ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

П.Х. Бырнев, В.А. Мещеряков, И.П. Недялков

Р-949

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Дубна 1962 год

П.Х. Бырнев, В.А. Мещеряков, И.П. Недялков

Р - 949

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

В настоящей работе рассматривается задача определения низших парциальных волн упругого $\pi-\pi$ и $\pi-n$ рассеяния при малых энергиях.

Эта задача обычно сводится к решению систем нелинейных сингулярных интегральных уравнений[1,4,5,6,7,8]. О свойствах решений этих уравнений почти ничего не известно. Вообще неясно, существуют ли такие решения, и, если существуют, какую имеют множественность. Численные способы решения этих уравнений тоже неудовлетворительны.

Авторы ставят себе цель прямым путем свести задачу определения низших парциальных волн упругого $\pi-\pi$ и $\pi-n$ рассеяния при малых энергиях к системе алгебраических уравнений. Мы стремились из бесчисленного множества подобных систем выбрать ту, которая близка к оптимальной как с точки зрения простоты, так и с точки зрения удобства для теоретического рассмотрения и для применения численных способов решений.

1. Определение низших парциальных волн для упругого $\pi-\pi$ и $\pi-n$ рассеяния сводится к одной своеобразной краевой задаче[1], которую, например, при $\pi-n$ рассеянии можно сформулировать следующим образом[x]. Найти функции $h'_\alpha(z')$ комплексного переменного $z'=x'+iy'$

$\alpha = 1, 2, 3, \dots N$ ($N=1$[9], $N=2$[9], $N=3$[1], $N=4$[3]),

удовлетворяющие условиям (I'), (II'), (III').

(I') $h'_\alpha(z')$ – аналитические функции комплексного переменного z' в плоскости z' с разрезами $(-\infty,-1)$ и $(+1,+\infty)$ за исключением точки $z'=0$, где они имеют простые полюса с вычетами λ_α. Функции $h'_\alpha(x')$ гладкие и в бесконечности убывают не медленнее, чем $1/x$.

Вектор λ_α имеет вид:

$$\lambda_\alpha = 2/3\ f^2\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{для} \quad N=3$$

и

$$\lambda_\alpha = 2/3\ f^2\begin{pmatrix}4\\1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{для} \quad N=4,$$

где f^2 – константа связи.

(II') $h'_\alpha(x'+i\epsilon)$ удовлетворяют соотношениям унитарности:

---

[x] В изложении мы будем иметь в виду конкретное $\pi-n$ рассеяние, однако, выведенные формулы применимы и к $\pi-\pi$ рассеянию. Вообще же метод, который описывается в этой работе, с несущественными изменениями применим и к более широким кругам задач подобного типа.

$$Im\, h^{\prime}_{\alpha}\, (x^{\prime}+i\epsilon) = p^{\prime 3}(x^{\prime})\, v^{\prime 2}(p^{\prime})\, |h^{\prime}_{\alpha}\, (x^{\prime}+i\epsilon)|^{2} \qquad 1 \le x^{\prime} < \infty\ , \qquad /1/$$

где $p^{\prime} = \sqrt{x^{\prime 2}-1}$ – импульс мезона в системе центра инерции, $x^{\prime}$ – полная энергия мезона в той же системе, а $v^{\prime} = v^{\prime}(p^{\prime})$ – функция "обрезания" /1,2/.

(III') $h^{\prime}_{\alpha}\,(x^{\prime})$ удовлетворяют перекрестным соотношениям

$$h^{\prime}_{\alpha}\,(-x^{\prime}-i\epsilon) = A_{\alpha\beta}\, h^{\prime}_{\beta}\,(x^{\prime}+i\epsilon) \qquad 1 \le x^{\prime} < \infty\ . \qquad /2/$$

При $N=3$ $A_{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/9 & -8/9 & 16/9 \\ -2/9 & 7/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

При $N=4$ $A_{\alpha\beta}$ дается формулой:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & -4/9 & 16/9 \\ -2/9 & -1/9 & 8/9 & 4/9 \\ -2/9 & 8/9 & -1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 2/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Функции $h^{\prime}_{\alpha}\,(z^{\prime})$ связаны с амплитудой рассеяния δ_{α} p – волны при помощи соотношений:

$$h^{\prime}_{\alpha} = \frac{e^{i\delta_{\alpha}}\, \sin\delta_{\alpha}}{p^{\prime 3}\, v^{\prime 2}}\ , \qquad /3/$$

причем α имеет соответственно значения: для $N=3$:

$(1/2, 1/2) \to \alpha = 1$

$(1/2, 3/2) = (3/2, 1/2) \to \alpha = 2$

$(3/2, 3/2) \to \alpha = 3$;

для $N=4$:

$(1/2, 1/2) \to \alpha = 1$

$(1/2, 3/2) \to \alpha = 2$

$(3/2, 1/2) \to \alpha = 3$

$(3/2, 3/2) \to \alpha = 4$.

Первый индекс в скобках – полный изотопический спин системы пион-нуклон, второй – полный момент той же системы.

2. Рассмотрим функцию

$$z^{\prime} = f(z) = \frac{2z}{1+z^{2}}\ . \qquad /4/$$

Она конформно преобразует плоскость z в плоскость z', причем единичный круг $|z'|<1$ переходит в плоскость с разрезами $(-\infty, -1)$ и $(+1, +\infty)$.

В (I') заменим переменную z' на z. Тогда функция $h'_\alpha(z')$ переходит в функцию $h_\alpha(z)$, которая имеет следующее свойство:

(I) $h_\alpha(z)$ аналитична в единичном круге $|z|<1$ за исключением точки $z=0$, где она имеет полюс с вычетом $\lambda_\alpha/2$, а функция $h_\alpha(z)\big|_{|z|=1}$ – кусочногладкая.

Конформное преобразование /4/ переводит разрезы плоскости z' в единичную окружность $|z|=1$ по формуле:

$$\cos\phi = 1/x' \quad . \qquad /5/$$

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением

$$F(\phi) = p'^3\left(\frac{1}{\cos\phi}\right) v'^2(p') = p'^3(x')\, v'^2(p') .$$

Будем предполагать, что функция $F(\phi)$ – кусочногладкая.

Представление функции комплексного переменного при помощи двух сопряженных гармонических функций инвариантно относительно конформного преобразования. Следовательно, если имеется какое- то соотношение между действительными и мнимыми частями данной функции комплексного переменного, оно сохраняет свой вид и после конформного преобразования. Отсюда вытекает, что свойство (II') не изменится:

(II) $h_\alpha(\phi)$ удовлетворяет соотношениям унитарности:

$$Im\ h_\alpha(\phi) = F(\phi)\,|\,h_\alpha(\phi)\,|^2 \qquad -\pi/2 < \phi < \pi/2 \ . \qquad /6/$$

После конформного преобразования (III') переходит в (III)

(III) $h_\alpha(\phi)$ удовлетворяет перекрестным соотношениям:

$$h_\alpha(\phi+\pi) = \sum_{\beta=1}^{N} A_{\alpha\beta}\, h_\beta(\phi) . \qquad /7/$$

Тем самым задача сводится к нахождению функции $h_\alpha(\phi)$. Наша цель – решение задачи, сформулированной условиями (I), (II), (III).

Из (I) вытекает, что $h_\alpha(z)$ можно представить в виде:

$$h_\alpha(z) = \frac{\lambda}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n , \qquad /8/$$

причем все коэффициенты действительные, что следует из условия

$$h'^*_\alpha(z') = h'_\alpha(z'^*) .$$

Для единичной окружности $|z|=1$ из /8/ получаем два Фурье-ряда:

$$Re\ h_\alpha(\phi)\Big|_{|z|=1} = a_0 + (\lambda_\alpha/2 + a_1)\cos\phi + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos n\phi , \qquad /9/$$

$$\operatorname{Im}_{|z|=1} h_\alpha(\phi) = (-\frac{\lambda_\alpha}{2} + a_1) \sin\phi + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sin\phi \, . \qquad /10/$$

Что касается функции $F(\phi)$, надо иметь в виду следующее: симметрии в $F(\phi)$ получаются из симметрий в функциях p^3 и v^2. Известно, что функция $p' = \sqrt{z^{12}-1}$ имеет свойство $p'(+x'+i\epsilon') = p'(-x'-i\epsilon')$. Отсюда вытекает, что $p(\phi) = p(\phi+\pi)$. Кроме того, $p'(+x'+i\epsilon') = -p'(x'-i\epsilon)$, т.е. $p(\phi) = -p(-\phi)$. v^2 зависит от p^2; поэтому во всех соответствующих точках четырех квадрантов она имеет одинаковые значения. Следовательно, $F(\phi)$ имеет свойства:

$$F(\phi) = -F(-\phi)$$

и

$$F(\phi) = F(\phi + \pi) \, .$$

Первое из двух равенств показывает, что $F(\phi)$ разлагается по синусам, а второе – что в разложении должны отсутствовать члены с нечетным индексом n:

$$F(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{2n} \sin 2n\phi \, , \qquad /11/$$

где F_{2n} – известные числа.

Функция

$$D_\alpha(\phi) = \operatorname{Im}_{|z|=1} h_\alpha(\phi) - F(\phi) \left| h_\alpha(\phi) \right|^2_{|z|=1} \qquad /12/$$

периодическая с периодом 2π и может быть представлена при помощи Фурье-ряда:

$$D_\alpha(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(\alpha)} \sin n\alpha \, . \qquad /13/$$

Из /6/ видно, что $D_\alpha(\phi) = 0$ для всех ϕ в интервале $-\pi/2 < \phi < \pi/2$.

Для того, чтобы ряд /13/ обращался в нуль в интервале $-\pi/2 < \phi < \pi/2$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $D_1^{(\alpha)}, D_2^{(\alpha)}, D_3^{(\alpha)}, \ldots$ удовлетворяли уравнениям:

$$\pi/2 \, D_{2n}^{(\alpha)} - 4n \, (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} D_{2p+1}^{\alpha} \frac{(-1)^p}{(2n)^2 - (2p+1)^2} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \, .$$

Подставим /9/, /10/ и /11/ в /12/ и сравним полученное выражение с разложением /13/. Тогда для $D_k^{(\alpha)}$ получаем:

$$D_k^{(\alpha)} = \sum_m C_{km}^{(\alpha)} a_m^{(\alpha)} + \sum_{m,n} D_{kmn}^{(\alpha)} a_m^{(\alpha)} a_n^{(\alpha)} \, , \qquad /15/$$

причем коэффициенты $C_{km}^{(\alpha)}$ и $D_{kmn}^{(\alpha)}$ содержат F_e в степени не выше 1.

Подстановка /15/ в /14/ приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{km}^{(\alpha)} a_m^{(\alpha)} + \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{kmn}^{(\alpha)} a_m^{(\alpha)} a_n^{(\alpha)} = 0 \qquad \begin{matrix} (\alpha = 1, 2, \ldots N) \\ (k = 1, 2, \ldots \infty) \end{matrix} \qquad /16/$$

для неизвестных $a_m^{(\alpha)}$, которая эквивалентна соотношению унитарности *(II)*.

Алгебраическая система уравнений, соответствующая перекрестным соотношениям, получается или при помощи подстановки /9/ в /7/, или при помощи подстановки /10/ в /7/. Для трехрядной матрицы $A_{\alpha\beta}$ эта система имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&a_n^{(2)} = 2a_n^{(3)} - a_n^{(1)} && \text{для} \quad n = 0, 2, 4, 6, \ldots \\
&a_n^{(1)} = -2a_n^{(3)} && \text{для} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \\
&a_n^{(2)} = -\tfrac{1}{2}\, a_n^{(3)} && \text{для} \quad n = 1, 3, 5, \ldots
\end{aligned}
\qquad /17/
$$

Тем самым краевая задача *(I')*, *(II')*, *(III')* сведена к системам алгебраических уравнений /16/ и /17/.

§ 4.

Систему /16/, /17/ можно решать любыми известными в нелинейном анализе методами[10]. Мы остановимся коротко на методе Ньютона, который имеет некоторые преимущества.

Пусть
$$a_n^{(\alpha)} = b_n^{(\alpha)} + x_n^{(\alpha)},$$

где $b_n^{(\alpha)}$ – приблизительное значение $a_n^{(\alpha)}$, а $x_n^{(\alpha)}$ –малые поправки. Линеаризированные системы /16/ и /17/ после обрывания на K-ом члене при $N = 3$ записываются:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{K} A_{km}^{(\alpha)} x_m^{(\alpha)} + \sum_{m,n=0}^{K} B_{kmn}^{(\alpha)} \left(b_m^{(\alpha)} x_n^{(\alpha)} + b_n^{(\alpha)} x_m^{(\alpha)} \right) = \\
&= -\sum_{m=0}^{K} A_{km}^{(\alpha)} b_m^{(\alpha)} - \sum_{m,n=0}^{K} B_{kmn}^{(\alpha)} b_m^{(\alpha)} b_n^{(\alpha)}
\end{aligned}
\qquad /18/
$$

$$(\alpha = 1,2,3)$$
$$(k = 1,2, \ldots K)$$

$$
\begin{aligned}
&x_n^{(2)} = 2x_n^{(3)} - x_n^{(1)} && \text{для} \quad n = 0,2,4,6 \ldots \\
&x_n^{(1)} = -2x_n^{(3)} && \text{для} \quad n = 1,3,5 \ldots \\
&x_n^{(2)} = -\tfrac{1}{2}\, x_n^{(3)} && \text{для} \quad n = 1,3,5, \ldots
\end{aligned}
$$

Свойства решений задачи *(I')*, *(II')*, *(III')* не известны. Мы будем полагать, что решение зависит от S – параметров, т.е. что при известных предположениях кривые $Im\, h^{(\alpha)}(\phi)$ можно провести через S точек с абсциссами $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_s$ и с заданными ординатами соответственно $H_1^{(\alpha)}, H_2^{(\alpha)}, \ldots H_s^{(\alpha)}$. В связи с этим к системе уравнений /18/ /19/ добавляем еще систему

$$\left(-\frac{\lambda_\alpha}{2} + x_1\right) \sin \phi_s + \sum_{n=2}^{K} x_n \sin n\phi_s = H_s^{(\alpha)} - \left(-\frac{\lambda_\alpha}{2} + b_1\right) \sin\phi_s - \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sin n\phi_s . \qquad /20/$$

$$(s = 1,2 \ldots S)$$
$$(\alpha = 1,2,3).$$

Нулевые приближения для $b_n^{(a)}$ получаются из /20/, если мы положим $K = S$ и в правой части сохраним только $H_s^{(a)}$. Решение этой системы $x_1, x_2, \dots x_s$ мы положим соответственно равным $b_1, b_2, \dots b_s$. Что касается $b_{s+1}, b_{s+2}, b_{s+3}, \dots$ при нулевом приближении они принимаются равными нулю.

В качестве примера рассмотрим случай с $N = 1$ $\lambda_a = 0$ и $v' = p'^{-3/2}$, т.е. уравнение

$$Im\ h'(z') = | h'(z') |^2 . \qquad /21/$$

Добавим еще перекрестное соотношение

$$h'(-z') = h'(z') \qquad /22/$$

и потребуем чтобы $h'(z')$ была аналитической в плоскости с разрезами $(-\infty, -1)$, $(+1\ +\infty)$.

Этот пример не тривиален и в то же время чрезвычайно прост при вычислениях и поэтому удобен для проверки эффективности отдельных методов нелинейного анализа применительно к системе /16/, /17/.

Уравнения /21/ и /22/ и требование аналитичности удовлетворяются функцией

$$h'(z') = \frac{\sqrt{z'^2 - 1}}{\frac{1+\lambda}{2(1-\lambda)}(z'^2 - 2) + i\sqrt{z'^2 - 1}} ,$$

которая при переходе к плоскости z принимает вид:

$$h(z) = \frac{1-\lambda}{2} \quad \frac{1 - z^4}{1 + \lambda z^4}\, i , \qquad /23/$$

откуда

$$\underset{|z|=1}{Im\ h(z)} = Im\ h(\phi) = \frac{\sin^2 2\phi}{\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 \cos^2 2\phi + \sin^2 2\phi} . \qquad /24/$$

Функция, определенная формулой /24/, описывает резонансное решение. Положение резонанса фиксировано и соответствует $\phi = \pi/4$. Параметр λ определяет ширину резонанса и тот факт, что она зависит от одного параметра, позволяет изучать влияние ширины резонанса на численные методы решения.

Мы будем решать краевую задачу /21/ и /22/ при помощи систем алгебраических уравнений /16/ и /17/. Уравнения перекрестных соотношений /17/ в данном случае удовлетворяются автоматически. Что касается системы /16/, то вместо нее можем использовать эквивалентную систему

$$a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

$$\tfrac{1}{2}\, a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ a_{n+k} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots) , \qquad /25/$$

которая получена из /21/.

Точные решения системы /25/ известны. Они получаются как Фурье-коэффициенты функции $\mathop{Re}\limits_{|z|=1} h(z) = Re\, h(\phi)$;

$$a_1 = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\;\frac{2\lambda}{1+\lambda}\;;\quad a_n = (-1)^{n-1}\,\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\,\lambda^{n-1}\quad (n = 2,3,4,\dots\ )\ . \tag{26}$$

Перейдем к описанию решений /25/ при помощи метода Ньютона.

Из симметрии кривой $Im\, h(\phi)$ и наличия резонанса следует, что она обязательно проходит через точки с абсциссами $\phi_1 = 0$ и $\phi_3 = \pi/4$ и ординатами $H_1 = 0$ и $H_3 = 1$ соответственно.

В /24/ мы можем выбрать λ таким образом, что при заданном $\phi = \phi_2$ функция $Im\, h(\phi)$ имела бы заданное значение H_2, которое в некотором интервале может меняться произвольно. Мы выбираем $\phi_2 = \pi/8$. Тогда $H_2 = \dfrac{(1-\lambda)^2}{2(1+\lambda^2)}$.

Положим $K = 5$. Так как $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi/8$ и $\phi_3 = \pi/4$, то /20/ переходит в систему:

$$\begin{aligned} &x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\\ &x_0 - x_2 + x_4 = 0\\ &x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0\ . \end{aligned} \tag{27}$$

В /25/ сохраняем только первые три уравнения и первые 6 неизвестных. После линеаризации она переходит в систему:

$$\begin{aligned} &(b_0 - ½)x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 = A_1\\ &b_1 x_0 + (b_0 + b_2 - ½)x_1 + (b_1 + b_3)x_2 + (b_2 + b_4)x_3 + (b_3 + b_5)x_4 + b_4 x_5 = A_2\\ &b_2 x_0 + b_3 x_1 + (b_0 + b_4 - ½)x_2 + (b_1 + b_5)x_3 + b_2 x_4 + b_3 x_5 = A_3 , \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} &A_1 = ½\,(b_0 - \sum_{n=0}^{5} b_n^2\ )\\ &A_2 = ½\, b_1 - \sum_{n=0}^{4} b_n\, b_{n+1}\\ &A_3 = ½\, b_2 - \sum_{n=0}^{3} b_n\, b_{n+2}\ . \end{aligned}$$

Совместное решение систем /27/ и /28/ дает искомые поправки $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ Чтобы начать процесс итерации, необходимо получить еще нулевые приближения $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$. Как сказано выше, b_0, b_1, b_2 получаются как решения системы:

$$\begin{aligned} &b_0 + b_1 + b_2 = 0\\ &b_0 - b_1 + b_2 = 1\\ &b_0 - b_2 = \frac{(1-\lambda)^2}{2(1+\lambda^2)}\ , \end{aligned}$$

а b_3, b_4, b_5 полагаются равными нулю.

Вычисления делаются исключительно быстро. Результаты вычислений для $\lambda = ¼, \lambda = \frac{1}{3}$ и $\lambda = ½$ даны в таблице.

λ	n	a_n	$b_n^{(0)}$	x_n	$b_n^{(1)}$	$\left\lvert \frac{a_n - b_n^{(1)}}{a_n} \right\rvert$
	0	+0,25000	+0,300	-0,0320	+0,2680	0,072
	I	-0,37500	-0,500	+0,0928	-0,4072	0,086
I/2	2	+0,I8750	+0,200	0	+0,2000	0,0I2
	3	-0,09375	0	-0,0800	-0,0800	0,I38
	4	+0,04687	0	+0,0320	+0,0320	0,3I6
	5	-0,02344	0	-0,0I28	-0,0I28	0,435
	0	+0,33333	+0,350	-0,0I35	+ 0,3365	0,009
	I	-0,44444	-0,500	+0,049I	-0,4509	0,0I5
I/3	2	+0,I48I5	+0,I50	0	+0,I500	0,0I3
	3	-0,04938	0	-0,0450	-0,0450	0,089
	4	+0,0I646	0	+0,0I35	+0,0I35	0,I89
	5	-0,00549	0	-0,0040	-0,0040	0,273
	0	+0,37500	+0,382	-0,0065	+0,3755	0,00I
	I	-0,46875	-0,500	+0,0294	-0,4706	0,004
I/4	2	+0,II7I9	+0,II8	0	+0,II80	0,007
	3	-0,02930	0	-0,0276	-0,0276	0,057
	4	+0,00732	0	+0,0065	+0,0065	0,I09
	5	-0,00I83	0	-0,00I8	-0,00I8	0,0I9

Литература

1. G.F. Chew and F.E. Low. Phys.Rev. 101, 1570 (1956).
2. W.M. Layson. Препринт 896/т.н. 168, 1961.
3. S.S. Schweber. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York, 1961.
4. G. Salzman and F. Salzman. Phys.Rev. 108, 1619 (1957).
5. В.В. Серебряков и Д.В. Ширков. Препринт. Новосибирск. 1961.
6. J.S. Ball and D.Y. Wong. Phys.Rev. Lett. 7, N 10, 390 (1961).
7. B. Brandsen and J. Moffat. CERN. Preprint, 1961.
8. G. Chew, S. Mandelstam and H. Noyes. Phys.Rev. 119, 478 (1960).
9. L. Castillejo, R.H. Dalitz, F.J. Dyson. Phys.Rev. 101, 453 (1956).
10. Л. В. Канторович. Успехи математических наук т. XI, вып. 6, стр. 99, /1956/.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 марта 1962 года.