ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов

Р-964

ЗАМЕЧАНИЕ О НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ТЕОРИЯХ

ЖЭТФ, 1962, т 43, в 3, с 1057-1059.

Дубна 1962 год

Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов

Р-964

ЗАМЕЧАНИЕ
О НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ТЕОРИЯХ

Дубна 1962 год

Аннотация

Показано, что процедура аналитического продолжения по константе связи g^2, предлагаемая в работах [1,2] для устранения ультрафиолетовых расходимостей в неперенормируемых теориях, приводит к комплексным значениям наблюдаемых величин.

Abstract

It is shown that the procedure of the analytical extention over the coupling constant g^2 which was suggested in [2] for removing the ultra-violet divergences in the unrenormalized theories, leads to the complex values of the observable quantities.

В работах Арновита и Дезера[1], а также Купера[2], делается попытка с помощью процедуры аналитического продолжения по константе связи g^2 устранить ультрафиолетовые расходимости в некоторых неперенормируемых моделях теории поля. Авторы показали, что нуклонная функция Грина, как функция времени $G(g^2, t)$, имеет существенно особую точку в $t = 0$ или, как функция энергии $G(g^2, E)$, имеет точку ветвления по константе связи g^2 в точке $g^2 = 0$. Применив процедуру аналитического продолжения по g^2, они получили конечное выражение для функции Грина в случае точечного взаимодействия. Отсюда авторы делают вывод, что неперенормируемость взаимодействия связана с разложением по g^2 в теории возмущения.

Ниже на модели, идентичной рассмотренным в[1,2], будет показано, что вывод этих авторов ошибочен, так как предлагаемая ими процедура аналитического продолжения по g^2 приводит к комплексным значениям наблюдаемых величин E_N /собственное значение энергии однонуклонного состояния/, g_r /перенормированная константа связи/, что противоречит эрмитовости гамильтониана.

Рассматриваемая модель является неперенормируемым аналогом изученной нами ранее[3] модели, описывающей взаимодействие скалярного мезона со статическим нуклоном, который может находиться в двух состояниях /протон p и нейтрон n /, отличающихся друг от друга по массе. Гамильтониан в представлении взаимодействия имеет вид:

$$H_I(t) = g(\psi^+ \tau_1 \psi)\hat{\pi}(t) + \Delta m_0 (\psi^+ \tau_3 \psi), \qquad /1/$$

где

$$\hat{\pi}(t) = \int d\vec{x}\, \rho(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega}} (-i\omega)(a^-_{\vec{k}} e^{i\omega t} - a^+_{\vec{k}} e^{i\omega t}), \qquad /2/$$

$\rho(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} v(k)\, e^{i\vec{k}\vec{x}}$ — функция обрезания, $v(k) = \exp\{-\frac{\omega - \mu}{2L}\}$.

Остальные обозначения совпадают с обозначениями[3]. Причинная функция $D(t_1 - t_2)$ определяется соотношением

$$iD(t_1 - t_2) = \langle 0 | T(\hat{\pi}(t_1)\hat{\pi}(t_2)) | 0 \rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{\omega^2 v^2(k)}{2\omega} e^{-i\omega|t_1 - t_2|}. \qquad /3/$$

В остальном модель полностью совпадает с[3], и можно непосредственно использовать результаты работы[3].

Рассмотрим выражение для собственного значения энергии однонуклонного состояния E_N $(N = p, n)$. В случае взаимодействия /1/, повторяя выкладки работы[3] /см. в[3] Приложение Б и формулу /8/ /, получим:

$$E_N = m + \delta_N \Delta m \sum_{q=0}^{\infty} (\delta_N\, i \Delta m)^q \int_0^{\infty} dx_1 \ldots \int_0^{\infty} dx_q \; x_1 \ldots x_q \frac{\partial^q}{\partial x_1 \ldots \partial x_q} \exp \{ f_q (x_1 \ldots x_q) \}, \qquad /4/$$

где

$$f_q(x_1, \ldots, x_q) = 2g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega} \sum_{\ell=1}^{q} \sum_{m=1}^{\ell} (-)^{\ell+m}\, e^{-i\omega \sum_{j=m}^{\ell} x_j},$$

$$m = m_0 - \tfrac{1}{2} g^2 \sum_{\vec{k}} v^2(k) ; \qquad \Delta m = \Delta m_0 \exp \{ - g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega} \},$$

m и Δm – конечные параметры /подробнее см.[3]/.

$$\delta_N = 1 \quad (N = p), \qquad \delta_N = -1 \quad (N = n) .$$

Ограничимся исследованием лишь члена ряда /4/ при Δm^2

$$\varsigma_2 = - \frac{E_2}{\Delta m^2} = -i \int_0^{\infty} dx \; x \frac{\partial}{\partial x} \exp \{ f_1(x) \} = i \int_0^{\infty} dx \, [\exp \{ f(x) \} - 1]$$

$$f(x) = f_1(x) = 2g^2 \sum_{\vec{k}} \frac{v^2(k)}{\omega} e^{-i\omega x} . \qquad /5/$$

В случае перенормируемого взаимодействия, рассмотренного в[3], функция $\exp \{ f(z) \}$ является интегрируемой в $z = 0$ при условии $g^2/\pi^2 < 1$, а в области $0 \le \arg z \le \pi/2$ является аналитической и достаточно быстро убывает на бесконечности. Поэтому в /5/ можно произвести замену переменных $x = -iy$ и перейти от интегрирования по лучу $[0, i\infty)$ к $[0, \infty)$, так что ς_2 является действительной величиной при перенормируемом точечном взаимодействии[3].

В случае неперенормируемого взаимодействия /1/ функция $f(z)$ в /5/ ведет себя при малых z и больших L следующим образом:

$$f(z) \approx \frac{g^2}{\pi^2} \left(iz\mu + \frac{\mu}{L} \right)^{-2} ; \qquad \left| \frac{\mu}{L} + iz\mu \right| \ll 1 . \qquad /6/$$

При конечных L $\exp\{f(z)\}$ аналитична в $z=0$ и достататочно хорошо убывает в области $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$, т.е. Q_2 является действительной величиной, как и в перенормируемом случае, и равна:

$$Q_2 = \int_0^\infty dx\,[\,\exp\{f(-ix)\}-1\,]\,. \qquad /7/$$

Однако в /7/ нельзя перейти к $L\to\infty$, поскольку интеграл в $ix=0$ расходится $f(-ix)\underset{x\to 0}{\to} \frac{g^2}{\pi^2}\left(x^2+\frac{1}{L}\right)^{-2}$. Если же перейти к $L\to\infty$ до замены переменных $x=-iy$, то будем иметь конечное, но комплексное значение Q_2 :

$$Q_2 = i\int_0^\infty dx\,[\,\exp\{f(x)\}-1\,]\,. \qquad /8/$$

Интеграл /8/ сходится, поскольку при $L\to\infty$ $f(x)\underset{\substack{x\to 0\\ L=\infty}}{\to} -\frac{g^2}{\pi^2}\frac{1}{x^2}$.

Противоречие между /7/ и /8/ произошло из-за незаконного перенесения предельного перехода $L\to\infty$ в /5/ под знак интеграла. Поясним простым примером:

$$J = \lim_{a\to 0}\,(-2i)\int_0^\infty \frac{dx}{(ix+a)^3}\, e^{\frac{1}{(ix+a)^2}} = \lim_{a\to 0} e^{\frac{1}{a^2}} = \infty\,.$$

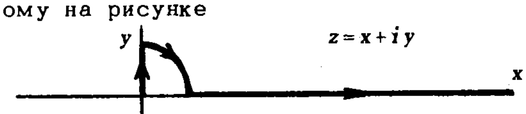
Если же перейти к $a=0$ под знаком интеграла, то

$$J = 2\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} = 1\,.$$

Покажем теперь, что процедура аналитического продолжения по g^2, предложенная в [1,2], приводит к неправильному результату /8/. Действительно, положим в /7/ $g^2=-g_1^2$ $(g_1^2>0)$ и перейдем к $L=\infty$, тогда

$$Q_2(g_1^2) = \int_0^\infty dx\,[\,\exp\{-2g_1^2\sum_{\vec k}\frac{e^{-\omega x}}{\omega}\}-1\,]\,. \qquad /9/$$

Как показано в [2], аналитическое продолжение $Q_2(g_1^2)$ в область отрицательных g_1^2 $(g_1^2=-g^2)$ соответствует изменению контура интегрирования от луча $[0,\infty)$ в /9/ к контуру, показанному на рисунке



Поскольку подынтегральная функция в /9/ аналитична в области $0\le \arg(x+iy)\le \pi/2$ с исключенной окрестностью $x+iy=0$, то можно перейти к интегрированию по оси y и таким образом перейти к комплексному выражению /8/.

Аналогично можно показать, что и для перенормированной постоянной связи g_r получается комплексное выражение.

Из вышесказанного следует, что гамильтониан /1/ является неперенормируемым, так как процедура аналитического продолжения по g^2 приводит к конечным, но бессмысленным с физической точки зрения результатам.

Литература

1. *R.Arnowitt, S.Deser. Phys. Rev. 100, 349 (1955).*
2. *L.Cooper. Phys. Rev. 100, 362 (1955).*
3. Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов. ЖЭТФ, 40, 848 /1961/.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 апреля 1962 г.