ШІ-87
939

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

М.И. Широков

P-939

О КООРДИНАТЕ НЬЮТОНА-ВИГНЕРА ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ

Ann. Phys., 1962, т10, h 1/2, s. 60-63.

Дубна 1962 г.

Аннотация

Показано, что обычная ковариантная координата частицы $\vec{x}$ при введении особого определения плотности вероятности в x –пространстве удовлетворяет всем физическим и математическим требованиям, лежащим в основе постулатов Ньютона и Вигнера /1949/, на основании которых они получили нековариантную координату $\vec{q}$. Поэтому с точки зрения этих требований координата $\vec{x}$ ничем не хуже координаты $\vec{q}$

Abstract

In 1949 Newton and Wigner obtained a non-covariant coordinate q of the scalar particle on the basis of some postulates. It is shown that the ordinary coordinate x satisfies all physical and mathematical requirements underlying their postulates if the definition (3) (see below) of the probability density in the x- space is used. Therefore from the point of view of these requirements the coordinate x is in no way inferior to the coordinate q.

М.И. Широков

Р-939

О КООРДИНАТЕ НЬЮТОНА-ВИГНЕРА ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ

1

Все решения уравнения Клейна-Гордона $(\Box - m^2)\,\Phi(x,\ t) = 0$ могут быть разложены по полной системе функций этого гиперболического уравнения

$$\psi_k\ (\vec{x}, t) = exp\,(i\vec{k}\vec{x})\ exp\,(-i\sqrt{k^2+m^2}\,t\,)$$

$$\phi_k\,(\vec{x}, t) = exp\,(i\vec{k}\vec{x})\ exp\,(i\sqrt{k^2+m^2}\,t\,),$$

где $-\infty < k_x < +\infty$ и т.д., а $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Здесь и в дальнейшем принята система единиц, в которой $h = 1$ и $c = 1$. Для функций первого класса $\psi_k\ (\vec{x}, t)$ норма[2]

$$\frac{i}{2m}\int[\Phi^*(\vec{x},t)\ \frac{\partial}{\partial t}\ \Phi(\vec{x},t) - \frac{\partial}{\partial t}\,\Phi^*(\vec{x},t)\,\Phi(\vec{x},t)]\ d^3x \qquad /1/$$

оказывается положительной, а для функций $\phi_k\ (\vec{x}, t)$ –отрицательной. Нормы /1/ функций $\psi\ (\vec{x},\ t)$, разлагающихся по $\psi_k\,(\vec{x}, t)$, тоже будут положительными. Поскольку в квантовой механике с нормой ассоциируется вероятность или число частиц, то нейтральную скалярную частицу следует описывать функциями $\psi\,(\vec{x},\ t)$. Можно проверить, что они подчиняются уравнению

$$i\ \frac{\partial}{\partial\ t}\,\psi\ (\vec{x}, t) = [(-i\,\frac{\partial}{\partial\,\vec{x}}\ )^2 + m^2]^{1/2}\ \psi\ (\vec{x},\ t) \qquad /2/$$

и поэтому норма /1/ может быть переписана в виде

$$\frac{1}{2m}\ \int\rho\,(\vec{x}, t)\ d^3x\ = \frac{1}{2m}\int[\psi^*(\vec{x}, t)[(-i\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\,)^2 + m^2]^{1/2}\,\psi\,(\vec{x}, t) + \qquad /3/$$

$$+[(-i\frac{\partial}{\partial\,\vec{x}})^2 + m^2]^{1/2}\ \psi^*(\vec{x}, t)\psi\,(\vec{x}, t)]\ d^3x \equiv \int\{\ \psi^*(\vec{x}, t)\,\psi(\vec{x}, t)\,\}\,d^3x\,.$$

Дальнейшие подробности относительно уравнения /2/ и нормы /3/ см. у Швебера[1].

2

Выберем собственные функции операторов импульса $k_i = -i\,\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = x, y, z$ в виде $<\vec{x}|\vec{k}> = [2\pi]^{-3/2} exp\,(i\vec{k}\vec{x})$ /относительно других возможных выборов см. далее/.

Поскольку собственная функция $\langle \vec{k} | \vec{x} \rangle$ операторов $\hat{x}_i$ в импульсном представлении должна быть равна $\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle^* \sim \exp(-i\vec{k}\vec{x})$ /3/, то $\hat{x}_i = i\frac{\partial}{\partial k_i}$. Функции $\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle$ ортогональны по норме /3/:

$$\int \{ \langle \vec{x} | \vec{k}_1 \rangle^* \langle \vec{x} | \vec{k}_2 \rangle \} \, d^3x = \frac{\sqrt{k_1^2 + m^2}}{m} \, \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \; . \qquad /4/$$

Правая часть /4/ одновременно является функцией $\langle \vec{k}_1 | \vec{k}_2 \rangle$ – состояния с определенным значением импульса в импульсном же представлении. Поскольку должно быть

$$\int d^3k \; D(\vec{k}) \langle \vec{k} | \vec{k}_1 \rangle^* \langle \vec{k} | \vec{k}_2 \rangle = \langle \vec{k}_1 | \vec{k}_2 \rangle ,$$

то весовой множитель $D(\vec{k})$ для интегрирования по импульсам оказывается равным $m[k^2 + m^2]^{-1/2} \equiv m/E$.

Однако с таким $D(k)$ функции $\langle \vec{k} | \vec{x} \rangle$ оказываются неортогональными

$$\int d^3k \, \frac{m}{E} \, [2\pi]^{-3} \, e^{-i\vec{k}\vec{x}_1} e^{-i\vec{k}\vec{x}_2} \equiv K(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \neq 0 \qquad \text{при} \qquad x_1 \neq x_2 . \qquad /5/$$

Другими словами, не выполняется как будто условие полноты для функций $\langle \vec{x} | \vec{k} \rangle$.

3

Эту трудность можно преодолеть введением нового оператора координаты $\hat{q}$, так что состояния с разными координатами /новыми/ будут ортогональны. Способ Ньютона и Вигнера /1/ получения такой координаты можно изложить следующим образом. Пусть операторы k_i имеют в q –пространстве старый вид $\hat{k}_i = -i\frac{\partial}{\partial q_i}$, но их собственные функции пусть равны

$$\langle \vec{q} | \vec{k} \rangle \equiv f(\vec{k}) \; \exp\,(i\vec{k}\vec{q}) , \quad f(\vec{k}) \neq const \qquad (\text{как видно,}$$

$\langle \vec{q} | \vec{k} \rangle$ есть собственная функция $\hat{k}_i$ при любом $f(\vec{k})$). Тогда собственные функции операторов $\hat{q}_i$ – $\langle \vec{k} | \vec{q} \rangle = \langle \vec{q} | \vec{k} \rangle^*$ – мόжно сделать ортогональными с нормой $d^3k \; m/E$:

$$\int d^3k \; m/E \; f(\vec{k}) \; e^{i\vec{k}\vec{q}_1} f^*(\vec{k}) \, e^{i\vec{k}\vec{q}_2} = 0 \qquad \text{при} \qquad \vec{q}_1 \neq \vec{q}_2 , \qquad /6/$$

если выбрать $f(\vec{k}) = (2\pi)^{-3/2}\sqrt{E}$.

Из условия $\hat{q}_x \sqrt{E} \; \exp\,(-i\vec{k}\vec{q}) = q_x \sqrt{E} \; \exp\,(-i\vec{k}\vec{q})$ можно теперь найти оператор координаты Ньютона–Вигнера : $q_x = -i\frac{\partial}{\partial k_x} - i \; k_x/2E^2$ ср. /2/. Он удовлетворяет коммутациям $[q_i, k_j] = i\,\delta_{ij}$, обычным для координаты и импульса.

Правая часть /6/ при $|f(\vec{k})|^2 = (2\pi)^{-3} E$ равна $\langle \vec{q}_1 | \vec{q}_2 \rangle = \delta(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)$, и из условия

$$\int d^3q\ D(\vec{q}) < \vec{q} \mid \vec{q}_1 >^* < \vec{q} \mid \vec{q}_2 > = < \vec{q}_1 \mid \vec{q}_2 > \qquad /7/$$

находим, что $D(\vec{q}) = 1$.

Пользуясь тем, что $<\vec{k} \mid \vec{x}>$ и $<\vec{k} \mid \vec{q}>$ суть собственные функции операторов $\hat{x}$ и $\hat{q}$ в одном и том же импульсном пространстве, можно найти амплитуду вероятности $<\vec{x} \mid \vec{q}>$, найти данное значение координаты $\vec{x}$ в состоянии с определенным значением $\vec{q}$ /3/:

$$\int d^3k\ m/E <\vec{k} \mid \vec{x}>^* <\vec{k} \mid \vec{q}> \equiv <\vec{x} \mid \vec{q}> \sim \left(\frac{m}{|\vec{q}-\vec{x}|}\right)^{5/4} K_{5/4}(m \mid \vec{x}-\vec{q} \mid) \sim \qquad /8/$$

$$\sim \left(\frac{m}{|\vec{q}-\vec{x}|}\right)^{5/4} H^{(1)}_{5/4}(im \mid \vec{q}-\vec{x} \mid).^{x)}$$

Другими словами, собственная функция является "нелокальной" по терминологии Ньютона и Вигнера, если она выражена в x – представлении. Эта терминология представляется неудачной, поскольку в своем собственном представлении $<\vec{q} \mid \vec{q}_1>$ равна $\delta(\vec{q}-\vec{q}_1)$. С таким же правом можно говорить, что $<\vec{q} \mid \vec{x}_1>$ –состояние с определенным значением $\vec{x}=\vec{x}_1$ является "нелокальным" /в $\vec{q}$ –представлении/.

4

Вернемся к координате $\vec{x}$ и спросим, для чего нужна ортогональность функций $<\vec{k} \mid \vec{x}>$, т.е. почему нужно требовать выполнения постулата *(c)* Ньютона и Вигнера /1/? Для такого требования есть два основания.

Первое диктуется физическим толкованием состояния с определенной координатой x_1 : в таком состоянии по определению другие значения координат должны быть представлены с нулевой вероятностью. Функция $K(\vec{x}-\vec{x}_1)$, /см./5/, пропорциональная известным функциям $D^{(+)}(\vec{x}-\vec{x}_1, 0)$ или $D^{(-)}(\vec{x}-\vec{x}_1, 0)$ /см. например /5/ § 15/, фактически удовлетворяет следующему требованию: плотность вероятности $\rho_{x_1}(\vec{x}, t)$ /см./3// для такого состояния не равна нулю только в точке $\vec{x}=\vec{x}_1$. Действительно, поскольку

$$\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right)^2 + m^2\right]^{1/2} K(\vec{x}-\vec{x}_1) = \delta(\vec{x}-\vec{x}_1),$$

то

$$\rho_{x_1}(\vec{x},t) \sim K^*(\vec{x}-\vec{x}_1)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_1) + \delta(\vec{x}-\vec{x}_1)\,K(\vec{x}-\vec{x}_1) . \qquad /9/$$

Второе основание является математическим требованием возможности нахождения коэффициентов разложения в выражениях

$$\psi(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k\ m/E\ e^{i\vec{k}\vec{x}}\,\Phi(\vec{k}), \qquad /10/$$

---

x) См. таблицы /4/ и сравни с /1/.

$$\Phi(\vec{k}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3x \; \{ e^{-i\vec{k}\vec{x}} \psi(\vec{x}) \} .$$

Последнее разложение написано в терминах определения /3/ свертки в x -пространстве.

Доказательство такой возможности сводится к доказательству видоизмененной интегральной теоремы Фурье

$$\Phi(\vec{k}) = (2\pi)^{-3} \int d^3x \; \{ e^{-i\vec{k}\vec{x}} \int d^3k' \, m/E' \; e^{i\vec{k}'\vec{x}} \} \; \Phi(\vec{k}')$$

$$\psi(\vec{x}) = (2\pi)^{-3} \int d^3k \; m/E \; e^{i\vec{k}\vec{x}} \int d^3x' [e^{-i\vec{k}\vec{x}'} [(-i \frac{\partial}{\partial \vec{x}})^2 + m^2]^{1/2} \psi(\vec{x}') + \qquad /11/$$

$$+ [(-i \frac{\partial}{\partial \vec{x}})^2 + m^2]^{1/2} e^{-i\vec{k}\vec{x}'} \psi(\vec{x}')] .$$

Первое соотношение легко сводится к обычной формуле Фурье и верно при обычных условиях на функции $\psi(\vec{x})$ и $\Phi(\vec{k})$. Для проверки второго надо доказать соотношение

$$\int d^3x \; e^{-i\vec{k}\vec{x}} [(-i\frac{\partial}{\partial \vec{x}})^2 + m^2]^{1/2} \psi(\vec{x}) = \int d^3x [(-i\frac{\partial}{\partial \vec{x}})^2 + m^2]^{1/2} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \psi(\vec{x}) . \qquad /12/$$

Оно совпадает с соотношением эрмитовости оператора $[\hat{k}^2 + m^2]^{1/2}$ при обычной /нерелятивистской/ норме в x -пространстве. Поскольку $\hat{k}_x = -i\,\partial/\partial x$ при такой норме эрмитов /что доказывается интегрированием по частям $\int d^3x \; \exp(-i\vec{k}\vec{x}) \; \hat{k}_x \; \psi(\vec{x})$ с учетом того обстоятельства, что $\psi(\vec{x})$ надлежащим образом стремится к нулю на бесконечности как функция, удовлетворяющая условиям теоремы Фурье/, то и функция от $\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{k}_z$ должна быть эрмитова, т.е. $[\hat{k}^2 + m^2]^{1/2}$ может быть поставлен перед $\exp(-i\vec{k}\vec{x})$, см. (12).

Требование (c) Вигнера и Ньютона является частным случаем требований первого и второго /назовем их постулатом (c') / и является неоправданно ограничительным как с физической, так и с математической точки зрения. Координата x удовлетворяет (c') и остальным постулатам Ньютона и Вигнера и поэтому нет физических или математических оснований, с точки зрения Ньютона и Вигнера, предпочитать координату q координате x */.

Таким образом, соображения Ньютона и Вигнера не могут служить основой для поисков "хорошей" координаты скалярной частицы. По-видимому, наиболее последовательным является определение координаты как центра инерции частицы. Этот подход связан

---

*/ В книге /6/ /см.также /2/ / утверждается, что оператор $\hat{x}$ неэрмитов. Фактически, однако, показана очевидная неэрмитовость оператора $1/E \; \hat{x}$ при нерелятивистской норме $\int d^3k \; \psi^*(\vec{k}) \; \phi(\vec{k})$ в импульсном пространстве. Равенство $(\psi, \hat{x}\phi) = (\hat{x}\psi, \phi)$ будет иметь место, если мы определим $(\psi, \hat{x}\phi)$, например, как $\int d^3k \; \psi^*(\vec{k}) \, E^{-1/2} \; \hat{x} \; \phi(\vec{k}) \; E^{-1/2}$

с приданием смысла десяти известным законам сохранения /семь из них толкуются как законы сохранения полных импульса-энергии и момента количества движения/, см. /7/,/8/, где приведена литература по этому вопросу.

Литуратура

1. T.D.Newton, E.P.Wigner. Rev. Mod. Phys. 21, 400 (1949).
2. S.Schweber. Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. New York, 1961, ch. 3.
3. П.А. Дирак. Принципы квантовой механики. Изд. 4 Москва, 1960, гл. 3.
4. F.Oberhettinger. Tabellen zur Fourier Transformation. Berlin, 1957, p. 117.

   В.А. Диткин и А.П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Москва, 1961, стр. 263.
5. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Москва, 1957.
6. С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман. Мезоны и поля т. 1, Москва, 1957, гл. 2.
7. M.H.L. Pryce. Proc. Roy. Soc. 1948, 195A, 62.
8. P.M.Mathews, A.Sankaranarayanan. Prog. Theor. Phys. 26, 499 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 марта 1962 г.