

С 346.6Г

К-659

12/7-66

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P1 - 3048



Г.И. Копылов

ПАРЫ  $\Lambda_u$  И РЕЗОНАНС  $\Lambda_u$

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1966

P1 - 3043

Г.И. Копылов

ПАРЫ  $\lambda_{\gamma}$  И РЕЗОНАНС  $\lambda_{\gamma}$

4715/1,  $\mu\phi$   
4167/1,  $\mu\phi$

Общероссийский институт  
ядерной физики  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

G.I. Kopylov  
 $\Lambda\gamma$ -PAIRS AND  $\Lambda\eta$ -RESONANCE

A b s t r a c t

The uniqueness

The uniqueness of the treating of the peak in the  $\Lambda\gamma$ -mass spectrum (in the interval 1.3-1.4 GeV) as the reflection of the  $\Lambda\eta$  resonance is discussed. For this purpose the  $\Lambda\gamma$ -mass spectra of other possible resonances or other decay modes were calculated. The main results are contained in the following formulae and figures.

D e c a y	§	F o r m u l a	F i g u r e
$X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma$	1	(1.3)	
$X \rightarrow \gamma Y \rightarrow \gamma \Lambda^0 \gamma$	1	(1.11)	
$X \rightarrow \Lambda\gamma$	1		
$X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\pi\pi$	2	(2.19)	3
$X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\pi\pi$	2		3
$X \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma\gamma$	3	(3.13)	5
$X \rightarrow \Sigma^0 \eta^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma\gamma$	3		5
$X \rightarrow \Lambda^0 \omega^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma\gamma$	4	(4.3),(4.12)	9
$X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0 \gamma\gamma \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma\gamma\gamma$	4	(4.17)	9
$X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0 \pi\pi \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma\pi\pi$	4		9
$X \rightarrow \Lambda^0 \pi^0 \pi^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma\pi^0$	5	(5.9),(5.15)	9
$X \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \pi^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma\pi^0$	6	(6.3),(6.14)	13

We come to the following conclusions. The existence of the  $\Lambda\eta$ -resonance with the mass slightly above  $m_\eta + m_\Lambda$  is the most reliably explanation of the  $\Lambda\gamma$ -peak. The decays  $X \rightarrow \Sigma^0 \eta^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma\gamma\gamma$  ( $m_X = m_\Sigma + m_\eta$ ),  
 $X \rightarrow \Lambda^0 \gamma$  ( $m_X = 1.425$  GeV) or  $Y_1^*(1660) \rightarrow Y_1^*(1385) + \gamma \rightarrow \Lambda^0 \pi^0 \gamma$

give the  $\Lambda\gamma$ -mass spectrum not too far from experimentally observed one. The other possibilities are ruled out, especially all the resonances decaying into  $\Lambda\pi^0$

Резонанс в системе  $\Lambda\eta$  был предсказан Иoffe<sup>/1/</sup> и обнаружен в Дубне<sup>/2,3/</sup>. С тех пор он был подтвержден тремя группами исследователей<sup>/4-8/</sup>. Особенностью работ<sup>/2,5/</sup> является то, что резонанс  $\Lambda\eta$  в них был обнаружен косвенным методом - не по спектру эффективных масс пар  $\Lambda\eta$ , но по спектру эффективных масс пар  $\Lambda\gamma$ . В этом спектре наряду с пиком в  $m_{\Sigma_0}^2$  наметился пик в области 1,7-2,0 Гэв<sup>2</sup>, что было истолковано как отражение  $\Lambda\eta$ -резонанса на спектр  $\Lambda\gamma$ . По положению краев пика была оценена масса резонанса  $\Lambda\eta$  и масса частицы - источника фотонов; оба числа оказались в разумном согласии: первое - с предсказаниями Иoffe, второе - с табличным значением  $m_\eta$ .

Косвенный путь, каким был открыт резонанс, ставит наряду с обычной проблемой статистической обеспеченности пика новую проблему - надежности истолкования максимума в  $m_{\Lambda\gamma}^2$  как отражения резонанса в системе  $\Lambda\eta$ . Даже если поверить в то, что пик в  $m_{\Lambda\gamma}^2$  - не случайный выброс, то какая гарантия того, что большая часть пар  $\Lambda\gamma$  в области пика появилась от распада  $\Lambda\eta$ ? В работах<sup>/2,4/</sup> был приведен рассчитанный при помощи метода Монте-Карло<sup>/7/</sup> примерный вид спектров  $m_{\Lambda\gamma}^2$  от других мыслимых типов распада, приводящих к рождению частиц  $\Lambda$  и  $\gamma$ ; из этих расчетов было ясно, что никакие другие типы распада не приведут к пику в спектре  $m_{\Lambda\gamma}^2$  в нужной области масс. Однако были рассмотрены не все типы распада. Кроме того, метод Монте-Карло давал слабое представление о форме спектра.

В настоящей работе проводится аналитический расчет спектров  $m_{\Lambda\gamma}^2$ . Рассмотрено большее число "конкурирующих" мод распада. Для этого пришлось развить более или менее общий метод расчета спектров эффективных масс в каскадах распадов. Здесь, впрочем, за недостатком места сам метод излагаться не будет, вместо этого будут проделаны для каждого типа распада под-

робные выкладки, которые послужат в другой работе обоснованию общего метода. Численные расчеты будут проводиться для распадов, кончающихся рождением  $\Lambda \gamma$ . Те, кому выкладки не интересны, могут в последнем параграфе ознакомиться с результатами - графиками спектров  $m_{\Lambda \gamma}^2$ . Рассмотрение их приводит к выводу, что резонанс  $\Lambda \eta$  - самое естественное объяснение всплеска частоты значений массы  $m_{\Lambda \gamma}^2$  в области 1,7 - 2,0 Гэв<sup>2</sup>, если считать, конечно, этот всплеск статистически достоверным.

### § 1. Распад $\chi \rightarrow \Lambda^0 \eta^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma \gamma$ и обозначения

Здесь повторяются результаты работы /8/, так как они являются отправными для дальнейших, более сложных расчетов.

Пусть происходит распад  $5 \rightarrow 14$ . Фазовый объем состояний в пространстве импульсов частиц 1,2,3 будет

$$S_3 = \int \prod_1^3 d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta^4 \left( \sum_1^3 p_i - p_5 \right) \delta \left( (p_2 + p_3)^2 - m_4^2 \right). \quad (1.1)$$

Умножив на  $1 = \int dm_{12}^2 \delta \left( (p_1 + p_2)^2 - m_{12}^2 \right)$  и проинтегрировав по  $p_2, p_{10}, p_{30}$ , получим

$$S_3 = \int dm_{12}^2 \int \frac{d^3 p_1}{2\omega_1} \frac{d^3 p_3}{2\omega_3} \delta \left( (p_5 - p_1)^2 - m_4^2 \right) \times \\ \times \delta \left( (p_5 - p_3)^2 - m_{12}^2 \right) \delta \left( (p_5 - p_1 - p_3)^2 - m_2^2 \right). \quad (1.2)$$

Дальнейший расчет проводится в системе, где  $\vec{p}_5 = 0$ , внутренний интеграл дает  $(\pi/2m_5)^2$ , а пределы у  $m_{12}^2$  обозначаются  $F^\pm$

$$S_3 = \left( \frac{\pi}{2m_5} \right)^2 \int_{F^-}^{F^+} dm_{12}^2. \quad (1.3)$$

Предельные значения  $m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2$  при постоянных  $(p_1 + p_2 + p_3)^2 = m_5^2$ ,  $(p_2 + p_3)^2 = m_4^2$  найдем так:

$$m_{12}^2 = (p_1 + p_2 + p_3 - p_3)^2 = m_5^2 + m_3^2 - 2\omega_5 \omega_3 + 2p_5 p_3 \eta_{35}.$$

В системе покоя частицы 4

$$m_2^2 = (p_2 + p_3 - p_3)^2 = m_4^2 + m_3^2 - 2m_4 \omega_3.$$

$$m_1^2 = (p_1 + p_2 + p_3 - p_2 - p_3)^2 = m_5^2 + m_4^2 - 2m_4 \omega_5.$$

Значит, пределы  $F^\pm$  величины  $m_{12}^2$  суть

$$F^\pm = F^\pm(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2, m_5^2) \equiv F^\pm(1, 2, 3, 4, 5) = \quad (1.4)$$

$$= m_5^2 + m_3^2 - 2\omega_5 \omega_3 \pm 2p_5 p_3.$$

где

$$\omega_5 = \frac{m_5^2 + m_4^2 - m_1^2}{2m_4}, \quad \omega_3 = \frac{m_4^2 + m_3^2 - m_2^2}{2m_4}, \quad p_1 = \sqrt{\omega_1^2 - m_1^2}. \quad (1.5)$$

Итак, спектр  $m_{12}^2$  сосредоточен в интервале  $(F^-, F^+)$ . Если распад  $4 \rightarrow 2+3$  изотропен, то спектр  $m_{12}^2$  в этом интервале  $P$ -образный. Если распределение по косинусу угла между 2 и 4 в системе покоя 4 имеет вид  $n(\cos \theta_{24})$ , то спектр  $m_{12}^2$  повторяет функцию  $n(\cos \theta_{24})$ , растягивая ее до интервала  $(F^-, F^+)$ .

Нам встретится и обратная задача: указать, при каких  $m_5^2$  может появляться некоторое определенное фиксированное  $m_{12}^2$ . Для этого надо решить уравнение (1.4) относительно  $m_5^2$ . Но проще найти экстремум  $(p_1 + p_2 + p_3)^2$  при фиксированных  $(p_1 + p_2)^2 = m_{12}^2$ ,  $(p_2 + p_3)^2 = m_4^2$ . Напишем

$$(p_1 + p_2 + p_3)^2 = m_{12}^2 + m_3^2 + 2\omega_{12}\omega_3 - 2p_{12}p_3\eta_{12,3}.$$

Энергию  $\omega_2$  найдем из

$$P_1^2 = (P_1 + P_2 - P_2)^2 = m_{12}^2 + m_2^2 - 2m_2 \omega_{12}.$$

Энергию  $\omega_3$  найдем из

$$m_{23}^2 = m_2^2 + m_3^2 + 2m_2 \omega_3$$

(вычислено в системе покоя частицы 2). Итак,  $m_3^2$  меняется от  $f^-$  до  $f^+$ , где

$$f^\pm = f^\pm(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2, m_{12}^2) \equiv f^\pm(1, 2, 3, 4, 12) = \quad (1.6)$$

$$= m_{12}^2 + m_3^2 + 2\omega_{12} \omega_3 \pm 2P_{12} P_3,$$

где

$$\omega_{12} = \frac{m_{12}^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m_2}, \quad \omega_3 = \frac{m_4^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_2}, \quad P_1 = \sqrt{\omega_1^2 - m_1^2}.$$

При  $m_2 = 0$  решать приходится в лоб:

$$f^-(m_1^2, 0, m_3^2, m_4^2, m_{12}^2) \equiv f^-(1, \gamma, 3, 4, 1\gamma) = \quad (1.7)$$

$$= (m_{12}^2 m_4^2 - m_1^2 m_3^2) \left( \frac{1}{m_{12}^2 - m_1^2} + \frac{1}{m_4^2 - m_3^2} \right).$$

Обратимся теперь к распаду  $5 \rightarrow \Lambda^0 4 \rightarrow \Lambda^0 \gamma \gamma$ .

Здесь

$$F^\pm(\Lambda, \gamma, \gamma, 4, 5) = m_5 (\omega_\Lambda \pm P_\Lambda), \quad \omega_\Lambda = \frac{m_5^2 + m_\Lambda^2 - m_4^2}{2m}. \quad (1.9)$$

Если взять  $m_5 = 1,68$ ,  $m_\Lambda = 1,115$ ;  $m_\eta = 0,550$  Гэв, то  $F^- = 1,71$  Гэв,

$F^+ = 2,06$  Гэв, т.е.  $1,71$ ,  $F^+ = 2,06$  Гэв, т.е.  $1,71 \leq m_\Lambda^2 \leq 2,06$ . Для распада  $\chi(1385) \rightarrow \Lambda \pi^0 \rightarrow \Lambda \gamma \gamma$  имеем  $1,25 \leq m_\Lambda^2 \leq 2,78$ . Для распада

$\Upsilon(1385) \rightarrow \Lambda \pi^0 \rightarrow \Lambda \gamma \gamma$   $1,28 \leq m_\Lambda^2 \leq 1,86$ .

Чтобы не перебирать все распады типа  $5 \rightarrow \Lambda^0 + 4$ , лучше решить обратную задачу <sup>/2/</sup>: в предположении  $1,7 \leq m_{\Lambda\gamma}^2 \leq 2,0$  найти  $m_5$  и  $m_4$ .

Решение имеет вид

$$m_5 = m_{\Lambda\gamma \min} \cdot m_{\Lambda\gamma \max} / m_{\Lambda} = 1,66,$$

$$m_4 = [(m_{\Lambda\gamma \min})^2 - m_{\Lambda}^2]^{1/2} [(m_{\Lambda\gamma \max})^2 - m_{\Lambda}^2]^{1/2} m_{\Lambda}^{-1} = 0,53.$$

Поскольку 2,0 и 1,7 - числа сугубо ориентировочные, результат следует трактовать так: масса частицы 4 близка к массе  $\eta$  - мезона, масса  $\Lambda\gamma$  - резонанса чуть выше суммы  $m_{\Lambda} + m_{\eta}$ .

Имеет смысл рассмотреть и другой вариант распада:



Тогда имеем (см. <sup>/8/</sup>, формулы <sup>/13-15/</sup>)

$$q = 0,277, \quad m_4 = 0,560, \quad m_X = 1,686.$$

Таким образом, если бы существовал распад  $\eta^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$  или если бы существовала векторная частица, по массе близкая к массе  $\eta$  - мезона, то можно было бы считать, что наблюдались пары из распада  $X \rightarrow \Lambda^0 \eta \rightarrow \Lambda^0 \gamma \pi^0$ . Во всяком случае, проведенный расчет исключает вариант  $X \rightarrow \Lambda^0 \omega^0$ , если  $\pi^0 \rightarrow \gamma$ , если  $\pi^0$  не наблюдаем.

Радиационные распады.

Наконец, в этом параграфе уместно рассмотреть возможность того, что наблюдались радиационные распады каких-то резонансов. Представим, что некоторый резонанс  $X$  распадался на другой резонанс  $Y$  и  $\gamma$ -квант, а  $Y$  в свою очередь распадался на  $\Lambda^0$ -гиперон и  $\pi$ -мезон или  $\gamma$ -квант. Не может ли спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  в этих случаях оказаться заключенным в интервале 1,7-2,0 ГэВ? Рассмотрим сперва каскад



$$X \rightarrow \gamma Y \rightarrow \gamma \Lambda^0 \gamma$$

При каких массах  $X$  и  $Y$  спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  окажется между  $L = 1,7$  и  $P = 2,0$  Гэв? Из формул (13<sub>2</sub> - 16<sub>2</sub>) работы /8/ следует

$$m_X = \sqrt{L} \sqrt{\frac{P - m_{\Lambda}^2}{L - m_{\Lambda}^2}}, \quad m_Y = m_{\Lambda} \sqrt{\frac{P - m_{\Lambda}^2}{L - m_{\Lambda}^2}} \quad (1.11)$$

то есть,  $m_X = 1,678$  Гэв,  $m_Y = 1,435$  Гэв. Распадающиеся радиационно резонансы с массами такого порядка неизвестны.

Возьмем теперь вариант  $X \rightarrow \gamma Y \rightarrow \Lambda^0 \pi$   
Здесь формулы (13-16) из /8/ дают

$$m_X = 1,706 \text{ Гэв}, \quad m_Y = 1,460 \text{ Гэв}.$$

Эти числа подсказывают следующую гипотезу: что существует радиационный распад  $Y_1^*(1660)$

$$Y_1^*(1660) \rightarrow \gamma Y_1^*(1385) \rightarrow \gamma + \Lambda^0 \pi \quad (1.12)$$

Тогда расчет по (1.4) дает

$$1,8 \leq m_{\Lambda\gamma}^2 \leq 2,06 \text{ Гэв}^2,$$

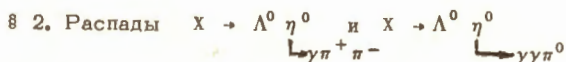
что по сравнению с экспериментальными данными лишь немного сдвинуто вправо. При этом спектр энергий  $\gamma$  - квантов должен в лабораторной системе иметь максимум при  $\omega_{\gamma} = 0,25$  Гэв. Возможность каскада (1.12) не следует упускать из виду при дальнейших опытах.

Наконец, в работе /2/ рассматривалась и простейшая возможность - наличие прямого  $\Lambda\gamma$  -резонанса. Если частица  $X$  распадается на  $\Lambda$  и  $\gamma$ , то в спектре энергий  $\gamma$  должен наблюдаться пик при

$$\omega_{\gamma} = \frac{M_X^2 - M_{\Lambda}^2}{2M_X}$$

В действительности максимум (см. рис. 6 из <sup>/5/</sup>) приходится на интервал (0,3-0,4) Гэв, что соответствует массе  $M_X$  из интервала (1,45-1,50) Гэв. Хотя в этой области масс (см. рис. 3) и наблюдается некоторый подъем, но он статистически не обеспечен.

Но это рассуждение нуждается в некотором уточнении. Максимум в энергетическом спектре  $\gamma$ -квантов, строго говоря, противоречит и наличию  $\Lambda\eta$ -резонанса: максимум в спектре энергий  $\gamma$ -квантов от распада  $\Lambda\eta$ -резонанса должен приходиться на  $m_{\eta}/2 = 0,275$  Гэв; чего на самом деле нет, максимум сдвинут на участок (0,3-0,4) Гэв. Приходится считать, что в пределах экспериментальной точности  $0,275 \approx 0,3$ . Тогда с той же точностью можно раздвинуть область наблюдавшегося пика в спектре  $\omega_{\gamma}$  до (0,275-0,4) Гэв. При наличии прямого распада  $X \rightarrow \Lambda\gamma$  этот интервал требует, чтобы масса  $X$  заключалась где-то в более широком интервале (1,425-1,50) Гэв. Это уже совсем близко к наблюдавшемуся пику в массах  $\Lambda\gamma$ . Стало быть, этот вариант (резонанс  $\Lambda\eta$  с массой  $m_X = 1,425$  Гэв,  $m_X^2 = 2,03$  Гэв<sup>2</sup>) ничуть не хуже варианта (1.12).



Рассмотрим произвольный распад сходного типа

$$6 \rightarrow 1 + 5 \quad \downarrow \rightarrow 2 + 3 + 4 \quad (2.1)$$

и поставим задачу найти спектр  $m_{12}^2$ . Фазовый объем продуктов распада 1,2,3,4 есть

$$S_4 = \int \prod_1^4 d^4 p_i \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta^4 \left( \sum_1^4 p_i - p_6 \right) \delta((p_2 + p_3 + p_4)^2 - m_5^2). \quad (2.2)$$

Умножим это на

$$1 = \int d^4 p_{34} \delta^4(p_3 + p_4 - p_{34}) dm_{34}^2 \delta(p_{34}^2 - m_{34}^2) \quad (2.3)$$

и запишем результат в виде

$$S_4 = \int dm_{34}^2 \int d^4 p_3 \delta(p_3^2 - m_3^2) d^4 p_4 \delta(p_4^2 - m_4^2) \delta^4(p_3 + p_4 - p_{34}) \quad (2.4)$$

$$\int d^4 p_1 \delta(p_1^2 - m_1^2) d^4 p_2 \delta(p_2^2 - m_2^2) d^4 p_{34} \delta(p_{34}^2 - m_{34}^2) \times$$

$$\times \delta^4(p_1 + p_2 + p_{34} - p_5) \delta((p_2 + p_{34})^2 - m_5^2).$$

Второй интеграл есть фазовый объем пары частиц

$$S_2(m_{34}^2, m_3^2, m_4^2) \equiv \frac{\pi p_3}{m_{34}}, \quad (2.5)$$

где

$$p_3 = \frac{\sqrt{m_{34}^2 - (m_3 + m_4)^2} \sqrt{m_{34}^2 - (m_3 - m_4)^2}}{2m_{34}}. \quad (2.6)$$

Третий интеграл совпадает с фазовым интегралом (2.2) распада (2.1), когда масса пары 34 фиксирована и равна  $m_{34}$ . Поэтому его можно представить в виде

$$\left(\frac{\pi}{2m_6}\right)^2 \int_{F^-}^{F^+} dm_{12}^2, \quad (2.7)$$

где

$$F^{\pm} = F^{\pm}(1, 2, 3, 4, 5, 6). \quad (2.8)$$

Итак,

$$S_4 = \left(\frac{\pi}{2m_6}\right)^2 \int \frac{dm_{34}^2}{(m_3+m_4)^2} S_2(m_{34}^2, m_3^2, m_4^2) \int_{F^-}^{F^+} dm_{12}^2. \quad (2.9)$$

Таким образом, спектр  $m_{12}^2$  в распаде  $6 \rightarrow 15$   $\xrightarrow{234}$  получится суммированием П-образных спектров  $m_{12}^2$  при фиксированных  $m_{34}^2$ , причем каждый П-образный спектр получается в своих особых пределах и суммируется со своим собственным весом  $S_2$ . Предостережем от естественной ошибки: вес, с которым берется спектр  $m_{12}^2$  при фиксированном  $m_{34}^2$ , не есть вероятность иметь это значение  $m_{34}^2$  в распаде  $5 \rightarrow 2+3+4$ . Последняя была бы равна  $S_2(m_{34}^2, m_3^2, m_4^2) \times S_2(m_3^2, m_2^2, m_{34}^2)$ , убывая до нуля при  $m_{34} = m_5 - m_2$ , чего нет в правильной формуле (2.9).

Легко видеть, что и более сложных распадах

$$6 \rightarrow 15 \xrightarrow{234 \dots} \text{и частиц} \quad (2.10)$$

фазовый интеграл выглядит не сложнее

$$S_{n+1} = \left(\frac{\pi}{2m_6}\right)^2 \int \frac{dm_{34}^2}{(m_3+m_4+\dots)^2} S_{n-1}(m_{34}^2, \dots, m_3^2, m_4^2, \dots) \int_{F^-}^{F^+} dm_{12}^2, \quad (2.11)$$

где  $S_{n-1}$  - фазовый объем частиц 3,4, ... при фиксированном  $m_{34}^2$ . Из (2.9) легко получается аналитическое выражение для спектра  $F^\pm$ . Для этого надо в (2.9) переменить порядок интегрирования.  $F^\pm$  как функция  $m_{34}^2$  есть гипербола (или, в случае  $m_2 = 0$ , пара прямых) (рис. 1). В обоих случаях  $m_{12}^2$  меняется от  $(m_1 + m_2)^2$  до наибольшего значения, равного

$$F^+ (m_1^2, m_2^2, (m_3 + m_4)^2, m_5^2, m_6^2).$$

Максимум в распределении всегда приходится примерно на точку В, т.е. достигается при

$$m_{12}^2 = F^-(m_1^2, m_2^2, (m_3 + m_4)^2, m_5^2, m_6^2). \quad (2.12)$$

При фиксированном  $m_{12}^2$  переменная  $m_{34}^2$  меняется от  $\phi^-$  до  $\phi^+$ .

Чтобы найти аналитическое выражение для этих пределов, надо отыскать экстремум  $p_{34}^2$  при

$$(p_1 + p_2)^2 = m_{12}^2, (p_2 + p_{34})^2 = m_5^2, (p_1 + p_2 + p_{34})^2 = m_6^2.$$

Запишем  $p_{34}^2$  в виде  $(p_2 + p_{34} - p_2)^2$  и вычислим в системе, где  $\vec{p}_1 = 0$ ,

$$p_{34}^2 = m_5^2 + m_2^2 - 2\omega_5 \omega_2 + 2p_5 p_2 \eta_{25}.$$

Энергию  $\omega_5$  найдем из  $(p_1 + p_2 + p_{34})^2 = m_6^2$  в той же системе отсчета

$$m_1^2 + m_5^2 + 2m_1 \omega_5 = m_6^2,$$

откуда

$$\omega_5 = \frac{m_6^2 - m_1^2 - m_5^2}{2m_1}, \quad (2.13)$$

$$p_5 = \frac{1}{2m_1} \sqrt{m_6^2 - (m_1 + m_5)^2} \sqrt{m_6^2 - (m_1 - m_5)^2}.$$

Энергию  $\omega_2$  найдем таким же способом из  $(p_1 + p_2)^2 = m_{12}^2$ :

$$\omega_2 = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1}, \quad p_2 = \frac{\sqrt{m_{12}^2 - (m_1 + m_2)^2} \sqrt{m_{12}^2 - (m_1 - m_2)^2}}{2m_1} \quad (2.14)$$

Итак,

$$\phi^- \leq m_{34}^2 \leq \phi^+,$$

где

$$\begin{aligned} \phi^\pm &= \phi^\pm(m_1^2, m_2^2, m_{12}^2, m_5^2, m_6^2) = \\ &= m_5^2 + m_2^2 - 2(\omega_5 \omega_2 \mp p_5 p_2). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Глядя на рис. 1, видим, что спектр  $m_{12}^2$  имеет вид:

на участке АВ

$$(m_1 + m_2)^2 \leq m_{12}^2 \leq F^-(m_1^2, m_2^2, (m_3 + m_4)^2, m_5^2, m_6^2), \quad (2.16)$$

$$w(m_{12}^2) = \left(\frac{\pi}{2m_6}\right)^2 \int_{\phi^-}^{\phi^+} dm_{34}^2 S_2(m_{34}^2, m_3^2, m_4^2);$$

на участке ВС

$$F^-(1, 2, 3 + 4, 5, 6) \leq m_{12}^2 \leq F^+(1, 2, 3 + 4, 5, 6), \quad (2.17)$$

$$w(m_{12}^2) = \left(\frac{\pi}{2m_6}\right)^2 \int_{(m_3 + m_4)^2}^{\phi^+} dm_{34}^2 S_2(m_{34}^2, m_3^2, m_4^2).$$

Введем функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x dx \frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{x} =$$

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} + \frac{a+b}{2} \ln \frac{\sqrt{x-b} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x-b} - \sqrt{x-a}} - \sqrt{ab} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}}{\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}} \quad (2.18)$$

Через нее выражается интеграл в (2.16), (2.17)

$$\int dm_{34}^2 S_2(m_{34}^2, m_3^2, m_4^2) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int dm_{34}^2 \frac{\sqrt{m_{34}^2 - (m_3 + m_4)^2} \sqrt{m_{34}^2 - (m_3 - m_4)^2}}{m_{34}^2}$$

так что

$$w(m_{12}^2) = \begin{cases} \frac{\pi^8}{8m_6^2} [\Phi(\phi^+) - \Phi(\phi^-)] & \text{на участке АВ,} \\ \frac{\pi^8}{8m_6^2} \Phi(\phi^+) & \text{на участке ВС.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Теперь обратимся к непосредственно интересующим нас распадам. В распадах

$$X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0 \quad \text{и} \quad X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \gamma \pi^0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^- \end{array} \quad (2.20)$$

$\phi^\pm$  как функция  $m_{\Lambda\gamma}^2$  представляет собою пару прямых

$$\phi^\pm = m_\eta^2 + m_\Lambda (\omega_\eta \mp p_\eta) - \frac{\omega_\eta \mp p_\eta}{m_\Lambda} m_{\Lambda\gamma}^2, \quad (2.21)$$

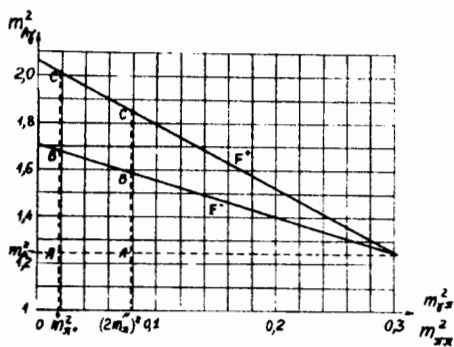


Рис. 1. Область интегрирования в интеграле (2.9) в случае распада  $\Lambda \eta^0 \rightarrow \gamma \alpha \beta$  ограничена прямыми  $F^{\pm}$  (2.21) и отрезком ВС.

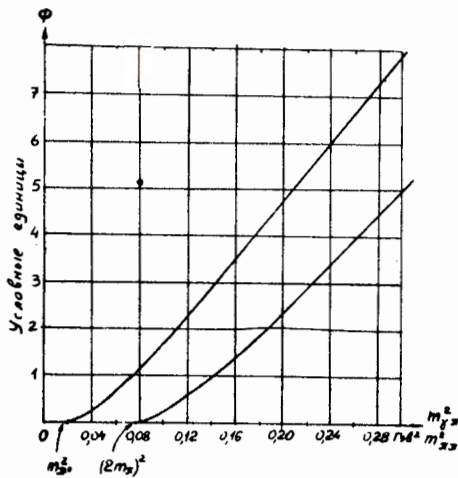


Рис. 2. Первообразные  $\Phi$  (2.22) (слева) и (2.24) в условных единицах.



(где  $\omega_\eta$ ,  $\rho_\eta$  вычисляются по (2.12)). Они-то и изображены на рис. 1. Отличие лишь в том, что  $m_{34}^2$  в первом случае меняется от  $m_\pi^2$  до  $m_\eta^2$ , а во втором - от  $(2m_\pi)^2$  до  $m_\eta^2$ . Соответственно и положение точек В и С различно.

Функция  $\Phi(x)$  обращается в первом случае в

$$\Phi(m_{\gamma\pi}^2) = m_{\gamma\pi}^2 - m_\pi^2 - m_\pi^2 \ln \frac{m_{\gamma\pi}^2}{m_\pi^2}, \quad (2.22)$$

так что на участке АВ

$$w(m_{\Lambda\gamma}^2) \approx \phi^+ - \phi^- - m_\pi^2 \ln \frac{\phi^+}{\phi^-} = 2 \frac{\rho_\eta}{m_\Lambda} (m_{\Lambda\gamma}^2 - m_\Lambda^2) - m_\pi^2 \ln(\phi^+/\phi^-), \quad (2.23)$$

а на участке ВС

$$w(m_{\Lambda\gamma}^2) \approx \phi^+ - m_\pi^2 - m_\pi^2 \ln \frac{\phi^+}{m_\pi^2}.$$

Во втором случае

$$\Phi(m_{\pi\pi}^2) = m_{\pi\pi} \sqrt{m_{\pi\pi}^2 - 4m_\pi^2} - 4m_\pi^2 \ln \frac{m_{\pi\pi} + \sqrt{m_{\pi\pi}^2 - 4m_\pi^2}}{2m_\pi} \quad (2.24)$$

Графики функции  $\Phi$  приведены на рис. 2, а на рис. 3 - нормированные на 1 спектры  $m_{\Lambda\gamma}^2$ . Их пики, как легко понять из рис. 1, приходятся на точку В, т.е. в первом случае на 1,65, во втором - на 1,56 Гэв<sup>2</sup>.

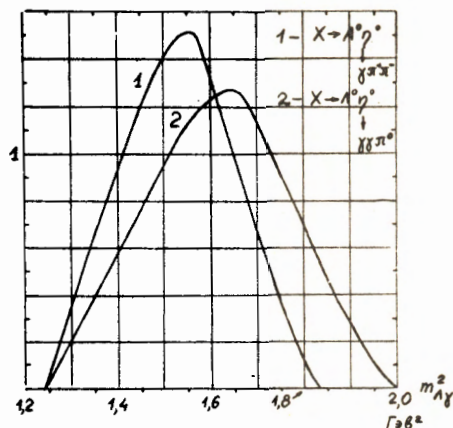


Рис. 3. Спектры  $m^2_{\Lambda\gamma}$  от распадов  $X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0$  и  $X \rightarrow \Lambda^0 \pi^0$ .

§ 3. Распады типа  $7 \rightarrow \begin{matrix} 5 & 6 \\ \diagdown & \diagup \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$

Примером может служить распад  $X \rightarrow \Sigma^0 \pi^0$  или  $X \rightarrow \Sigma^0 \eta^0$ . Но мы рассмотрим общий случай произвольных масс. Интеграл состояний интересующего нас сейчас каскада

$$S_4 = \int \prod_1^4 \frac{d^3 \vec{p}_i}{2\omega_i} \delta((p_3 + p_4)^2 - m_6^2) \delta((p_1 + p_2)^2 - m_5^2) \delta(\sum_1^4 p_i - p_7). \quad (3.1)$$

Целью нашей будет представить это выражение в виде интеграла по  $dm_{53}^2 dm_{23}^2$ . Имея в виду, что  $m_{53}^2$  однозначно связано с энергией  $\omega_4$  частицы 4 в системе покоя 7, а  $m_{23}^2$  - с энергией  $\omega_1$  частицы 1 в системе покоя частиц  $1+2+3=5+3$ , будем интегрировать по  $\vec{p}_4$  в системе, где  $\vec{p}_7 = 0$ , а по  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  в системе, где  $\vec{p}_{123} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ . Напишем

$$S_4 = \int_{\vec{p}_7=0} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2\vec{\omega}_4} \int_{\vec{p}_{123}=0} \frac{d^3 \vec{p}_3}{2\omega_3} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2\omega_2} \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \delta((\omega_4 + \omega_3)^2 - (\vec{p}_4 + \vec{p}_3)^2 - m_6^2) \times$$

(3.2)

$$\times \delta((\omega_1 + \omega_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 - m_5^2) \delta^4(\vec{p}_{123} + \vec{p}_4 - \vec{p}_7).$$

Фиксируем вектор  $\vec{p}_4$  в системе, где  $\vec{p}_7 = 0$ . Тогда известна эффективная масса  $m_{53}$  системы 1+2+3

$$m_{53}^2 = m_7^2 + m_4^2 - 2m_7 \omega_4 \quad (3.3)$$

и известен ее импульс  $\vec{p}_{53}$  в системе  $\vec{p}_7 = 0$

$$\vec{p}_{53} = -\vec{p}_4.$$

Поэтому импульс и энергия частицы 4 однозначно определены и в системе от - счета  $\vec{p}_{53} \equiv \vec{p}_{123} = 0$ . Действительно, например, из  $\vec{p}_{123} + \vec{p}_4 = \vec{p}_7$  в системе, где  $\vec{p}_{123} = 0$ , следует

$$\omega_4 = \frac{m_7^2 - m_{53}^2 - m_4^2}{2m_{53}}, \quad \omega_7 = \frac{m_7^2 + m_{53}^2 - m_4^2}{2m_{53}}, \quad \text{причем } \vec{p}_4 = \vec{p}_7. \quad (3.4)$$

Выделяя в (3.2) интегрирование по  $\vec{p}_4$  по области  $d_4$ , разрешенной кинематикой (форму этой области мы определим позже), перепишем (3.2) так:

$$S_4 = \int \frac{d^3 \vec{p}_4}{2\omega_4} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{2\omega_3} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2\omega_2} \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \delta(m_4^2 + m_3^2 - m_6^2 + 2\omega_4 \omega_3 - 2p_4 p_3 \eta_{43}) \times \quad (3.5)$$

$$\times \delta(m_{53}^2 + m_3^2 - m_5^2 - 2m_{53} \omega_3) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - m_{53}).$$

Здесь в первой  $\delta$ -функции  $\omega_4$ ,  $\vec{p}_4$  фиксированы (см. (3.4)),  $\eta_{43}$  - косинус угла между  $\vec{p}_4$  и  $\vec{p}_3$ , а во второй  $\delta$ -функции учтены законы сохранения в системе  $\vec{p}_{123} = 0$ . Проинтегрируем теперь по  $\vec{p}_2$ , т.е. зачеркнем  $\delta(\Sigma \vec{p}_i)$  и под  $\omega_2$  будем подразумевать  $(p_1^2 + p_3^2 + 2p_1 p_3 \eta_{13} + m_2^2)^{1/2}$ . Чтобы проинтегрировать по  $\vec{p}_3$  и по направлениям  $\vec{p}_1$ , проведем в системе, где  $\vec{p}_{123} = 0$ , ось  $z$  по  $\vec{p}_4$ , плоскость  $yz$  по  $\vec{p}_3, \vec{p}_4$ , т.е.  $\vec{p}_3$  будем отсчитывать от оси  $\vec{p}_4$ , а  $\vec{p}_1$  - от  $\vec{p}_3$ . Так как

$$d^3 \vec{p}_3 / 2\omega_3 = \frac{1}{2} p_3 d\omega_3 d\eta_{34} d\phi,$$

то интеграл по  $\omega_3$  введет

$$\omega_3 = \frac{m_{53}^2 + m_3^2 - m_5^2}{2m_{53}}, \quad (3.6)$$

а интеграл по  $\eta_{34}$  -

$$\eta_{34} = [\omega_4 \omega_3 - \frac{1}{2}(m_6^2 - m_3^2 - m_4^2)] / p_4 p_3$$

с условием  $|\eta_{34}| \leq 1$ . Это условие и даст ту область  $d_4$ , в которой может находиться  $\vec{\omega}_4$ . Однако явный вид ее мы пока не выписываем.

В итоге после интегрирования по  $\frac{d^3 \vec{p}_8}{2\omega_8}$  в (3,5) исчезнут все  $\delta$ -функции, кроме последней, а вместо  $\frac{d^3 \vec{p}_8}{2\omega_8}$  появится множитель  $\pi/4p_4 m_{53}$ .

$$S_4 = \int \frac{d^3 \vec{p}_4}{2\omega_4} \int \frac{\pi}{4p_4 m_{53}} \frac{1}{2\omega_2} \frac{1}{2} p_1 d\omega_1 d\eta_{13} d\phi \times \\ \times \delta(\omega_1 + \omega_3 + \sqrt{p_1^2 + p_3^2 + 2p_1 p_3 \eta_{13} + m_2^2} - m_{53}).$$

Здесь можно проинтегрировать по  $\eta_{13}$ ,  $\phi$ , что даст  $\frac{2\pi\omega_2}{p_1 p_3}$ , а из  $\delta$ -функции, кроме того, возникнет уравнение для  $\eta_{13}$ . Если потребовать, чтобы было  $|\eta_{13}| \leq 1$ , то получим границы  $d_1$ , в которых обязано меняться  $\omega_1$ . Мы опять-таки их пока не выписываем.

$$S_4 = \int_{d_4} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2\omega_4} \int_{d_1} \frac{\pi}{4p_4 m_{53}} \frac{\pi}{2p_3} d\omega_1.$$

Наконец, можно проинтегрировать по направлениям  $\vec{p}_4$  в системе покоя  $\vec{p}_7 = 0$ , это даст  $2\pi$ , и окончательно имеем

$$S_4 = \frac{\pi^3}{4} \int_{d_4} \vec{p}_4 d\vec{\omega}_4 \int_{d_1} d\omega_1 / p_4 p_3 m_{53}.$$

Между значениями импульса  $p_4$  в системах, где  $\vec{p}_7 = 0$  и где  $\vec{p}_{123} = 0$ , есть простая связь, легко выводимая из  $p_{123} + p_4 = p_7$ , а именно,  $m_7 p_4 = m_{53} p_4$ . Сокращение приводит к

$$S_4 = \frac{\pi^3}{4 m_7} \int_{d_4} d\vec{\omega}_4 \int_{d_1} \frac{d\omega_1}{p_3}. \quad (3.7)$$

Теперь вернемся к инвариантным переменным  $m_{53}^2$  (см. (3.3)) и  $m_{23}^2$

$$m_{23}^2 = m_{53}^2 + m_1^2 - 2m_{53} \omega_1 \quad (3.8)$$

и получим

$$S_4 = \frac{\pi^8}{(4m_7)^2} \int \frac{dm_{53}^2 dm_{23}^2}{P_3 m_{53}} \quad (3.9)$$

где

$$2P_3 m_{53} = \{ [m_{53}^2 - (m_5 + m_3)^2] [m_{53}^2 - (m_5 - m_3)^2] \}^{1/2}.$$

Остается расставить пределы интегрирования. Мы не будем для этого пользоваться условиями  $|\eta_{34}| \leq 1$ ,  $|\eta_{13}| \leq 1$ , предоставляемыми нам  $\delta$ -функциями, а воспользуемся формулами § 1. Пределы  $m_{53}^2$  получатся из (1.4), поскольку без распада  $5 \rightarrow 1+2$  наш теперешний каскад совпадает с каскадом § 1

$$F^-(5,3,4,6,7) \leq m_{53}^2 \leq F^+(5,3,4,6,7)$$

При фиксированном  $m_{53}^2$  мы опять оказываемся в условиях § 1

$$F^-(3,2,1,5,53) \leq m_{23}^2 \leq F^+(3,2,1,5,53). \quad (3.11)$$

Итак, искомая формула имеет вид

$$S_4 = \frac{\pi^3}{(4m_7)^2} \int \frac{dm_{53}^2}{p_8 m_{53}} \int dm_{23}^2 \quad (3.12)$$

с пределами интегрирования (3.10) и (3.11).

Как известно,  $F^\pm$  как функция  $m_{53}^2$  есть гипербола (или пара прямых). Примерный вид области интегрирования дан на рис. 4 - это  $A'B'V'A''$ .

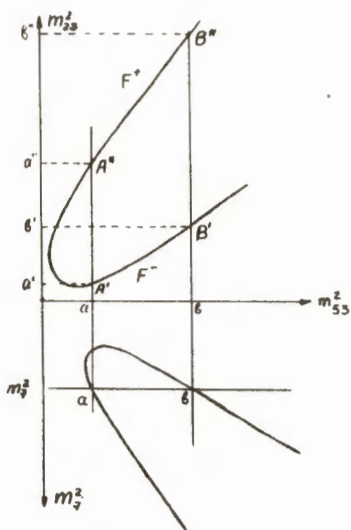


Рис. 4. Область интегрирования в (3.12) - это  $A'B'V'A''$ .

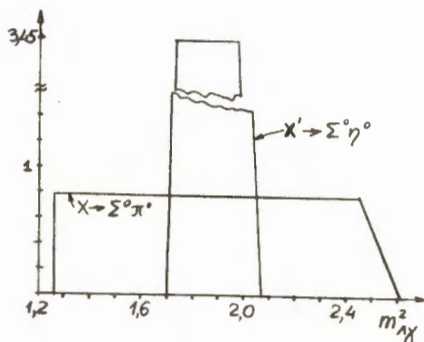


Рис. 5. Нормированные на 1 спектры  $m_{\Lambda\chi}^2$  от  $\chi' \rightarrow \Sigma^0 \eta^0$  и  $\chi \rightarrow \Sigma^0 \pi^0$ .

Чтобы из (3.12) найти спектр  $m_{23}^2$ , надо переменить порядок интегрирования и определить  $m_{53}^2$  как функцию  $m_{23}^2$ . Последнее было проделано в § 1 — это функция (1.6)  $f^{\pm}(3,2,1,5,23)$ . Обозначим еще

$$\mu(m_{53}^2) = \int_{(m_5+m_3)^2}^{m_{53}^2} \frac{dm_{53}^2}{P_3 m_{53}^2} = \ln \frac{\sqrt{m_{53}^2 - (m_5 - m_3)^2} + \sqrt{m_{53}^2 - (m_5 + m_3)^2}}{\sqrt{m_{53}^2 - (m_5 - m_3)^2} - \sqrt{m_{53}^2 - (m_5 + m_3)^2}}, \quad (3.13)$$

а при  $m_3 = 0$   $\mu(m_{53}^2) = \ln(m_{53}^2 - m_5^2)$ .

Тогда при расположении таком, как на рис. 4, спектр  $m_{23}^2$  простирается от  $m_{23}^2(a')$  до  $m_{23}^2(b'')$ , причем аналитический вид на разных участках разный:

$$\begin{aligned} w(m_{23}^2) &= \mu[f^+(m_{23}^2)] - \mu(a) && \text{на } (a', b'), \\ &= \mu(b) - \mu(a) && \text{на } (b', a''), \\ &= \mu(b) - \mu[f^-(m_{23}^2)] && \text{на } (a'', b''). \end{aligned} \quad (3.14)$$

С помощью этих формул найдем спектр  $m_{\Lambda\chi}^2$  из распада  $\chi \rightarrow \Sigma^0 \pi^0$ . Здесь гипербола (3.10) имеет вид



$$(m_{\Sigma\gamma}^2)^{\pm} = m_x (\omega_{\Sigma} \pm p_{\Sigma}), \quad \omega_{\Sigma} = \frac{m_x^2 + m_{\Sigma}^2 - m_{\pi}^2}{2m_x}, \quad (3.15)$$

а гипербола (3.11) распадается на пару прямых:

$$\begin{aligned} m_{\Lambda\gamma}^2 &= m_{\Sigma\gamma}^2 - m_{\Sigma}^2 + m_{\Lambda}^2, \\ m_{\Lambda\gamma}^2 &= m_{\Sigma\gamma}^2 m_{\Lambda}^2 / m_{\Sigma}^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Находя отсюда  $m_{\Sigma\gamma}^2$  как функцию  $m_{\Lambda\gamma}^2$  и подставляя в функцию

$$\mu(m_{\Sigma\gamma}^2) = \ln(m_{\Sigma\gamma}^2 - m_{\Sigma}^2), \quad \text{имеем спектр } m_{\Lambda\gamma}^2$$

$$\frac{4M^2}{(2\pi)^3} w(m_{\Lambda\gamma}^2) = \ln \frac{m_{\Lambda\gamma}^2 - m_{\Lambda}^2}{m_x (\omega_{\Sigma} - p_{\Sigma}) - m_{\Sigma}^2} \frac{m_{\Sigma}^2}{m_{\Lambda}^2} \quad \text{на } (1,260; 1,262),$$

$$= \ln(m_{\Sigma}^2 / m_{\Lambda}^2) = \text{Const} \quad \text{на } (1,262; 2,450),$$

$$= \ln \frac{m_x (\omega_{\Sigma} + p_{\Sigma}) - m_{\Sigma}^2}{m_{\Lambda\gamma}^2 - m_{\Lambda}^2} \quad \text{на } (2,45; 2,615).$$

Этот спектр (рис. 5) практически не отличается от трапеции и далек от экспериментально наблюдавшегося.

Другое дело - спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  из распада  $X \rightarrow \Sigma^0 \eta^0$ . Если наблюдался резонанс  $\Sigma^0 \eta^0$  с малым энерговыделением, то по тем же формулам имеем при энерговыделении 11 Мэв спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  в виде трапеции с горизонтальным участком (1,78 - 1,97) и наклонными участками (1,70-1,78) и (1,97-2,07). Зависимость границ этих участков от энерговыделения видна из рис. 6. Как видим, они только чуть смещены вправо по сравнению с экспериментальными данными.

§ 4. Распады  $X \rightarrow \Lambda^0 \omega^0$ ,  $X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0$  и  $X \rightarrow \Lambda^0 \eta^0$

Рассмотрим сперва распад по схеме

$$7 \longrightarrow \begin{array}{l} 1+6 \\ \quad \downarrow \\ \quad 5+4 \\ \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad 2+3. \end{array} \quad (4.1)$$

Его интеграл состояний

$$S_4 = \int \prod_1^4 d^4 p_i \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta^4(\sum_1^4 p_i - p_7) \delta((p_2 + p_3 + p_4)^2 - m_6^2) \times \\ \times \delta((p_2 + p_3)^2 - m_5^2) \quad (4.2)$$

сводится к интегралу по  $d m_{15}^2 d m_{12}^2$  выкладками, очень близкими к проделанным в предыдущем параграфе. Опять интегрирование по  $\vec{p}_4$  проводится в системе, где  $\vec{p}_7 = 0$ , а остальные интегрирования - в системе, где  $\vec{p}_{123} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ ; интегралы по  $\vec{\omega}_4$  и  $\omega_3$  оставляются напоследок, чтобы затем выразить их через  $m_{15}^2$  и  $m_{12}^2$ . Из выкладок приведем только то место, в котором есть отличие от выкладок § 3. После учета законов сохранения аргументы  $\delta$ -функций в (4.2) принимают вид

$$(p_1 + p_2 + p_3)^2 - m_6^2 = (p_{123} - p_1 + p_4)^2 - m_6^2,$$

$$(p_2 + p_3)^2 - m_5^2 = (p_{123} - p_1)^2 - m_5^2,$$

так что

$$S_4 = \int \frac{d^3 \vec{p}_4}{d_4 2\vec{\omega}_4} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{2\omega_3} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2\omega_2} \frac{d^3 \vec{p}_1}{2\omega_1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \delta(m_{15}^2 + m_1^2 + m_4^2 - m_5^2 - 2m_{15}(\omega_1 - \omega_4) - 2\omega_1\omega_4 + 2p_1 p_4 \eta_{14}) \times \\ & \times \delta(m_{15}^2 + m_1^2 - m_5^2 - 2m_{15}\omega_1) \times \\ & \times \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - m_{15}). \end{aligned}$$

Дальше все идет, как в § 3, приводя в конце концов к

$$S_4 = \frac{\pi^3}{(4m_7)^2} \int \frac{dm_{15}^2}{p_1 m_{15}} \int dm_{12}^2, \quad (4.3)$$

где

$$2p_1 m_{15} = \sqrt{m_{15}^2 - (m_1 + m_5)^2} \sqrt{m_{15}^2 - (m_1 - m_5)^2} \quad (4.4)$$

и где пределы изменения переменных суть (см. (1.4))

$$\begin{aligned} F^-(1,5,4,6,7) \leq m_{15}^2 \leq F^+(1,5,4,6,7), \\ F^-(1,2,3,5,15) \leq m_{12}^2 \leq F^+(1,2,3,5,15). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Дальше для перемены порядка интегрирования можно пользоваться рис. 4 с заменой индексов 53 на 15 и 23 на 12. Спектр  $m_{12}^2$  будет определяться по формулам типа (3.14); места, в которых аналитический вид спектра меняется, становятся ясны после того, как кривые  $F^\pm$  начерчены.

Примером применения выведенных формул может служить проверка гипотезы, что  $\Lambda\gamma$ -пары в пике происходят от распада гипотетического  $\Lambda\omega^0$ -резонанса с малым (например, 15 Мэв) энерговыделением:



Тогда  $m_{\Lambda\pi}^2$  меняется в интервале 2-2,38 Гэв<sup>2</sup>, функция  $\mu_{15}$  (это функция  $\mu_{53}$  § 3) на этом участке практически постоянна, в итоге

$$S_4 = \int_{2,00}^{2,38} dm \int_{1,26}^{m_{\Lambda\pi}^2 - m_{\pi}^2} dm^2 \Lambda_{\gamma}$$

так что спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  есть прямоугольная трапеция с вертикальным ребром при  $m_{\Lambda\gamma}^2 = 1,26$  и наклонным ребром на отрезке (2,56 - 2,96). Это очень широкий спектр. Столь же широким был бы спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  и у  $\Lambda p$ -резонанса.

Обратимся к еще более сложным каскадам - каскадам типа

$$\begin{array}{c}
 7 \rightarrow 1+6 \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad \zeta+8+9 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \downarrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 2+3.
 \end{array} \tag{4.6}$$

Интеграл состояний здесь легко сводится к случаю (4.1)

$$\begin{aligned}
 S_5 = & \int \prod_{1,2}^{3,8,9} d^4 p_i \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta^4 \left( \sum_1^3 p_i + p_8 + p_9 - p_7 \right) \times \\
 & \times \delta((p_2 + p_3)^2 - m_5^2) \delta((p_2 + p_3 + p_8 + p_9)^2 - m_6^2).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Умножим это на

$$1 = \int dm_4^2 \delta(p_4^2 - m_4^2) d^4 p_4 \delta(p_8 + p_9 - p_4), \quad \text{получим}$$

$$S_5 = \int dm_4^2 \int \prod_{8,9} d^4 p_i \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta(p_8 + p_9 - p_4) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int \prod_1^4 d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta^4\left(\sum_1^4 p_i - p_7\right) \delta\left((p_2 + p_3)^2 - m_5^2\right) \times \\ & \times \delta\left((p_2 + p_3 + p_4)^2 - m_6^2\right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Второй интеграл есть  $S_2(m_4^2, m_8^2, m_9^2)$ , а третий совпадает с (4.2). Итак,

$$S_5 = \frac{\pi^3 (m_6 - m_5)^2}{(4m_7)^2 (m_8 + m_9)^2} S_2(m_4^2, m_8^2, m_9^2) \int \frac{dm_{15}^2}{p_1 m_{15}} \int dm_{12}^2, \quad (4.9)$$

где пределы те же, что и в (4.3). Стало быть, расчет спектра в распаде (4.6) сводится к расчетам спектров  $m_{12}^2$  в распаде (4.1) и суммированию полученных спектров с весами  $S_2$ . Таков простейший и наглядный рецепт получения спектра  $m_{12}^2$ . Но можно дать и аналитическую формулу.

Переменим в (4.9) порядок интегрирования  $m_{15}^2$  и  $m_4^2$ . Так как при этом распад  $5 \rightarrow 2 + 3$  неважен, задача совпадает с решенной в § 2. Пределы изменения  $m_{15}^2$  суть  $F^+ \equiv F^+(1, 5, 8+9, 6, 7)$  (большой) и  $F^- = \max[(m_1 + m_2)^2, F^-(1, 5, 8+9, 6, 7)]$  (меньший).

При фиксированном  $m_{15}^2$  величина  $m_4^2$  меняется от  $\phi^-$  до  $\phi^+$  (см. (2.15)), где

$$\phi^- = \max[(m_8 + m_9)^2, \phi^-(1, 5, 15, 6, 7)],$$

а

$$\phi^+ = \phi^+(1, 5, 15, 6, 7).$$

$$S_5 = \frac{\pi^3}{(4m_7)^2} \int_{F^-}^{F^+} \frac{dm_{15}^2}{p_1 m_{15}} \int_{\phi^-}^{\phi^+} dm_4^2 S_2(m_4^2, m_8^2, m_9^2) \int dm_{12}^2.$$



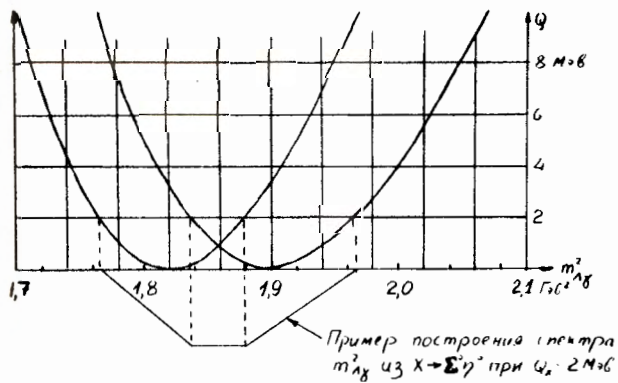


Рис. 6. Как зависят четыре характерные точки спектра  $m_{\Lambda\gamma}^2$  из  $\chi' \rightarrow \Sigma^0 \eta^0$  от энергосвободы  $Q = m_{\chi'} - m_{\Sigma} - m_{\eta}$ .

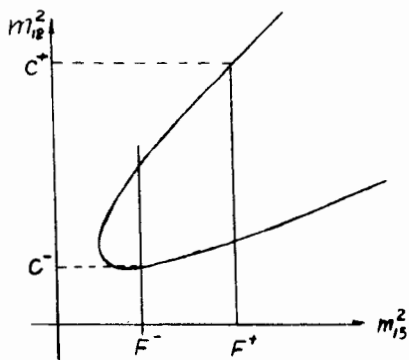


Рис. 7. К интегралу (4.11).

$$0 \leq m_{\gamma\gamma}^2 \leq (m_{\eta} - m_{\pi})^2, \quad (4.13)$$

$$m_{\Lambda\pi}^2 \in m_x^2 + m_{\gamma\gamma}^2 - 2\omega_x \omega_{\gamma\gamma} \pm 2\rho_x \rho_{\gamma\gamma},$$

$$\omega_x = \frac{m_x^2 + m_{\eta}^2 - m_{\Lambda}^2}{2m_{\eta}}, \quad \omega_{\gamma\gamma} = \frac{m_{\eta}^2 + m_{\gamma\gamma}^2 - m_{\pi}^2}{2m_{\eta}}, \quad (4.14)$$

$$m_{\Lambda\pi}(\omega_{\Lambda} - \rho_{\Lambda}) \leq m_{\Lambda\gamma} \leq m_{\Lambda\pi}(\omega_{\Lambda} + \rho_{\Lambda}),$$

$$\omega_{\Lambda} = \frac{m_{\Lambda\pi}^2 + m_{\Lambda}^2 - m_{\pi}^2}{2m_{\Lambda\pi}}. \quad (4.15)$$

Так как  $S_2 = \frac{\pi}{2}$ , то интеграл по  $m_{\gamma\gamma}^2$  есть просто разность пределов, т.е. функция  $v(m_{\Lambda\pi}^2)$  есть ширина кривой 1 рис. 8 как функция ординаты. Это кривая 2.

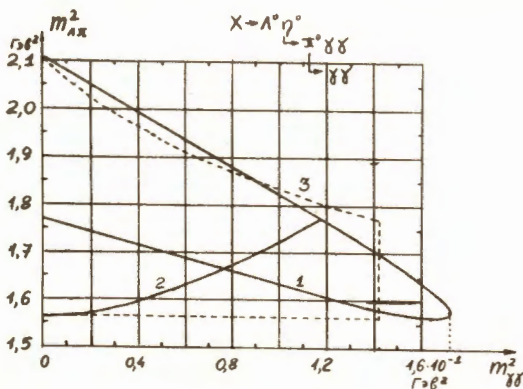


Рис. 8. Распад  $X \rightarrow \Lambda\eta \rightarrow \Lambda\pi^0\gamma\gamma \rightarrow \Lambda\gamma\gamma\gamma$  1-область интегрирования по  $m_{\gamma\gamma}^2$ , 2-функция  $v$  в (4.11); 3-спектр  $m_{\Lambda\pi}^2$



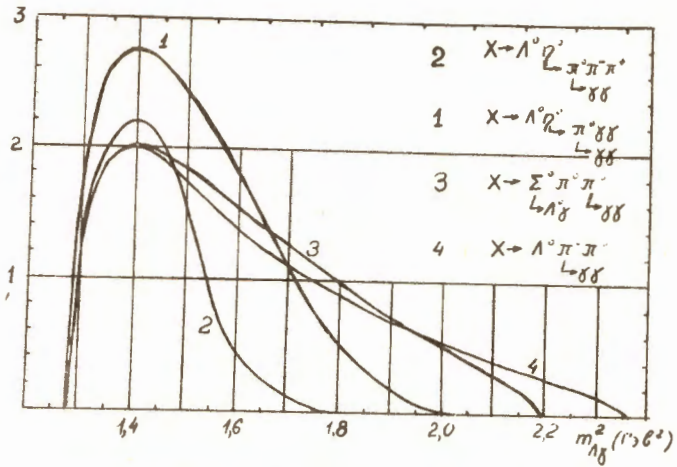


Рис. 9. Нормированные на 1 спектры  $m_{\Lambda\gamma}^2$ . Спектр 2 нормирован на 1/2.

$$\frac{v(m_{\Lambda\pi}^2)}{p_{\Lambda} m_{\Lambda\pi}} = \frac{p_{\eta}}{m_{\Lambda}} = 0,142 \quad \text{при} \quad 1,5625 \leq m_{\Lambda\pi}^2 \leq 1,77$$

$$= \frac{p_{\eta}}{2m_{\Lambda}} + \frac{m_{\eta}^2 + m_{\pi}^2 - \frac{\omega_{\eta}}{m_{\Lambda}} (m_{\Lambda\pi}^2 - m_{\Lambda}^2 - m_{\pi}^2)}{2\sqrt{m_{\Lambda\pi}^2 - (m_{\Lambda} + m_{\pi})^2} \sqrt{m_{\Lambda\pi}^2 - (m_{\Lambda} - m_{\pi})^2}}$$

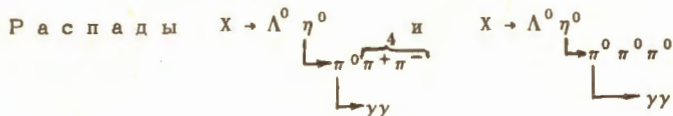
при  $1,77 \leq m_{\Lambda\pi}^2 \leq 2,1$ .

(4.18)

Эта функция (рис. 8, кривая 3) дает распределение  $m_{\Lambda\pi}^2$  или веса, с которыми надо суммировать  $\Pi$ -образные спектры  $m_{\Lambda\gamma}^2$  в пределах (4.15), чтобы получить окончательный спектр. Если обозначить первообразную функцию от  $v/p_{\Lambda} m_{\Lambda\pi}$  через  $V(m_{\Lambda\pi}^2)$ , то

$$w(m_{\Lambda\gamma}^2) = V(2,1) - v\left(\frac{m_{\Lambda\gamma}^2 (m_{\Lambda\gamma}^2 - m_{\Lambda}^2 + m_{\pi}^2)}{m_{\Lambda\gamma}^2 - m_{\Lambda}^2}\right). \quad (1,271 \leq m_{\Lambda\gamma}^2 \leq 2,053). \quad (4.17)$$

Спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  изображен на рис. 9



Зависимость пределов изменения  $m_{\Lambda\pi}^2$  от  $m_4^2$  та же, что и прежде: (4.14), т.е. изображается кривой 1 на рис. 8, но только теперь от кривой 1 отсекается участок  $m_4^2 > 4m_{\pi\pi}^2$  — это и есть область интегрирования по  $m_{\Lambda\pi}^2$ . Значит,  $m_{\Lambda\pi}^2$  изменяется в пределах  $1,5625 \leq m_{\Lambda\pi}^2 \leq 1,88$ . Зависимость пределов  $m_{\Lambda\gamma}^2$  от  $m_{\Lambda\pi}^2$  тоже прежняя: (4.15), но наибольшему  $m_{\Lambda\pi}^2$  соответствуют крайние пределы изменения  $m_{\Lambda\gamma}^2$ : 1,28 и 1,936 Гэв<sup>2</sup>. Стало быть, спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  выражается той же формулой (4.17), в которой аргумент 2,1 заменяется на 1,88, а  $m_{\Lambda\gamma}^2 \in (1,28; 1,935)$ .

Однако первообразная функция будет иной, так как теперь, из-за конечной массы  $\pi$ -мезона,  $S_2$  зависит от  $m_{\pi\pi}$  и интеграл  $v$  от  $S_2$  выражается не разностью пределов, но более сложной функцией (4.10), где  $\Phi$  есть функция, вычисляемая по формуле (2.24)

$$v(m_{\Lambda\pi}^2) = \frac{\pi}{2} [\Phi(\phi^+(m_{\Lambda\pi}^2)) - \Phi(\phi^-(m_{\Lambda\pi}^2))]. \quad (4.18)$$

Расчет по этим формулам ведется так: для ряда значений  $m_{\Lambda\pi}^2$  в интервале (1,56—1,88) снимаются с кривой 1, рис. 8, от которой отсечена область интегрирования  $m_4^2 > 4m_{\pi\pi}^2$ , значения  $m_{\Lambda\gamma}^2$  — это и есть  $\phi^+$  и  $\phi^-$ . Для каждого  $\phi^+$  и  $\phi^-$  вычисляется по (2.24)  $\Phi$  и составляется  $v(m_{\Lambda\pi}^2)$  по формуле (4.18). Затем вычисляется первообразная  $V$  функции  $v/p_1 m_{15}$  и далее в соответствии с формулой (4.17) строится спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$ . Он приведен на рис. 9.

Мы видим, что в обоих случаях максимум в спектре приходится на точку  $m_{\Lambda\gamma}^2 = 1,39$  Гэв<sup>2</sup>. Это не случайно. Можно доказать следующую теорему:

Если эффективная масса пары  $\Lambda\pi$  в некотором сколь угодно сложном каскаде может достигать своего минимального значения  $m_{\Lambda} + m_{\pi}$  (т.е. если в этом каскаде частицы  $\Lambda$  и  $\pi$  могут друг относительно друга покоиться), то спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$ , где  $\gamma$  получается от распада  $\pi^0$ , обязан иметь максимум в точке  $m_{\Lambda\gamma}^2 = (m_{\Lambda} + m_{\pi}) m_{\Lambda} = 1,39 \text{ ГэВ}^2$ . Доказательство следует из свойств функции (4.15), ограничивающей пределы изменения  $m_{\Lambda\gamma}^2$  при фиксированном  $m_{\Lambda\pi}^2$ . Если  $m_{\Lambda\pi} = m_{\Lambda} + m_{\pi}$ , то в этой формуле  $r_{\Lambda} = 0$ , и пределы изменения  $m_{\Lambda\gamma}^2$  сжимаются в одну точку  $(m_{\Lambda} + m_{\pi}) m_{\Lambda}$ . При наличии в спектре  $m_{\Lambda\pi}^2$  других значений  $m_{\Lambda\pi}^2 > (m_{\Lambda} + m_{\pi})^2$  пределы  $m_{\Lambda\gamma}^2$  раздвигаются, причем с ростом  $m_{\Lambda\pi}^2$  нижний предел только убывает (до  $m_{\Lambda}^2$ ), верхний только растет (до  $\infty$ ). Все значения  $m_{\Lambda\gamma}^2$ , отвечающие любому данному  $m_{\Lambda\pi}^2$ , ввиду изотропии распада  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , равновероятны. Так как точка  $m_{\Lambda\gamma}^2 = (m_{\Lambda} + m_{\pi}) m_{\Lambda}$  находится внутри пределов изменения  $m_{\Lambda\gamma}^2$  при любом  $m_{\Lambda\pi}^2$ , то в этой точке будет максимум.

Когда же значение  $m_{\Lambda\pi} = m_{\Lambda} + m_{\pi}$  кинематикой каскада запрещено (так было в каскаде  $X \rightarrow \Sigma^0 \pi^0$ ), то в точке  $(m_{\Lambda} + m_{\pi}) m_{\Lambda}$  будет плато, иногда настолько широкое, что весь спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  приобретает форму трапеции (как и было в случае  $X \rightarrow \Sigma^0 \pi^0$ ).

Поэтому, если нас не интересует детальная форма спектра  $m_{\Lambda\gamma}^2$ , а только положение максимума, то можно ограничиться только проверкой того, что система  $\Lambda + \pi$  в каскаде может иметь массу  $m_{\Lambda} + m_{\pi}$ , после чего положение максимума указывается однозначно.

### § 5. Распад $X \rightarrow \Lambda^0 \pi^0 \pi^0$

Если нас интересует спектр  $m_{12}^2$  из каскада  $6 \rightarrow \overset{7}{1+5} + 4$  то надо соответствующий фазовый интеграл  $\downarrow 2+3$

$$S_4 = \int \prod_1^4 d^4 p_i \delta(p_1^2 - m_1^2) \delta\left(\sum_1^4 p_i - p_6\right) \delta\left((p_2 + p_3)^2 - m_5^2\right) \quad (5.1)$$

умножить на

$$1 = \int dm_7^2 \delta(p_7^2 - m_7^2) d^4 p_7 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - p_7).$$

Он обратится в

$$S_4 = \int dm_7^2 \int d^4 p_7 \delta(p_7^2 - m_7^2) d^4 p_4 \delta(p_4^2 - m_4^2) \delta^4(p_7 + p_4 - p_6)$$

$$\int \prod_1^3 d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta((p_2 + p_3)^2 - m_5^2) \delta^4(\sum_1^3 p_i - p_7).$$

Второй интеграл есть фазовый объем пары частиц 7 и 4, т.е.

$$S_2(m_6^2, m_7^2, m_4^2) \equiv \frac{\pi p_7}{m_6}, \text{ а третий в гл. 1 был преобразован к виду}$$

$$\left(\frac{\pi}{2m_7}\right)^2 \int_{F^-}^{F^+} dm_{12}^2,$$

где

$$F^\pm = F^\pm(1, 2, 3, 5, 7). \quad (5.2)$$

Итак,

$$S_4 = \int dm_7^2 \frac{(m_6 - m_4)^2}{(m_1 + m_5)^2} S_2(m_6^2, m_7^2, m_4^2) \left(\frac{\pi}{2m_7}\right)^2 \int_{F^-}^{F^+} dm_{12}^2$$

или

$$S_4 = \frac{\pi^3}{4m_6^2} \int_{(m_1+m_5)^2}^{(m_6-m_4)^2} dm_7^2 \frac{\sqrt{(m_6+m_4)^2 - m_7^2} \sqrt{(m_6-m_4)^2 - m_7^2}}{m_7^2} \int_{F^-}^{F^+} dm_{12}^2. \quad (5.3)$$

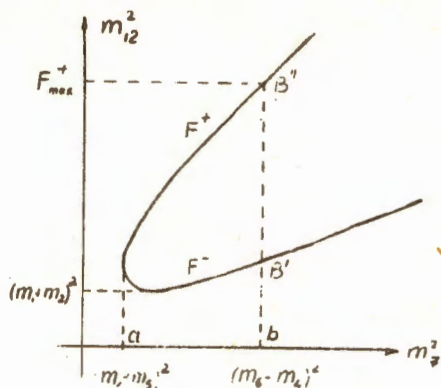


Рис. 10. Область интегрирования в (5.3) при  $m_2 \neq 0$ .

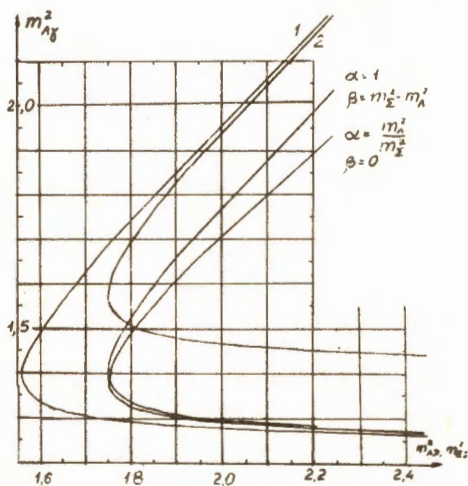


Рис. 11. 1-область интегрирования в (5.3) при  $m_2 = 0$  для распада  $\chi \rightarrow \Lambda^0 \pi^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma \gamma$ ; 2-то же для распада  $\chi \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \rightarrow \Sigma^0 \gamma \gamma$ .

Остальные две кривые - это (6.12) аналоги кривых на рис. 6 для распада  $\chi \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \rightarrow \Sigma^0 \gamma \gamma$ .

Область интегрирования показана на рис. 10 при  $m_2 \neq 0$ , на рис. 11 - при  $m_2 = 0$ . Переменим порядок интегрирования, тогда в случае рис. 10 будет:

$$S_4 = \frac{\pi^3}{4 m_6^2} \frac{F_{\max}^+}{F_{\min}^-} \int_{f^-}^{f^+} dm_{12}^2 \int_{f^-}^{f^+} dm_7^2 \frac{\sqrt{(m_6 + m_4)^2 - m_7^2} \sqrt{(m_6 - m_4)^2 - m_7^2}}{m_7^2}, \quad (5.4)$$

где

$$F_{\max}^+ = F^+(1, 2, 3, 5, 6 - 4),$$

$$F_{\min}^- = F^-(1, 2, 3, 5, 6 - 4) \quad \text{при} \quad m_2 = 0, \quad (5.5)$$

$$= (m_1 + m_2)^2 \quad \text{при} \quad m_2 \neq 0, \quad (5.6)$$

$$f^- = f^-(1, 2, 3, 5, 12),$$

$$f_{\max}^+ \begin{cases} f^+(1, 2, 3, 5, 12) & \text{при} \quad m_{12}^2 < m_2^2 (B'), \\ (m_6 - m_4)^2 & \text{при} \quad m_{12}^2 > m_2^2 (B'). \end{cases} \quad (5.7)$$

Вводя функцию (ср. с (2.18))

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_x^b dx \frac{\sqrt{a-x} \sqrt{b-x}}{x} = \quad (5.8)$$

$$= \sqrt{ab} \ln \frac{\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} + \sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} - \sqrt{\frac{a}{b}}} - \frac{a+b}{2} \ln \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}} - \sqrt{a-x} \sqrt{b-x},$$

мы представим спектр  $m_{12}^2$  в виде

$$w(m_{12}^2) = \frac{\pi^3}{4m_6^2} [\tilde{\Phi}(f^-) - \tilde{\Phi}(f^+)] \quad \text{при} \quad \frac{a}{b} = m_6 \pm m_4. \quad (5.9)$$

Ясно, что та же формула верна и для более сложного каскада  $6 \rightarrow 1544' \dots$ ,  
только теперь вид первообразной будет иным, ее придется получать численным  
интегрированием.

Теперь обратимся к нашему каскаду

$$X \rightarrow \Lambda \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi & \pi & \pi \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ L & Y & Y \end{matrix}$$

Здесь

$$S_4 = \frac{\pi^3 (m_X - m_\pi)^2}{4 m_X^2 (m_{\Lambda^+} + m_\pi)^2} \int_{F^-}^{F^+} \frac{dm_{\Lambda^+}^2}{\Lambda\pi} \frac{\sqrt{(m_X + m_\pi)^2 - m_{\Lambda^+}^2} \sqrt{(m_X - m_\pi)^2 - m_{\Lambda^+}^2}}{m_{\Lambda^+}^2} \frac{F^+}{F^-} \int d m_{\Lambda\gamma}^2. \quad (5.10)$$

где

$$F^\pm = m_{\Lambda\pi} (\omega_\Lambda \pm p_\Lambda), \quad \omega_\Lambda = \frac{m_{\Lambda\pi}^2 + m_\Lambda^2 - m_\pi^2}{2 m_{\Lambda\pi}}. \quad (5.11)$$

Область интегрирования отсекается на рис. 11 от кривой 1 прямой

$$m_{\Lambda\pi}^2 = (m_X - m_\pi)^2. \quad \text{Функция } i^- \text{ имеет вид}$$

$$i^- = m_{\Lambda\gamma}^2 (m_{\Lambda\gamma}^2 - m_\Lambda^2 + m_\pi^2) / (m_{\Lambda\gamma}^2 - m_\Lambda^2), \quad (5.12)$$

а интеграл  $S_4$

$$S_4 = \frac{\pi^3}{4 m_X^2} \int_{F_{\min}^-}^{F_{\max}^+} dm_{\Lambda\gamma}^2 \int_{i^-}^{(m_X - m_\pi)^2} \frac{dm_{\Lambda^+}^2}{\Lambda\pi} \frac{\sqrt{(m_X + m_\pi)^2 - m_{\Lambda^+}^2} \sqrt{(m_X - m_\pi)^2 - m_{\Lambda^+}^2}}{m_{\Lambda^+}^2}. \quad (5.13)$$

где

$$F_{\max}^{\pm} = m_{\Lambda\pi} (\omega_\Lambda \pm p_\Lambda) \quad \text{при} \quad m_{\Lambda\pi} = m_X - m_\pi.$$

Окончательно спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  принимает вид

$$w(m_{\Lambda\gamma}^2) = \frac{\pi^3}{4m_x^2} \{ \Phi [ \frac{m_{\Lambda\gamma}^2(m_{\Lambda\gamma}^2 - m_{\Lambda}^2 + m_{\pi}^2)}{m_{\Lambda\gamma}^2 - m_{\Lambda}^2} ] - \quad (5.14)$$

$$- \Phi [ (m_x - m_{\pi})^2 ] \} \quad \text{при} \quad \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} = m_x \pm m_{\pi}$$

Он изображен на рис. 9; максимум, в соответствии со сказанным в конце § 4, приходится на  $m_{\Lambda\gamma} = (m_{\Lambda} + m_{\pi})m_{\Lambda} = 1,39 \text{ ГэВ}^2$ .

§ 6. Распад  $\chi \rightarrow \sum^0 \pi^0 \pi^0$

Рассмотрим общий случай каскада

$$9 \rightarrow \sqrt{\frac{7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} + 8 \dots$$

и сведем его к изученному в § 3 каскаду  $7 \rightarrow \sqrt{\frac{5+6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} \dots$

Фазовый интеграл

$$S_5 = \int \prod_1^{4,8} d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta^4(\sum_1^4 p_i + p_8 - p_7) \delta((p_1 + p_2)^2 - m_5^2) \times \quad (6.1)$$

$$\times \delta((p_3 + p_4)^2 - m_6^2)$$

после умножения на

$$1 = \int dm_7^2 \delta(p_7^2 - m_7^2) d^4 p_7 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - p_7)$$

перепишется в виде

$$S_5 = \int dm_7^2 \int \prod_1^4 d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \delta^4(\sum_1^4 p_i - p_7) \times \quad (6.2)$$



$$\times \delta((p_1 + p_2)^2 - m_5^2) \times \delta((p_3 + p_4)^2 - m_6^2) \int d^4 p_7 \delta(p_7^2 - m_7^2) \int d^4 p_8 \delta(p_8^2 - m_8^2) \times \delta^4(p_7 + p_8 - p_9) . \quad (6.2)$$

Третий интеграл есть фазовый объем системы  $7 \rightarrow 56 \rightarrow 1234$  и переписывается в виде (3.12); второй же дает фазовый объем пары частиц 7 и 8,

$$S_5 = \int dm_7^2 S_2(m_9^2, m_8^2, m_7^2) \frac{\pi^3}{16 m_7^2} \int \frac{dm_{53}^2 dm_{23}^2}{p_3 m_{53}} = \quad (6.3)$$

$$= \left( \frac{\pi^2}{4 m_9 (m_5 + m_6)^2} \int dm_7^2 \frac{(m_9 - m_8)^2 \sqrt{(m_9 + m_8)^2 - m_7^2} \sqrt{(m_9 - m_8)^2 - m_7^2}}{m_7^2} \int \frac{dm_{53}^2}{2 p_3 m_{53}} \int dm_{23}^2 \right) .$$

Опять перед нами естественный рецепт вычисления спектра  $m_{23}^2$ : вычислить спектр  $m_{23}^2$  по формулам типа (3.14) для ряда значений  $m_7^2$  и сложить их с весами  $S_2 = \pi p_7 / m_9$ . Дальнейшие выкладки проведем для интересующего нас каскада  $X \rightarrow \sum^0 \pi^0 \pi^0$ . Напомним, что спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  для

данной массы  $m_{\Sigma\pi}$  практически не отличается от трапеции. Если вынести зависящий от  $m_{\Sigma\pi}$  множитель  $(2\pi)^3 / 4m_{\Sigma}^2$ , то при разных  $m_{\Sigma\pi}^2$  все трапеции имеют одну и ту же высоту  $\ln \frac{m_{\Sigma}^2}{m_{\Lambda}^2}$  (см. (3.17)), но разное взаимное расположение верхнего и нижнего оснований. При достаточно больших  $m_{\Sigma\pi}^2$  область интегрирования имеет вид, как на рис. 12а слева, так что спектр оказывается похожим на изображенный на рис. 12а справа. С уменьшением  $m_{\Sigma\pi}^2$  пределы суживаются и, наконец, начиная с некоторого  $m_{\Sigma\pi}^2 = (m_{\Sigma\pi}^2)'$ , точка  $B'$  оказывается ниже  $A''$ . Это наступает при

$$(m_{\Sigma\pi}^2)' = (m_{\Sigma} + m_{\pi})^2 + \frac{2m_{\pi} (m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2)^2}{\sqrt{2m_{\Lambda}^2 - m_{\Sigma}^2} [m_{\Lambda}^2 + m_{\Sigma} \sqrt{2m_{\Lambda}^2 - m_{\Sigma}^2}]} = \quad (6.4)$$

$$= 1,324^2 + 0,00306 ,$$

так что на узком участке  $(m_{\Sigma} + m_{\pi})^2 \leq m_{\Sigma\pi}^2 \leq (m_{\Sigma\pi}^2)'$  трапеция имеет вид, как на рис. 126 справа. При приближении  $m_{\Sigma\pi}^2$  к  $(m_{\Sigma} + m_{\pi})^2$  эта трапеция не сливается в точку, ширина ее остается конечной:

$(m_{\Sigma} + m_{\pi}) m_{\Lambda} / m_{\Sigma} \leq m_{\Lambda\gamma}^2 \leq m_{\pi} m_{\Sigma} + m_{\Lambda}^2$ , а плотность спектра стремится к нулю. Этот участок  $m_{\Lambda\gamma}^2$  очень мал: даже если частицы  $\Sigma^0$  и  $\pi^0$  друг относительно друга покоятся:  $m_{\Sigma\pi} = m_{\Sigma} + m_{\pi}$ , то  $m_{\Lambda\gamma}^2$  меняется в узком интервале (1,386; 1,403). Мы пренебрежем значениями  $m_{\Sigma\pi}^2 < (m_{\Sigma\pi}^2)'$ , а будем считать, что всюду будто бы спектр имеет вид, как на рис. 12 а справа, причем

$$A' = m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} - p_{\Sigma}) \frac{m_{\Lambda}^2}{m_{\Sigma}^2}, \quad A'' = m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} - p_{\Sigma}) - m_{\Sigma}^2 + m_{\Lambda}^2; \quad (6.5)$$

$$B' = m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} + p_{\Sigma}) \frac{m_{\Lambda}^2}{m_{\Sigma}^2}, \quad B'' = m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} + p_{\Sigma}) - m_{\Sigma}^2 + m_{\Lambda}^2.$$

Обозначая спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  при данном  $m_{\Sigma\pi}^2$  через  $\frac{2\pi^3}{m_{\Sigma\pi}^2} \Psi(m_{\Lambda\gamma}^2, m_{\Sigma\pi}^2)$ , перепишем (6.3) так:

$$S_5 = \frac{\pi^4}{m_x^2} \frac{(m_x - m_{\pi})^2}{\int_{(m_{\Sigma} + m_{\pi})^2}^{d m_{\Sigma\pi}^2} \sqrt{(m_x + m_{\pi})^2 - m_{\Sigma\pi}^2} \sqrt{(m_x - m_{\pi})^2 - m_{\Sigma\pi}^2}}{m_{\Sigma\pi}^2} \times \quad (6.6)$$

$$\times \Psi(m_{\Lambda\gamma}^2, m_{\Sigma\pi}^2).$$

Рассчитаем спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$ , приближая функцию  $\Psi$  прямоугольником, заключенным между точками А и В с одним или двумя штрихами (сколько их, пока не оговаривается). Будем рассуждать так. Представим  $\Psi$  в виде

$$\Psi(m_{\Lambda\gamma}^2, m_{\Sigma\pi}^2) = \int_A^B d m_{\Lambda\gamma}^2, \quad (6.7)$$

где

$$A = \alpha_1 m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} - p_{\Sigma}) - \beta_1, \quad B = \alpha_2 m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} + p_{\Sigma}) - \beta_2, \quad (6.8)$$

а  $\alpha$  и  $\beta$  в зависимости от количества штрихов при  $A$  и  $B$  равны либо  $\alpha = m_{\Lambda}^2 / m_{\Sigma}^2$ ,  $\beta = 0$ , либо  $\alpha = 1$ ,  $\beta = m_{\Sigma}^2 - m_{\Lambda}^2$ . Сопоставим спектры  $m_{\Lambda\gamma}^2$  из распадов  $X \rightarrow \Lambda^0 \pi^0 \pi^0$  и  $X \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \pi^0$ . В первом распаде (см. 8.5) фазовый интеграл имел вид (6.10)

$$S \sim \frac{(m_X - m_{\pi})^2}{(m_{\Lambda} + m_{\pi})^2} \int dm_{\Lambda\pi}^2 \frac{\sqrt{(m_X + m_{\pi})^2 - m_{\Lambda\pi}^2} \sqrt{(m_X - m_{\pi})^2 - m_{\Lambda\pi}^2}}{m_{\Lambda\pi}^2} \frac{m_{\Lambda\pi} (\omega_{\Lambda} + p_{\Lambda})}{\int dm_{\Lambda\gamma}^2} \frac{1}{m_{\Lambda\pi} (\omega_{\Lambda} - p_{\Lambda})}, \quad (6.9)$$

а мы теперь хотим представить фазовый интеграл второго распада близким образом:

$$S \sim \frac{(m_X - m_{\pi})^2}{(m_{\Sigma} + m_{\pi})^2} \int dm_{\Sigma\pi}^2 \frac{\sqrt{(m_X + m_{\pi})^2 - m_{\Sigma\pi}^2} \sqrt{(m_X - m_{\pi})^2 - m_{\Sigma\pi}^2}}{m_{\Sigma\pi}^2} \frac{\alpha_2 m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} + p_{\Sigma}) - \beta_2}{\int dm_{\Lambda\gamma}^2} \frac{1}{\alpha_1 m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} - p_{\Sigma}) - \beta_1}, \quad (6.10)$$

Области интегрирования в обоих случаях показаны на рис. 11.

Когда мы в (6.9) меняли порядок интегрирования, то пределы  $F_{\max}^{\pm}$  изменения  $m_{\Lambda\gamma}^2$  мы получили, подставив в  $m_{\Lambda\pi} (\omega_{\Lambda} \pm p_{\Lambda})$  наибольшее допустимое значение  $m_{\Lambda\pi} = m_X - m_{\pi}$ . Сейчас у нас предельные значения  $m_{\Lambda\gamma}^2$  также достигаются при  $m_{\Lambda\pi\max} = m_X - m_{\pi}$ , но только подставлять это значение надо в формулу (6.8):

$$\alpha_1 m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} - p_{\Sigma}) - \beta_1 \leq m_{\Lambda\gamma}^2 \leq \alpha_2 m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} + p_{\Sigma}) - \beta_2, \quad (6.11)$$

$$m_{\Sigma\pi} = m_{\chi} - m_{\pi}, \quad \omega_{\Sigma} = \frac{m_{\Sigma\pi}^2 + m_{\Sigma}^2 - m_{\pi}^2}{2m_{\Sigma\pi}}.$$

Далее, при фиксированном  $m_{\Lambda\gamma}^2$  нижний предел изменения  $m_{\Lambda\pi}^2$  давался формулой (5.12) - корнем уравнения

$$m_{\Lambda\pi} (\omega_{\Lambda} \pm p_{\Lambda}) = m_{\Lambda\gamma}^2.$$

Теперь вместо этого нижний предел  $m_{\Sigma\pi}^2$  получится из уравнения

$$\alpha m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} \pm p_{\Sigma}) - \beta = m_{\Lambda\gamma}^2. \quad (6.12)$$

Если перепишем его в виде

$$m_{\Sigma\pi} (\omega_{\Sigma} \pm p_{\Sigma}) = \frac{m_{\Lambda\gamma}^2 + \beta}{\alpha},$$

то ясно, что его решение будет даваться формулой (5.12), куда вместо  $m_{\Lambda\gamma}^2$  подставлено  $(m_{\Lambda\gamma}^2 + \beta)/\alpha$ :

$$m_{\Sigma\pi}^2 \geq \frac{\frac{m_{\Lambda\gamma}^2 + \beta}{\alpha} \left( \frac{m_{\Lambda\gamma}^2 + \beta}{\alpha} - m_{\Sigma}^2 + m_{\pi}^2 \right)}{\frac{m_{\Lambda\gamma}^2 + \beta}{\alpha} - m_{\Sigma}^2} = f_{\Sigma}^{-}(m_{\Lambda\gamma}^2, \alpha, \beta). \quad (6.13)$$

Верхний предел  $m_{\Sigma\pi}^2$  будет по-прежнему  $(m_{\chi} - m_{\pi})^2$ .

Далее, функция  $\tilde{\Phi}$  будет той же, что и в § 5, так как в нее входят только массы  $m_{\chi}$  и  $m_{\pi}$ . Итак, спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  приближенно равен

$$w(m_{\Lambda\gamma}^2) = \frac{\pi^3}{4m_{\chi}^2} \{ \tilde{\Phi}[f_{\Sigma}^{-}(m_{\Lambda\gamma}^2, \alpha, \beta)] - \tilde{\Phi}[(m_{\chi} - m_{\pi})^2] \}, \quad (6.14)$$

$$\frac{a}{b} = m_{\chi} \pm m_{\pi}.$$

где  $m_{\Lambda\gamma}^2$  меняется в пределах (8,11), а  $\alpha$  и  $\beta$  берутся разными на разных участках в зависимости от того, какими ветвями кривых А и В на рис. 11 мы решим ограничить спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  на рис. 12. На рис. 13 приведен спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  от распада  $\chi \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \pi^0$ , рассчитанный в двух крайних предположениях: когда прямоугольный спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  "описан" вокруг трапеции рис. 12а и когда он "вписан" в нее. Истинный спектр находится где-то между этими двумя кривыми; он довольно тесно зажат ими. Более широкий из этих спектров перенесен на рис. 9.

## § 7. Заключение

Итогом всех проведенных расчетов служат графики на рис. 3,5,9. Из них следует, что единственной конкурентоспособной альтернативой объяснению пика в  $m_{\Lambda\gamma}^2$  с помощью  $\Lambda\eta$ -резонанса является объяснение его наличием  $\Sigma^0 \eta$ -резонанса, что не менее любопытно. Все другие истолкования приводят либо к более широким максимумам (как, например,  $\Sigma^0 \pi^0$ ,  $\Lambda^0 \omega^0$ ,  $\Lambda^0 \rho^0$ -резонансы) либо к пикам в области меньших эффективных масс (спектры  $m_{\Lambda\gamma}^2$  для различных комбинаций  $\Lambda$  и  $\gamma$  в каскадах

$$\chi \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \pi^0, \quad \chi \rightarrow \Lambda^0 \pi^0 \pi^0, \quad \chi \rightarrow \Lambda\eta^0 \rightarrow \Lambda\pi^0 \gamma\gamma, \quad \chi \rightarrow \Lambda\eta^0 \rightarrow \Lambda\pi^0 \pi^0 \pi^0).$$

Встает вопрос, насколько полон этот анализ, "заявки" всех ли конкурентов мы рассмотрели. Гарантировать полноту рассмотрения невозможно, однако целые классы "конкурентов" отбрасываются:

а) в § 1, где отыскиваются все распады типа  $\chi \rightarrow \Lambda^0 \Upsilon \rightarrow \gamma\gamma$  и  $\chi \rightarrow \Lambda^0 \Upsilon \rightarrow \pi^0 \pi^0$ , приводящие к пику в наблюдавшейся области  $m_{\Lambda\gamma}^2$ , и ничего лучшего, чем  $\Lambda\eta$ -резонанс, не обнаруживается;

б) рисунком 6, который позволит после более точного промера формы максимума в  $m_{\Lambda\gamma}^2$  удостовериться, не наблюдался ли здесь  $\Sigma^0 \eta^0$ -резонанс;

в) теоремой § 4 о пике в  $m_{\Lambda\gamma}^2$  от распада  $\Lambda\Upsilon \rightarrow 2\gamma$ . Этот пик при  $\Upsilon = \pi^0$  придется на 1,39, при  $\Upsilon = \eta^0$  на 1,86 Гэв<sup>2</sup> безотносительно к спектру масс; только при отсутствии в спектре масс участка близ  $m_{\Lambda} + m_{\Upsilon}$  пик превращается в плато, тем более широкое, чем шире этот участок. С этих позиций нацело

закрывается  $\pi^0$ -мезон как источник  $\gamma$ -квантов, приведших к пику в  $m_{\Lambda\gamma}^2$  в области 1,7 - 2,0 Гэв<sup>2</sup>, откуда бы этот  $\pi^0$ -мезон ни появлялся, и на первое место в качестве источника  $\gamma$ -квантов выдвигается  $\eta^0$ -мезон, безотносительно к тому, существует ли  $\Lambda\eta$ -резонанс или не существует.

Наконец, не следует сбрасывать со счетов и возможность того, что наблюдался радиационный каскад

$$Y_1^*(1660) \rightarrow Y_1^*(1385) + \gamma$$

$$\quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad \Lambda^0 \pi$$

(см. конец § 1), который приводит к спектрам недалеко от экспериментально наблюдавшейся области.

Автор должен поблагодарить Ю. Будагова, А. Володько, А. Кузнецова за постановку задачи и ценные обсуждения.

#### Литература

1. Б.Л. Иоффе. ЖЭТФ, 43, 341 (1962).
2. Ван Юн-чан, Ким Хи Ин, Е.Н. Кладницкая, Г.И. Копылов, А.А. Кузнецов, Н.Н. Мельникова, Нгуен Дин Ты, Е.С. Соколова. Препринт ОИЯИ, Р-1616, Дубна, 1964; Труды Международной конференции по физике высоких энергий, Дубна, 1964 г., т. 1, стр. 615.
3. R. Armenteros, Rapporteur Report, Proceedings of the XII Internat. Conference on High Energy Physics, Dubna, 1964, v. 1, p. 617.
4. D. Berley, P.L. Connolly, E.L. Hart, D.C. Rahm, D.L. Stonehill, B. Thevenet, W.J. Willie, S.S. Yamamoto. Phys. Rev. Lett., 15, N 15, 641 (1965).
5. В.Р. Банник, Е.С. Бабелев, В. Chadraa, I.V. Chuvilo, Kim Hi In, G. I. Kopylov, A.A. Kuznetsov, N.N. Melnikova, G.L. Rezvaya, V. Boldea, S. Felea, A. Mihul, D. Murnianu, T. Ponta, K. Myklebost. Preprint, E-2858, Dubna, 1966.
6. Ю.Н. Будагов и др. Доклад на конференции в Беркли 1966 г.
7. В.Е. Комолова, Г.И. Копылов. Препринт ОИЯИ, Р-2027, Дубна, 1965.
8. Г.И. Копылов. ЖЭТФ, 46, № 6, 2063 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел  
30 ноября 1966 г.

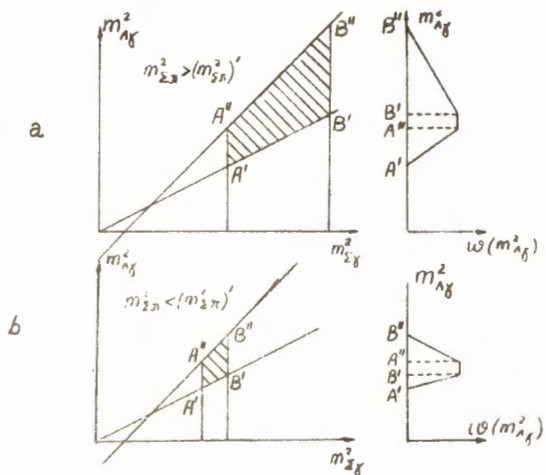


Рис. 12. Область интегрирования во внутренних интегралах (6.3) при разных  $m_{\Sigma\pi}^2 = m_7^2$ .

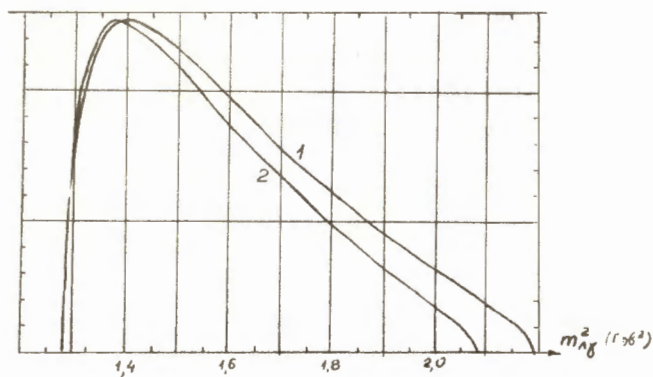


Рис. 13. Кривая 1—спектр  $m_{\Lambda\gamma}^2$  от распада  $\chi \rightarrow \Sigma^0 \pi^0 \pi^0$  при замене трапеций на рис. 12а справа прямоугольниками ширины  $A'B''$ ; кривая 2 — прямоугольниками ширины  $A'B'$ .