ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Нгуен Ван-хьеу

Р-947

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НЕЙТРИНО И АНТИНЕЙТРИНО НА ЭЛЕКТРОНЕ С УЧЕТОМ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

ЖЭТФ, 1962, т43, в3, с. 984-990.

Дубна 1962 год

Нгуен Ван-хьеу

Р-947

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ НЕЙТРИНО И АНТИНЕЙТРИНО НА ЭЛЕКТРОНЕ С УЧЕТОМ ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Аннотация

С помощью дисперсионного соотношения рассмотрено упругое рассеяние нейтрино и антинейтрино на электроне при учете только взаимодействия типа $(\nu e)(e\nu)$, удовлетворяющего $(1+\gamma_5)$ -инвариантности. В двухчастичном приближении из дисперсионного соотношения и унитарности получается интегральное уравнение Лоу, решение которого зависит от двух констант. Одна из этих констант определяется универсальной константой слабого взаимодействия. Полученный результат показывает, что в рассматриваемом приближении существует резонанс, положение и полуширина которого зависят от неизвестной константы. При стремлении энергии к бесконечности сечение рассматриваемых процессов стремится к нулю.

Abstract

Using the dispersion relation, elastic neutrino and antineutrino scattering by an electron has been treated with account of only the interaction of $(\nu e)(e\nu)$ type which satisfies $(1+\gamma_5)$ -invariance. In the two-body approximation the Low integral equation whose solution depends on the two constants is obtained from the dispersion relation and the unitarity. One of these constants is determined by the universal weak interaction constant. The result obtained shows that in the approximation under consideration there exists a resonance whose location and halfwidth depend on an unknown constant. When the energy is tending to infinity the cross section of the processes in question is vanishing.

соотношения и унитарности получается интегральное уравнение типа Лоу с простой перекрестной симметрией, которое можно решить с помощью способа, примененного в работе [8].

2. Свойства амплитуд и дисперсионное соотношение

Рассмотрим свойства матричных элементов процессов

$$\nu + e \to \nu + e \qquad (I)$$

и

$$\tilde{\nu} + e \to \tilde{\nu} + e \qquad (II)$$

в нашей модели. Обозначим через k_1, q_1 четырехмерные импульсы нейтрино /или антинейтрино/ и электрона в начальном состоянии, соответственно, и через k_2, q_2 — те же величины в конечном состоянии и положим:

$$s = -(k_1 + q_1)^2 = -(k_2 + q_2)^2,$$

$$u = -(k_1 - q_2)^2 = -(k_2 - q_1)^2,$$

$$t = -(k_1 - k_2)^2 = -(q_1 - q_2)^2 \qquad /3/$$

$$\sigma = -\frac{(k_1 + k_2) q_1}{2m^2} = -\frac{(k_1 + k_2) q_2}{2m^2}.$$

Здесь m -масса электрона. S -матрицу запишем в виде $S = 1 + iT$. Матричные элементы процессов (I) и (II), инвариантные относительно преобразования /2/, имеют следующий общий вид:

$$\langle e, q_2; \nu, k_2 | T | \nu, k_1; e, q_1 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 (k_1 + q_1 - k_2 - q_2) F^{\nu}(s, u, t) \times$$
$$\bar{u}_e(\vec{q}_2) \gamma_a (1 + \gamma_5) u_\nu(\vec{k}_1) \cdot \bar{u}_\nu(\vec{k}_2) \gamma_a (1 + \gamma_5) u_e(\vec{q}_1),$$

/4/

$$\langle e, q_2; \tilde{\nu}\, k_2 | T | \tilde{\nu}, k_1; e, q_1 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4 (k_1 + q_1 - k_2 - q_2) F^{\tilde{\nu}}(s, u, t)$$
$$\bar{u}_e(\vec{q}_2) \gamma_a (1 + \gamma_5) v_\nu(-\vec{k}_2) \bar{v}_\nu(-\vec{k}_1) \gamma_a (1 + \gamma_5) u_e(\vec{q}_1).$$

Для простоты мы опустили спиновые индексы. С помощью стандартной техники можно доказать, что в рассматриваемой теории имеет место соотношение

$$F^{\nu}(s, u, t) = -F^{\tilde{\nu}}(s, u, t) \qquad /5/$$

в любом порядке теории возмущений. Это свойство вместе с теоремой перекрестной симметрии

$$F^{\nu}(s, u, t) = -F^{\tilde{\nu}}(u, s, t) \qquad /6/$$

дает следующее свойство симметрии амплитуд

$$F^{\nu,\bar\nu}(s,u,t) = F^{\nu,\bar\nu}(u,s,t) \qquad /7/$$

В силу соотношения

$$s + u + t = 2m^2$$

среди трех переменных s, u, t только две независимы, в качестве которых мы выберем s, t. Для простоты записи опустим в дальнейшем индексы ν и $\bar\nu$. С помощью способа, изложенного в [10], мы можем доказать, что функцию $F(s, 2m^2 - s - t, t)$ при фиксированном t можно рассматривать как краевое значение аналитической функции $f_t(z)$

$$F_t(s) = F(s, 2m^2 - s - t, t) = \lim_{\epsilon \to +0} f_t(s + i\epsilon), \quad s > m^2, \qquad /8/$$

которая удовлетворяет дисперсионному соотношению. В дальнейшем докажем, что в двухчастичном приближении мнимая часть $F_t(s)$ стремится к нулю при $s \to \infty$, поэтому дисперсионное соотношение пишется без вычитания. С учетом свойства симметрии /7/ мы можем писать дисперсионное соотношение следующим образом:

$$f_t(z) = \frac{1}{\pi}\int_{m^2}^{\infty} \mathrm{Im}\, F_t(s') \left[\frac{1}{s' - z} + \frac{1}{s' + z + t - 2m^2} \right] ds' . \qquad /9/$$

Можно также рассматривать $F_t(s)$ как функцию от σ. Согласно свойству симметрии /7/ нужно требовать, чтобы эта функция не изменялась при замене $t \to t,\ \sigma \to -\sigma$.

В настоящей работе рассматриваются процессы (I) и (II) с помощью дисперсионного соотношения в двухчастичном приближении. Это приближение соответствует цепному приближению теории возмущений. Рассмотрение в последнем приближении показывает, что в любом порядке амплитуда $F_t(s)$ слабо зависит от t /только перекрестный член зависит от t /, поэтому мы можем положить

$$f_t(z) \approx f_0(z) . \qquad /10/$$

Введем обозначения

$$F_0(s) = G(\sigma),$$

$$f_0(z) = g(\zeta),$$

$$\sigma = \frac{s - m^2}{2m^2} \qquad \zeta = \frac{z - m^2}{2m^2} . \qquad /11/$$

В новых обозначениях соотношения /8/ и /9/ имеют вид:

$$G(\sigma) = \lim_{\epsilon \to +0} g(\sigma + i\epsilon), \quad \sigma > 0, \qquad /12/$$

$$g(\zeta) = 1/\pi \int_0^\infty Im\ G(\sigma')\ [\ \frac{1}{\sigma' - \zeta} + \frac{1}{\sigma' + \zeta}\ ]\ d\sigma'. \qquad /13/$$

Функция $g(\zeta)$ обладает следующими свойствами

$$g(\zeta) = g(-\zeta) \quad \text{и} \quad g(\zeta^*) = g^*(\zeta) \qquad /14/$$

везде на комплексной плоскости.

3. Унитарность в двухчастичном приближении

Для определенности рассмотрим процесс /1/. В двухчастичном приближении промежуточными состояниями, входящими в соотношение унитарности

$$1/i < e, q_2;\ \nu, k_2 \,|\, T - T^+ \,|\, \nu; k_1 e, q_1 > = < e, q_2; \nu, k_2 \,|\, T\, T^\dagger \,|\, \nu, k_1; e, q_1 > =$$
$$\sum_n < e, q_2; \nu, k_1 \,|\, T \,|\, n > < n \,|\, T^+ \,|\, \nu, k_1; e, q_1 > , \qquad /15/$$

являются состояния нейтрино и электрона. После суммирования по спиновым переменным промежуточных состояний и замены /10/ мы получим:

$$< e, q_2; \nu, k_2 \,|\, T\, T^+ \,|\, \nu, k_1; e, q_1 > = -(2\pi)^2\ \delta^4(k_1 + q_1 - k_2 - q_2)\ |\, F_0(s) \,|^2 \times$$
$$\times \int \frac{d^3 p_e}{2p_e^0}\ \frac{d^3 p_\nu}{2p_\nu^0}\ \delta^4(p_e + p_\nu - k_1 - q_1)\ \bar{u}_e(\vec{q}_2)\, \gamma_\alpha (1+\gamma_5)\, p_\nu\, \gamma_\beta (1+\gamma_5)\, u_e(\vec{q}_1) \qquad /16/$$
$$\bar{u}_\nu(\vec{k}_2)\, \gamma_\alpha (1+\gamma_5)\, p_e \gamma_\beta (1+\gamma_5)\, u_\nu(\vec{k}_1)\ .$$

После интеграции по всем направлениям импульса промежуточных состояний и некоторых преобразований полученных выражений с помощью тождеств:

$$\delta_{\alpha\beta}\ \delta_{\sigma\tau} = \tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{16} \Gamma^i_{\alpha\tau}\ \Gamma^i_{\sigma\beta}\ ,$$

где Γ^i - 16 матриц Дирака и

$$\gamma_\alpha\, \sigma_{\mu\nu} = i\,[\ \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho}\ \gamma_\rho\ \gamma_5 - \delta_{\alpha\mu}\ \gamma_\nu + \delta_{\alpha\nu}\ \gamma_\mu\ ]\ ,$$

мы получим

$$< e, q_2; \nu, k_2 \,|\, T\, T^* \,|\, \nu, k_1; e, q_1 > = (2\pi)^4\ \delta^4\ (k_1 + q_1 - k_2 - q_2)\ |\, F_0(s) \,|^2 \times$$

$$\times\ \frac{5}{4\pi}\,\frac{(s-m^2)^2}{s}\,\bar u_e(\vec q_2)\,\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\,u_\nu(\vec k_1)\,\bar u_\nu(\vec k_2)\,\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\,u_e(\vec q_1)\,. \qquad /17/$$

Отсюда следует, что

$$Im\,F_0(s) = \frac{5}{8\pi}\,\frac{(s-m^2)^2}{s}\,|F_0(s)|^2\,, \quad s > m^2 \qquad /18/$$

и поэтому

$$F_0(s) = \frac{8\pi}{5}\,\frac{s}{(s-m^2)^2}\,e^{i\delta}\,\sin\delta\,, \qquad s > m^2, \qquad /19/$$

где δ – вещественное число. Очевидно, что

$$Im\,F_0(s) \to 0 \qquad s \to \infty\,.$$

Если выбрать в качестве переменной σ, то соотношение /18/ приобретает вид

$$Im\,G(\sigma) = \frac{5m^2}{4\pi}\,\frac{\sigma^2}{\sigma+\frac{1}{2}}\,|G(\sigma)|^2\,, \quad \sigma > 0\,. \qquad /20/$$

4. Решение интегрального уравнения

Из полученных результатов очевидно, что в рассматриваемом приближении определение амплитуды рассеяния приводится к определению функции $g(\zeta)$ со свойствами /12/ – /14/ и /20/. Из этих свойств следует, что функция

$$h(\zeta) = \zeta\,g(\zeta) \qquad /21/$$

удовлетворяет соотношениям

$$h(\zeta) = \frac{5m^2}{4\pi^2}\,\zeta\int_0^\infty \frac{|H(\sigma')|^2}{\sigma'+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sigma'-\zeta}+\frac{1}{\sigma'+\zeta}\right]d\sigma'\,, \qquad /22/$$

$$H(\sigma) = \lim_{\epsilon\to+0} h(\sigma+i\epsilon)\,, \qquad /23/$$

$$h(\zeta) = -h(-\zeta) \quad \text{и} \quad h^*(\zeta) = h(\zeta^*)\,. \qquad /24/$$

Функция $h(\zeta)$ имеет простой корень в нуле и не имеет никакого полюса на вещественной оси. Соотношение /22/ показывает, что при комплексных ζ мы имеем:

$$Im\,h(\zeta) = \lambda(\zeta)\,Im\,\zeta\,, \qquad /25/$$

причем

$$\lambda(\zeta) = \frac{5m^2}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{|H(\sigma')|^2}{\sigma'+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{|\sigma'-\zeta|^2}+\frac{1}{|\sigma'+\zeta|^2}\right]d\sigma' > 0\,. \qquad /26/$$

Кроме того, при стремлении ζ к бесконечности по любому направлению, не совпадающему с направлением вещественной оси, $\frac{h(\zeta)}{\zeta}$ стремится к нулю.

Следуя методу работы /9/, вместо искомой функции $h(\zeta)$ рассмотрим

$$m(\zeta) = -\frac{4\pi}{5m^2}\ \frac{1}{h(\zeta)}\ . \qquad /27/$$

Эта функция, удовлетворяющая дисперсионному соотношению /с одним вычитанием, как будет показано в дальнейшем/, и ее краевое значение

$$M(\sigma) = \lim_{\epsilon\to+0} m(\sigma + i\epsilon) \qquad /28/$$

обладают следующими свойствами:

1. везде на комплексной плоскости ζ

$$m(\zeta) = -m(-\zeta) \quad \text{и} \quad m^*(\zeta) = m(\zeta^*);$$

2. $m(\zeta)$ имеет простой полюс в нуле и не обращается в нуль нигде на вещественной оси;

3. $\zeta m(\zeta) \to \infty$ при $\zeta \to \infty$ по направлениям, отличным от направления вещественной оси;

4. на вещественной оси

$$Im\ M(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma + ½}\ ,\ \sigma > 0\ .$$

Это свойство показывает, что дисперсионное соотношение пишется с одним вычитанием.

5. при комплексных ζ

$$Im\ m(\zeta) = \frac{4\pi}{5m^2}\ \frac{\lambda(\zeta)}{|m(\zeta)|^2}\ Im\ \zeta\ ,$$

т.е. мнимые части функции $m(\zeta)$ и переменной ζ имеют один и тот же знак.

Функцию $m(\zeta)$, удовлетворяющую указанным условиям, можно написать в следующем виде

$$m(\zeta) = -\frac{a}{\zeta} + b\zeta + \frac{\zeta}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sigma' + ½}\left[\frac{1}{\sigma' - \zeta} + \frac{1}{\sigma' + \zeta}\right] d\sigma' + S(\zeta)\ , \qquad /29/$$

где $S(\zeta)$ – нечетная R – функция.

$$S(\zeta) = \sum_i R_i \left(\frac{1}{\sigma_i - \zeta} - \frac{1}{\sigma_i + \zeta}\right) = 2\zeta \sum_i \frac{R_i}{\sigma_i^2 - \zeta^2}\ , \qquad /30/$$

причем в силу указанных свойств $m(\zeta)$ константы a, b и R_i удовлетворяют определенным условиям. Например, свойство 2 требует, чтобы $a \neq 0$. Соотношение /29/, автоматически обеспечивающее свойство 3, показывает, что при комплексных ζ мы имеем:

$$Im\ m(\zeta) = \Big[\frac{a}{|\zeta|^2} + b + 1/\pi \int_0^\infty \frac{\sigma}{\sigma' + ½} \Big(\frac{1}{|\sigma' - \zeta|^2} + \frac{1}{|\sigma' + \zeta|^2} \Big) d\sigma'$$

/31/

$$+ \sum_i R_i \Big(\frac{1}{|\sigma_i - \zeta|^2} + \frac{1}{|\sigma_i + \zeta|^2} \Big) \Big] Im\zeta .$$

Из свойства 5 вытекает требование, чтобы

$$\frac{a}{|\zeta|^2} + b + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sigma'}{\sigma' + ½} \Big(\frac{1}{|\sigma' - \zeta|^2} + \frac{1}{|\sigma' + \zeta|^2} \Big) d\sigma' + \sum_i R_i \Big(\frac{1}{|\sigma_i - \zeta|^2} + \frac{1}{|\sigma_i + \zeta|^2} \Big) > 0 \quad /32/$$

при всех комплексных ζ, т.е.

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad R_i \geq 0. \qquad /33/$$

Из полученных результатов следует, что амплитуда рассеяния $F_0(s) = G(\sigma)$ определяется соотношением

$$G(\sigma) = \frac{4\pi}{5m^2} \frac{1}{a - b\sigma^2 - 1/\pi \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 - ¼} \log 2\sigma - i \dfrac{\sigma^2}{\sigma + ½} - S(\sigma)}, \qquad /34/$$

причем константы a, b и R_i удовлетворяют /33/.

5. Обсуждение результатов

Амплитуда рассеяния нейтрино или антинейтрино на электроне в теории, в которой учитывается только взаимодействие вида /1/, удовлетворяющее $(1 + \gamma_5)$ -инвариантности, при рассмотренном приближении определяется соотношением /34/ с точностью до знака. Она зависит от неопределенных констант a, b и R_i, одна из которых, а именно константа a, может быть определена тем условием, что при $\sigma = 0$ амплитуда $G(\sigma)$ совпадает с универсальной константой слабого взаимодействия. Присутствие R - функции соответствует существованию нестабильных частиц. В рассматриваемой модели последних не существует. Поэтому необходимо положить равной нулю R -функцию и определить амплитуду рассеяния соотношением

$$G(\sigma) = \frac{4\pi}{5m^2} \frac{1}{a - b\sigma^2 - 1/\pi \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1/4} \log 2\sigma - i \dfrac{\sigma^2}{\sigma + 1/2}} . \qquad /35/$$

Это соотношение показывает, что в рассмотренном приближении существует резонанс. Резонансная энергия определяется условием

$$a - b\sigma_0^2 - 1/\pi \, \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 - 1/4} \, \log 2\sigma_0 = 0 . \qquad /36/$$

Чем больше константа b , тем меньше резонансная энергия. Полуширина резонанса равна

$$\Gamma = \frac{m\pi}{\sqrt{2}} \, \frac{\sigma_0}{(\sigma_0 + 1/2)^{3/2}} \, \frac{(\sigma_0^2 - 1/4)^2}{2b\pi(\sigma_0^2 - 1/4)^2 + (\sigma_0^2 - 1/2) - 1/2 \log 2\sigma_0} . \qquad /37/$$

Кроме того, соотношение /35/ показывает, что сечение рассеяния растет при увеличении энергии только при небольших энергиях. При $s \to \infty$ амплитуда G стремится к нулю как s^{-2} , если $b \neq 0$, и как s^{-1} , если $b = 0$. Поэтому сечение рассеяния стремится к нулю как s^{-3} в первом случае и как s^{-1} – во втором.

Автор выражает глубокую благодарность проф. М.А. Маркову, И.Т. Тодорову, Г. Домокошу и В.И. Лендьелу за ценные замечания.

Литература

1. M.Gell-Mann and A.Rosenfeld. Ann. Rev. Nucl. Sci. 7, 407 (1957).
   Перевод см. ПСФ, 4, 1958.
2. R.Feynman and M.Gell-Mann. Phys. Rev. 109, 193 (1958);
   Перевод см. ПСФ, 4 1958.
3. Д.И. Блохинцев. УФН, 62, 381 /1957/.
4. D.I.Blokhintsev. Nuovo Cim. Ser. X, 9, 925 (1958).
5. М.А. Марков. См. сборник "К физике нейтрино высоких энергий", Дубна, Д-577, 1960.
6. I.V.Polubarinov. Nucl. Phys. 8, 444 (1958).

   См. также М.А. Марков. Гипероны и К-мезоны. М., 1958.
7. S.M.Berman. Proc. Intern. Conf. on Theor. Aspects of Very High Energy Phenomena at CERN, 1961 p. 7.
8. E.Sudarshan and R.Marshak. Proc. Intern. Conf. on Mesons and Recently Discovered Particles, Padova-Venezia, 1957;
   перевод см. ПФС 2, 1959.
9. L.Castillejo, R.H.Dalitz and F.J.Dyson. Phys. Rev. 101, 453 (1956).
10. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.
    Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, Москва, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1962 г.