta}|}\right), \qquad (10)$$

$$P(\Delta \geq \Delta_э) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{(\Delta_э + |\bar{\Delta}|)}{2\sqrt{|\bar{\Delta}|}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt . \qquad (11)$$

Находя максимум правой части по $|\bar{\Delta}|$ (он находится при $|\bar{\Delta}| = \Delta_э$), имеем

$$P(\Delta \geq \Delta_э) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\Delta_э}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}(1 - \Phi(\sqrt{\Delta_э})) = \frac{1}{2} P(\chi_1^2 \geq \Delta_э), \qquad (12)$$

χ_1^2 есть χ^2 с одной степенью свободы.

Хотя для случая фиксированных гипотез нетрудно вычислить и (11), формула (12) понадобится нам в дальнейшем, когда $\bar{\Delta}$ будет неизвестно.

Перейдем к случаю гипотез с неизвестными параметрами. Нам нужно вычислить $p_{\Delta'}(\Delta')$ в предположении, что $\vec{f}_2(a)$ – верная гипотеза. Оказывается, что для этого выгодно представить движение Δ' при случайном изменении $\vec{F}$ как суперпозицию двух движений. Движения Δ относительно $\bar{\Delta}$ для двух фиксированных гипотез $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ (некоторых частных значений $\vec{f}_1(a)$ и $\vec{f}_2(a)$) с распределением $p_{\Delta}(\Delta)$ и движения Δ' относительно Δ при переходе от $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ посредством оптимизации по a к $\vec{f}_1'$ и $\vec{f}_2'$ с распределением $p_{\delta}(\Delta'-\Delta) = p_{\delta}(\delta)$.

Гипотезы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ будем мыслить следующими. Представим себе, что эксперимент повторен бесконечное число раз, усреднен и по суммарной статистике подогнаны параметры в $\vec{f}_1(a)$ и $\vec{f}_2(a)$. Тогда мы получим две фиксированные функции: $\vec{f}_1'$ и $\vec{f}_2$. Причём, если верна 2-я гипотеза, то $\vec{f}_2$ будет давать точные значения измеряемых величин, а $\vec{f}_1$ будет совпадать с подогнанной под $\vec{f}_2$ гипотезой $\vec{f}_1(a)$ потому, что $\bar{F}_j = f_{2j}$. $\Delta' = \Delta + (\Delta' - \Delta) = \Delta + \delta$. Зная распределение $p_{\Delta}(\Delta)$ и $p_{\delta}(\delta)$, можно оценить $p_{\Delta'}(\Delta')$.

Прежде всего сформулируем два следующих утверждения.

1) При линейной зависимости $\vec{f}_1(a)$ и $\vec{f}_2(a)$ от параметров существует такое A, что для всех $\Delta_э' \geq A$ вероятность $P(\Delta' \geq \Delta_э')$, вычисленная в предположении некоррелированности Δ и δ, не меньше, чем точное значение $P(\Delta' \geq \Delta_э')$ с учетом корреляции[x/].

Действительно,

$$\delta = \Delta' - \Delta = (M_2' - M_1') - (M_2 - M_1) = (M_1 - M_1') - (M_2 - M_2'). \qquad (13)$$

Согласно (7) Δ определяется гармоникой $\vec{e}_1$. Вследствие того, что $\vec{f}_1$ есть подогнанная под $\vec{f}_2$ гипотеза $\vec{f}_1(a)$,

$$\frac{\partial |\vec{f}_2 - \vec{f}_1(a)|^2}{\partial a_k}\Big|_{\vec{f}_1(a)=\vec{f}_1} = -2\left(\vec{f}_2 - \vec{f}_1, \frac{\partial \vec{f}_1(a)}{\partial a_k}\right) = 0.$$

[x/] Использование этого утверждения позволит нам построить оценку $P(\Delta' \geq \Delta_э')$, удобную для вычислений, так как практический интерес представляют случаи, когда $\Delta_э'$ достаточно велико, чтобы малость $P(\Delta' \geq \Delta_э')$ позволяла сделать вывод о маловероятности гипотезы 2.

Следовательно,

$$\left(\vec{e}_1, \frac{\partial \vec{f}_1(a)}{\partial a_k}\right) = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial}{\partial a_k}\left(\vec{F} - \vec{f}_1(a), \vec{e}_1\right) = \frac{\partial t_{11}(a)}{\partial a_k} = 0.$$

Т.е. вклады гармоники $\vec{e}_1$ в M_1 и в M_1' одинаковы. Поэтому $M_1 - M_1'$ определяется независимыми от $\vec{e}_1$ гармониками $\vec{F} - \vec{f}_1$ и не коррелировано с Δ. Согласно (9) Δ есть функция t_{21}. Если среди генеральной совокупности всех возможных реализаций эксперимента мы отберем лишь события с $t_{21}^2 > 1$, то среднее M_2 по таким событиям будет превышать n (среднее по всем выборкам). Поэтому и среднее $M_2 - M_2'$ по таким событиям будет превышать $M_2 - M_2'$, если t_{21} и δ коррелированы. Это приводит к уменьшению вероятности больших значений δ по сравнению с вероятностью на генеральной совокупности (это можно строго показать, оперируя с ортонормированными гармониками).

Среди событий с большими значениями $\Delta' = \delta + \Delta$ процент событий с $t_{21}^2 > 1$ должен быть повышенным, так как особенно большие значения Δ' получаются, когда одновременно велики δ и Δ. Поэтому понижение вероятности больших значений δ (за счёт корреляции с t_{21} при больших значениях t_{21}^2) по сравнению со случаем без корреляций должно приводить к уменьшению $P(\Delta' \geq \Delta_э')$ при достаточно большом $\Delta_э'$. Доказательство этого момента может быть проведено строго, если предположить, что $|p_\delta(\delta) - p_\delta(\delta|t_{21}^2)|$ есть невозрастающая функция δ при достаточно больших δ и учесть, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t_{21}^2}{2}} p_\delta(\delta | t_{21}^2)\, dt_{21} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t_{21}^2}{2}} p_\delta(\delta | t_{21}^2)\, dt_{21} = p_\delta(\delta). \quad (13a)$$

Здесь $p_\delta(\delta | t_{21}^2)$ – распределение δ при фиксированном t_{21}^2.

Для убедительности приведем пример, когда утверждение 1) выполняется с очевидностью. Пусть множество значений $\vec{f}_1(a)$ есть подмножество $\vec{f}_2(a)$. Тогда всегда $M_2' - M_1' = \Delta' \leq 0$, в то время как в предположении независимости Δ и δ отлична от нуля вероятность сколь угодно больших Δ' при $\bar{\Delta} \neq 0$. Отметим, что в обратном случае, когда $\vec{f}_2(a)$ есть подмножество $\vec{f}_1(a)$, $\bar{\Delta} = 0$ и $\Delta' = \delta$, так как в предположении, что верна гипотеза $\vec{f}_2(a)$, $\vec{f}_1 = \vec{f}_2$.

2) В линейной задаче, для заданных $\vec{f}_1(a)$ и $\vec{f}_2(a)$, $p_\delta(\delta)$ не зависит от того, каково точное решение задачи и совпадает ли оно или нет с каким-либо частным значением $\vec{f}_2(a)$ или $\vec{f}_1(a)$ x/. Действительно, пусть точное решение задачи есть $\vec{f}$. $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ есть $\vec{f}_1(a)$ и $\vec{f}_2(a)$, подогнанные под $\vec{f}$. Построим, как и раньше, полную систему ортонормированных $\vec{e}_k$. Однако вектора $\vec{e}_2, \dots \vec{e}_{m_1+1}$ получим ортогонализацией $\frac{\partial \vec{f}_2(a)}{\partial a_k}$ $(k = 1, \dots, m_1)$.
Вектор $\vec{e}_1 = \frac{\vec{f} - \vec{f}_1}{|\vec{f} - \vec{f}_1|}$, если $\vec{f} \neq \vec{f}_1$, в противном случае $\vec{e}_1$ – произвольный (но удовлетворяющий требованию ортонормированности системы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$). Как и в пункте 1), можно показать, что $\left(\frac{\partial \vec{f}_1(a)}{\partial a_k}, \vec{e}_1\right) = 0$, поэтому ортогонализованные $\frac{\partial \vec{f}_1(a)}{\partial a_k}$ ортогональны к $\vec{e}_1$. Тогда для $2 \le k \le m_1 + 1$

$$t_{1k} = (\vec{F} - \vec{f}_1, \vec{e}_k) = (\vec{F} - \vec{f}_1, \vec{e}_k) - (\vec{f} - \vec{f}_1, \vec{e}_k) = (\vec{F} - \vec{f}, \vec{e}_k) \equiv t_k .$$

Т.е. t_{1k} получаются одинаковыми для любых $\vec{f}$ при постоянном $\vec{F} - \vec{f}$.
Но

$$M_1 - M_1' = \sum_{k=2}^{m_1+1} t_{1k}^2 = \sum_{k=2}^{m_1+1} t_k^2 ,$$

т.к. в силу способа построения $\vec{e}_k$, $t_{12} \dots t_{1m_1+1}$ и $a_1 \dots a_{m_1}$ связаны линейно и взаимнооднозначно и минимум M_1' достигается при $t_{12}' \dots t_{1m_1+1}'$, равных нулю. Следовательно, $M_1 - M_1'$ также не зависит от $\vec{f}$. Аналогично доказывается, что $M_2 - M_2'$ не зависит от $\vec{f}$. Откуда в силу (13) и δ не зависит от $\vec{f}$.

Оценим теперь интересующую нас вероятность.
Принимая на основании пункта 1, что Δ и δ – независимы, имеем

$$p_{\Delta'}(\Delta') = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\Delta(\Delta' - \delta)\, p_\delta(\delta)\, d\delta ,$$

---

x/ Для простоты предполагаем, что число параметров m_1 и m_2 меньше числа экспериментальных точек n, $\frac{\partial \vec{f}_1(a)}{\partial a_k}$ линейно независимы и $\frac{\partial \vec{f}_2(a)}{\partial a_k}$ также линейно независимы.

откуда

$$P(\Delta' > \Delta'_э) = \int_{\Delta'_э}^{\infty} d\Delta' \int_{-\infty}^{+\infty} p_\Delta(\Delta' - \delta)\, p_\delta(\delta)\, d\delta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p_\delta(\delta)\, d\delta \int_{\Delta'_э}^{\infty} p_\Delta(\Delta' - \delta)\, d\Delta' = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\delta(\delta)\, d\delta \int_{\Delta'}^{\infty} p_\Delta(\Delta)\, d\Delta = \tag{14}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p_\delta(\delta) \cdot \overline{P(\Delta \geq \Delta'_э} - \delta)\, d\delta\ .$$

Формула (14) легко мажорируется, согласно (12).

$$\text{Для}\quad \Delta'_э - \delta \geq 0 \qquad P(\Delta \geq \Delta'_э - \delta) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\sqrt{\Delta'_э - \delta}\right)\right);$$

$$\text{для}\qquad \Delta'_э - \delta < 0 \qquad P(\Delta \geq \Delta'_э - \delta) \leq 1\ . \tag{15}$$

Мы получили мажорированную оценку вероятности ошибки первого рода, на которой в линейном случае не сказывается незнание точной гипотезы $\vec{f}$ Можно думать, что эта оценка будет удовлетворительной и в случае квазилинейной зависимости гипотез от неизвестных параметров, если в качестве модели $\vec{f}_2$ брать оценку, не слишком удаленную от $\vec{f}_2$.

Вероятность $p_\delta(\delta)$, в принципе, в линейном случае может быть вычислена (а в квазилинейном случае оценена) аналитически, ценой несложных, но громоздких выкладок в духе тех, которые делались при доказательстве пункта 2). При этом оказывается, что

$$\bar{\delta} = m_1 - m_2\ , \tag{16}$$

$$2|m_2 - m_1| \leq \sigma^2(\delta) \leq 2(m_2 + m_1)\ . \tag{17}$$

В случае левого равенства в (17) распределение δ совпадает с распределением

$$\chi^2_{|m_2 - m_1|}{}^{\mathrm{sign}(m_1 - m_2)}\ .\ ^{x/}$$

Этот случай достигается, когда либо линейная оболочка $\dfrac{\partial \vec{f}_1(a)}{\partial a_k}$ $(k = 1, \dots, m_1)$

---

x/ При $m_1 = m_2$ переходит в δ – функцию Дирака.

является подмножеством линейной оболочки $\frac{\partial \vec{f}_2(a)}{\partial a_k}$ $(k = 1, \dots, m_2)$, либо наоборот.

В случае правого равенства в (17) распределение δ совпадает с распределением разности двух независимых χ^2, а именно: $\chi^2_{m_1} - \chi^2_{m_2}$ x/. Этот случай достигается, когда линейные оболочки $\frac{\partial \vec{f}_1(a)}{\partial a_k}$ и $\frac{\partial \vec{f}_2(a)}{\partial a_k}$ ортогональны друг другу x/.

Обычно оценка (14) отдает предпочтение гипотезе с меньшим χ^2. Однако если $\bar{\delta}$ смещено относительно нуля, предпочтение может иногда отдаваться гипотезе с бо́льшим χ^2. Смещение $\bar{\delta}$ могут вызвать три фактора: разное число параметров в гипотезах (см.(16)), ограничения типа неравенства на область изменения параметров, нелинейные эффекты.

Прежде чем приступить к непосредственному изложению практической процедуры, применявшейся нами для дискриминации решений в фазовом анализе, обратим внимание на следующую особенность этой задачи. В отличие от гипотез, определяемых независимыми выражениями, в этом случае разные гипотезы соответствуют просто разным минимумам χ^2, соответствующим одной и той же функции $\vec{f}(a)$. Поэтому есть вполне определенная вероятность того, что при повторении эксперимента один из минимумов исчезнет, что особенно вероятно, если минимумы отделены друг от друга невысоким барьером. Однако коренного различия между этими случаями нет. Дело в том, что при $m_1 = m_2$ всегда можно построить такую функцию $\vec{f}(a)$, которая ведет себя, как $\vec{f}_1(a)$ в одной обширной области изменения параметров и как $\vec{f}_2(a - c)$ – в другой области. И наоборот, в случае одной функции $\vec{f}(a)$ можно разделить область изменения параметров a на две области (например, по водоразделу между решениями) и рассматривать $\vec{f}(a)$ на каждой из областей как независимую гипотезу (при этом во время подгонки одной гипотезы должен быть наложен запрет на переход

---

x/ Именно на примерах последнего типа особенно просто демонстрируется неприемлемость формулы (1) в случае гипотез с подгоняемыми параметрами. Для случая же фиксированных гипотез наша оценка (14), (15), несмотря на мажорированность, заметно сильнее, чем /1/, что связано с более быстрым затуханием $1 - \Phi(t)$ по сравнению с $e^{-t^2/2}$, особенно при больших t.

в другую область параметров). Однако последнее сложно технически и не вполне однозначно. Судя по всему, при получении вероятности $p_\delta(\delta)$ можно просто не рассматривать ситуации, в которых отсутствует хотя бы одно решение. Этот вопрос, возможно, и требует дополнительного изучения, однако ясно, что при малой вероятности исчезновения решений этим эффектом можно пренебречь.

В качестве вполне доступного метода получения $p_\delta(\delta)$ мы предлагаем метод Монте-Карло. Возьмем некоторую модель точного решения $\vec{f}$. $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ получим из условия минимума $|\vec{f} - \vec{f}_1(a)|^2$ и $|\vec{f} - \vec{f}_2(a)|^2$. Далее будем моделировать измерение, разыгрывая $\vec{F}$ относительно $\vec{f}$ с нормальным распределением $(\bar{F}_j = f_j, \sigma^2(F_j) = \sigma_j^2)$. Для каждого такого псевдоэксперимента будем вычислять

$$M_1 = |\vec{F} - \vec{f}_1|^2, \; M_2 = |\vec{F} - \vec{f}_2|^2 \quad \text{и} \quad M_1' = \min_a |\vec{F} - \vec{f}_1(a)|^2,$$

$$M_2' = \min_a |\vec{F} - \vec{f}_2(a)|^2 .$$

Тогда $M_2 - M_1$ будет моделировать Δ и $M_2' - M_1'$ будет моделировать Δ'. Набирая статистику по псевдоэкспериментам, получим $p_\delta(\Delta' - \Delta)$. При этом (14) мы также можем оценивать методом Монте-Карло, используя, конечно, (15), по формуле

$$P(\Delta' \geq \Delta'_э) = \frac{1}{N} \sum_{\xi=1}^{N} P(\Delta \geq \Delta'_э - \delta_\xi). \tag{18}$$

Здесь δ_ξ есть значение $\Delta' - \Delta$ для ξ-го псевдоэксперимента.

Время, необходимое для такого моделирования, может быть сведено к совершенно незначительному, если разыгрывание δ_ξ вести на линеаризованных гипотезах

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_k \frac{\partial \vec{f}_1(a)}{\partial a_k}\bigg|_{\vec{f}_1(a) = \vec{f}'_{1э}} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m_2} a_k \frac{\partial \vec{f}_2(a)}{\partial a_k}\bigg|_{\vec{f}_2(a) = \vec{f}'_{2э}}$$

Однако в данной работе мы разыгрывали точные гипотезы.

Согласно пункту 2), мы имеем некоторую свободу в выборе модели точного решения $\vec{f}$. Самое простое – это $\vec{f} = \vec{F}_э$. Тогда $\vec{f}_1 = \vec{f}'_{1э}$, $\vec{f}_2 = \vec{f}'_{2э}$. Вообще же говоря, так как $P(\Delta' \geq \Delta'_э)$ мы оцениваем в предположении, что верна $\vec{f}_2(a)$, лучше брать $\vec{f} = \vec{f}'_{2э}$. Но если есть несколько решений, то, как правило, нужно сравнивать все решения с одним, самым лучшим. И чтобы не разыгрывать много моделей, удобно брать $\vec{f} = \vec{f}'_{1э}$. Розыгрыш модели $\vec{f} = \vec{F}_э$ в нелинейной задаче более трудоемок, так как разброс F_j получается увеличенным, что ухудшает сходимость метода линеаризации /6/.

Изложенный метод был применен к фазовому анализу нуклон-нуклонного рассеяния на энергии 630 Мэв. В качестве модельных вначале были выбраны значения экспериментальных величин, вычисленные по фазовым сдвигам лучшего из решений – решения 2 (нумерация решений соответствует /1/). Разыгрывание повторялось 17 раз (табл. 1). Правда, в дальнейшем оказалось, что при подгонке 1-го решения под вычисленный числовой материал (для получения $\vec{f}_1$) оно исчезло и перешло в новое решение. Когда полученные параметры были взяты в качестве начального приближения для подгонки под $\vec{F}_э$, было найдено не обнаруженное раньше решение 3 с $\chi^2 = 208,2$ (табл. 2), меньшим, чем у решения 1. Так что полученное распределение $p_\delta(\delta)$ относилось именно к новому решению. При этом (18) и (15) дает $P(\Delta' \geq \Delta'_э) \leq (0,13 \pm 0,08)\%$. Ошибка определяется набранной статистикой по псевдоэкспериментам и в принципе может быть сделана сколь угодно малой. Кроме того, для оценки погрешности $p_\delta(\delta)$ было проведено моделирование при $\vec{f} = \vec{F}_э$. Набрана статистика 8 случаев. Результаты близки к предыдущим.

Проверка решения 1 проводилась только при $\vec{f} = \vec{F}_э$, потому что, как мы уже говорили, в первой модели оно исчезло. Сходимость была очень плохой, так что получение большой статистики было затруднительным. В двух попытках из сделанных шести решение 1 исчезало, сходясь к 3-му, что, в частности, проявлялось в аномально большом $\Delta' - \Delta$ в этих случаях. Собственно говоря, именно здесь мы впервые заподозрили существование решения 3. (18) и (15) для четырех успешных псевдоэкспериментов дает для первого решения $P(\Delta' \geq \Delta'_э) \leq (0,08 \pm 0,08)\%$. Если предположить, что распределение $p_\delta(\delta)$ симметрично, то статистика может быть как бы удвоена и $P(\Delta' \geq \Delta'_э) \leq (0,19 \pm 0,14)\%$. Несмотря на то, что χ^2 для решения 1 больше, чем для решения 3, вероятность решения 1 – того же порядка, что и решения 3. Хотя статистика при проверке решения 1 и мала, полученные $\delta_{\xi} = \Delta'_{\xi} - \Delta_{\xi}$ наглядно показывают, что распределение $p_{\delta}(\delta)$ для решения 1 много шире, чем для решения 3. Таким образом, судя по полученным вероятностям, решения 1 и 3 можно отбросить с ошибкой < 1%. Добавление новых экспериментальных данных, полученных в работе /8/, не изменяет результатов проведенного анализа.

Отбрасывание решений 1 и 3 не гарантирует то, что верно решение 2, а не какое-либо еще не найденное решение.

В заключение отметим, что полученные нами результаты существенно отличны от приведенных в работе /7/. В ряде случаев результаты /7/ более сильны. Это связано с тем, что в /7/ решается другая задача. Производится выбор не между взаимоисключающими гипотезами, из которых реально может реализоваться лишь одна, а между несколькими классами действительно реализуемых событий. При этом предполагаются априорные сведения как о частоте всречаемости классов, так и о распределении событий внутри каждого из классов. Проявляющаяся в данной работе из-за наличия неизвестных параметров дополнительная неоднозначность в работе /7/ в значительной мере компенсируется тем фактом, что измеренные экспериментальные данные обычно могут реализоваться за счёт большего числа представителей того класса, для которого меньше χ^2.

Авторы благодарны А.А.Тяпкину и В.А.Морозу за полезную дискуссию. Авторы благодарны А.Пазману и В.В.Федорову за детальное обсуждение работы и критические замечания.

Литература

1. Z. Ianout, Yu. M. Kazarinov, F. Lehar, A.F. Pisarev, Yu.N. Simonov. Препринт ОИЯИ, Е-2560, Дубна, 1966.
2. Ю.М.Казаринов, И.Н.Силин. ЖЭТФ, 43, 692-701 (1962).
3. Ю.М.Казаринов, И.Н.Силин. ЖЭТФ, 43, 1385-1393 (1962).
4. А.А.Тяпкин. Препринт ОИЯИ, Е-2353, Дубна, 1965.
5. А.Вальд. Последовательный анализ. Физматгиз, Москва, 1960.
6. С.Н.Соколов, И.Н.Силин. Препринт ОИЯИ, Д-810, Дубна, 1961.
7. В.И.Мороз, А.В.Никитин, Ю.А.Троян, Б.А.Шахбазян. Препринт ОИЯИ, Р-10-2935, Дубна, 1966 (Направлено в ЯФ).

8. Р.Я.Зулькарнеев, В.С.Киселев, В.С.Надеждин, В.И.Сатаров.Препринт ОИЯИ, Е-1-31-94, Дубна, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 апреля 1967 года.

Т а б л и ц а I

Результаты моделирования эксперимента

№ по-пыт-ки	I набор	3 набор	3 набор
	модель $\vec{f} = \vec{F}_{э}$	модель $\vec{f} = \vec{f}_{-2э}$	модель $\vec{f} = \vec{F}_{э}$
	$\delta = (M'_1 - M'_2) - (M_1 - M_2)$	$\delta = (M'_3 - M'_2) - (M_3 - M_2)$	$\delta = (M'_3 - M'_2) - (M_3 - M_2)$
I		-7,8	
2		-0,37	-I,8I
3	+II,56	+7,I3	+3,88
4		-7,05	-6,40
5	-I3,94	-4,44	-6,22
6		+0,97	+4,I4
7		-0,77	
8		-4,8I	
9		+8,56	+6,37
I0	- 3,2I	+4,37	-6,26
II	- I,86	+4,54	-5,75
I2		-I,I9	
I3		-3,96	
I4		+0,05	
I5		-I,76	
I6		+2,57	
I7		-5,78	

$x_2^1 - x_2^2 = 19,10$

$x_3^2 - x_2^2 = 13,56$