ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

П.С. Исаев, В.А. Мещеряков

Р-938

ВЛИЯНИЕ $\pi\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА s-И p-ВОЛНЫ π-N РАССЕЯНИЯ

ЖЭТФ, 1962, т 43, в.4, с 1339-1348.
C ERN, 1962, Abstr. n 317.

Дубна 1962 год

П.С. Исаев, В.А. Мещеряков

Р-938

ВЛИЯНИЕ $\pi\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА s-И p-ВОЛНЫ π-N РАССЕЯНИЯ

Дубна 1962 год

Введение

Двойные мандельстамовские представления дают возможность привлечь $\pi\pi$ -взаимодействие к объяснению процесса πN -рассеяния. Как известно, впервые Фрезеру и Фулко удалось удовлетворительно объяснить структуру нуклона в предположении сильного резонансного $\pi\pi$ -взаимодействия в p -состоянии $(T=1)$. Есть надежда получить согласие с экспериментальными данными и для рассеяния π -мезона на нуклонах, если использовать то же предположение.

В настоящей работе с помощью метода двойных мандельстамовских представлений получены уравнения для парциальных волн πN -рассеяния при малых энергиях. Она тесно примыкает к работе/1/, в которой рассмотрены, в частности, такие вопросы, как выбор переменных и функций для аналитического продолжения, аналитические свойства этих функций и устранение кинематических разрезов. В качестве переменных выбираются: квадрат импульса $\nu = \vec{q}^{\,2}$ и $C = Cos\,\theta$, где θ -угол рассеяния в системе центра масс первой реакции[x)]. В работе рассматриваются состояния с изотопическим индексом $(-)$, т.е. функции a и $B^{(-)}$ (см. (3.5) из /1/), в уравнения для которых, с помощью условия унитарности, входит только P -волна процесса $\pi\pi$ -рассеяния.

Переход к парциальным волнам осуществляется путем комбинации дисперсионных соотношений для $C = \pm 1$[xx)]. Достоинства такого способа получения уравнений ранее подробно обсуждались/3/.

В разделе 1 рассматривается вид функций a и $B^{(-)}$ в области реакции III $(\pi\pi \to N\bar{N})$, который следует из условия унитарности.

В разделе 2 проводится учет влияния разреза от реакции III методом Мусхелишвили, которое вследствие ограничения в условии унитарности только низшим, двух π -мезонным состоянием, сводится, очевидно, к учету влияния $\pi\pi$ -взаимодействия. Неоднозначности, возникающие при учете $\pi\pi$ -взаимодействия, также обсуждаются в разделе 2. Выбор конкретного вида формфактора π -мезона приводится в разделе 3.

В разделах 4 и 6 получены уравнения для $s^{(-)}$ и $p^{(-)}$ парциальных амплитуд с учетом кроссинг-симметрии. Главные члены уравнений при разложении в ряд по $1/M$ удовлетворяют свойствам кроссинг-симметрии для фиксированного нуклона, которым посвящен раздел 5.

В разделе 7 проведено сравнение парциальных амплитуд с экспериментальными данными. Показана важность учета $\pi\pi$ -взаимодействия.

1. Исследование разреза от реакции III

Положение разреза реакции III для различных $|C| < 1$ подробно исследовалось в

---

x) Обозначения - см. работу/1/.

xx) Этот способ применялся проф. Цу/2/ к $\pi - N$ рассеянию.

работе . Как было показано, влияние его, очевидно, максимально для $C=-1$, так как при этом начало разреза наиболее приближается к физической области реакции 1. Различные подходы в π-N -рассеянии отличаются именно в этом пункте : в вычислении эффекта от реакции $\pi\pi \to N\bar{N}$. Поэтому корректность учета этого разреза важна и требует обоснования.

Рассмотрим ограничения, налагаемые на вид функций a и $B^{(-)}$ условием унитарности процесса 111. При этом будем использовать вместо a и $B^{(-)}$ спиральные состояния для процесса $\pi\pi \to N\bar{N}$ /4/

$$J_{+-} = -J_{-+} = \frac{q_3}{8\pi} \, Sin\, \theta_3 \cdot B^{(-)} \qquad (1.1)$$

$$J_{++} = J_{--} = \frac{q_3}{8\pi\, p_3^0} \left[-4p_3^2\, a + M B^{(-)}\right] \cdot Cos\, \theta_3 \, .$$

Разложение J_{ij} по парциальным волнам имеет вид

$$J_{++} = \frac{1}{p_3\, p_3^0} \sum_\ell (\ell + \tfrac{1}{2})(p_3 q_3)^\ell \, f_+^\ell \, P_\ell(Cos\theta_3) \qquad (1.2)$$

$$J_{+-} = q_3 \sum_\ell \frac{\ell+\frac{1}{2}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} (p_3 q_3)^{\ell-1} f_-^\ell \, P_\ell^{(1)}(Cos\theta_3) \, .$$

Для изотопического индекса (−) суммирование в (1.2) ведется по нечетным ℓ .

В двухмезонном приближении условие унитарности процеса 111 (см. (29) из /1/) имеет наиболее простой вид для парциальных амплитуд $f_\pm^\ell$.

$$Im\, f_\pm^\ell = f_\pm^\ell \, e^{-i\delta_I^\ell} \, Sin\delta_I^\ell \, . \qquad (1.3)$$

Здесь δ_I^ℓ -фазы $\pi\pi$ - рассеяния, I - полный изотопический спин $\pi\pi$ - системы. Нами будет использоваться аналитическое продолжение условия унитарности (1.3) в нефизическую область $4 < t < 16$ x) процесса $\pi\pi \to N\bar{N}$ /5/. Равенства (1.3) справедливы до первого порога неупругих процессов $\pi\pi$ -рассеяния, где все фазы δ_I^ℓ действительны, а высшие волны малы. Поэтому предположим, что

$$\delta_I^\ell = 0 \, , \qquad \ell \geq 3 \, . \qquad (1.4)$$

Тогда $f_\pm^\ell$ с $\ell \geq 3$ - действительные функции, а J_{++} J_{+-} имеют вид

$$J_{++} = \rho_1 e^{i\delta_1^1} + \rho_2 \, ; \qquad J_{+-} = \rho_3 e^{i\delta_1^1} + \rho_4 \, , \qquad (1.5)$$

где ρ_i - неизвестные функции.

Для определения вида ρ_2 и ρ_4 обратимся к разложениям (1.2). Они фактически идут по аргументу $s-\bar{s}$ и ближайшие их особенности обусловлены полюсами функции $B^{(-)}$. Будем далее разлагать в ряды функции J_{++}, J_{+-} без полюсных членов. Область сходимости разложений теперь задается двойными интегралами спектрального представления (кривые

x) Здесь и в последующем полагаем $\mu = 1$.

C_{13} и C_{23} в обозначениях Мандельстама). Заметим, что f_+^1 также содержат гармоники полюсных членов. Поэтому для того, чтобы воспользоваться (1.3) и не изменить структуры (1.5) будем вычитать из функций J_{++} , J_{+-} полюсные члены без первых гармоник. Ограничиваясь затем в (1.2) первыми членами разложений, получим явный вид функций ρ_2 и ρ_4 . Теперь мы имеем возможность выписать интересующие нас выражения для a и $B^{(-)}$

$$a = \tilde{\rho} e^{i\delta} + \frac{g^2}{4p_3^2} M \ (\Delta + \Delta_1)$$

$$B^{(-)} = \rho e^{i\delta} + g^2 (\Delta - \Delta_0) , \qquad (1.6)$$

где ρ , $\tilde{\rho}$ – неизвестные действительные функции, а

$$\Delta_0 = 1/2 \int_{-1}^{+1} \Delta \, d Cos \, \theta_3 \ ; \quad \Delta_1 = 3/2 \int_{-1}^{+1} Cos^2 \theta_3 \, \Delta \, d \ Cos \, \theta_3 \ .$$

В переменных ν , C формулы (1.6) справедливы для $\nu \geq C_R(C)$ (см.[8]). Мы используем их при $C = -1$.

2. $\pi\pi$ –взаимодействие и его учет

Мы знаем теперь аналитические свойства скалярных коэффициентов амплитуды пион-нуклонного рассеяния[1], а также приближенные выражения (1.6) этих функций на разрезе от процесса III и можем написать для них теоремы Коши при произвольном $|C| < 1$. Интегралы вдоль разрезов легко выразить через парциальные амплитуды рассеяния ([1] (2.3)(2.4)) Переход к парциальным волнам в левых частях формулы Коши можно осуществить несколькими путями: интегрированием по интервалу $-1 \leq C \leq +1$, разложением в ряды Тейлора при произвольном C , комбинированием дисперсионных соотношений для различных фиксированных C .

Обычный способ выделения парциальных волн – интегрирование по C – сопряжен с трудностями[3]. Антиэрмитовы части скалярных амплитуд пион-нуклонного рассеяния на разрезах от кроссинг-процессов вычисляются с помощью разложений по полиномам Лежандра. При этом разложения используются в областях, в которых они заведомо расходятся.

Дисперсионные соотношения для $C = \pm 1$ позволяют обойти эти трудности, так как косинусы углов рассеяния $Cos\theta_2$, $Cos\theta_3$ кроссинг-реакций при таких значениях C лежат в физических областях. Более подробно преимущества перехода к парциальным амплитудам путем использования дисперсионных соотношений для $C = \pm 1$ рассмотрены в [8,9].

Нашей задачей является получение сведений о $\pi\pi$ – взаимодействии из экспериментальных данных по πN -рассеянию. Ожидается, что $\pi\pi$ -взаимодействие важно для объяснения энергетической зависимости парциальных волн πN -рассеяния. Представления Мандельстама учитывают зависимость амплитуды рассеяния от t . Условия унитарности процесса III связывают ее с процессом $\pi\pi$ -рассеяния. Однако $t = -2\nu(1-C)$ содержит как угловую C , так и энергетическую ν переменные. На плоскости ν , C кривая $t = 4$ имеет две ветви ϵ , γ (рис. 1). Линия $C = +1$ является их асимптотой, вдоль которой производная по ν от интеграла, ответственного за $\pi\pi$ – взаимодействие, равна нулю, а производная по C максимальна. Ясно, что в дисперсионных соотношениях для рассеяния вперед эффект $\pi\pi$ -взаимодействия войдет в константы вычитания и интерпретация его затруднительна.

На ветви ϵ производная по ν при физических значениях C максимальна для $C=-1$, а производная по C минимальна в этой точке. Таким образом на плоскости ν, C существует точка $C=-1$, в которой влияние $\pi\pi$ - взаимодействия на энергетическую зависимость парциальных волн πN -рассеяния оказывается наиболее существенным.

Поэтому переход к парциальным волнам путем интегрирования, если отвлечься от других его недостатков, несколько стушевал бы энергетическую зависимость $\pi\pi$ -вклада. Использование дисперсионных соотношений назад является в этом смысле наиболее выгодным. Переход к парциальным амплитудам будет осуществляться путем комбинирования дисперсионных соотношений для $C=\pm 1$. При этом соотношений достаточно для получения $s^{(-)}$ и $p^{(-)}$ парциальных амплитуд. Учет d -волн можно провести, включив дисперсионные соотношения для производных по C от скалярных функций амплитуды πN -рассеяния при $C=-1$. Однако, учитывая, что под интегралами мы будем ограничиваться только p -волнами, последнее мало целесообразно. Определенные так d -волны будут содержать большие ошибки [9]. Дисперсионные соотношения для функций $\Phi=(a, B^{(-)})$ при $C=-1$ имеют вид ([1] (4,8)).

$$\Phi(\nu) = 1/\pi \int_0^\infty \frac{Im\,\Phi(\nu')}{\nu'-\nu}\,d\nu' + 1/\pi \int_{-\infty}^{-1} \frac{Im\,\Phi(\nu')}{\nu'-\nu}\,d\nu' \tag{2.1}$$

+ полюсные члены для $B^{(-)}$.

На разрезе $-\infty$, -1 антиэрмитовы части $\Phi(\nu)$ заданы формулами (1.6). Строго говоря, они верны до $\nu=-4$ (что соответствует $t=16$), однако, обычно предполагается, что область их справедливости несколько шире [10]. Формулы (1.6) представляют амплитуду процесса $\pi\pi\to N\bar{N}$ в нефизической области $4<t<16$. Первые члены - p -волновые амплитуды вторые - сумма всех парциальных амплитуд с высшими угловыми моментами. Пренебрежение членами с большими ℓ в разложениях (1.2) эквивалентно предположению о том, что высшие угловые моменты хорошо аппроксимируются полюсными членами [6]. При этом в соответствии с (1.4) $Im\, f_{\pm}^{\ell}=0$, если $\ell\geq 3$. Последнее следует из свойств функций Δ_0 и Δ_1, которые являются "физическими" ветвями аналитических функций $\Delta_0(z)$ и $\Delta_1(z)$. Функции $\Delta_0(z)$ и $\Delta_1(z)$ однозначны на сложной римановой поверхности с логарифмическими точками ветвления. Физический лист фиксируется выбором знаков корней в $p_3(t)$ и $q_3(t)$ для $t>4M^2$ и тем, что Δ_0 и Δ_1 являются аналитическим продолжением определений (1.6) в область $t<4M^2$. На нем имеется один логарифмический разрез $-\infty<t<4\left(1-\frac{1}{4M^2}\right)$; Δ_0 Δ_1 действительны на луче $t>4\left(1-\frac{1}{4M^2}\right)$. Точность приближенных выражений (1.6) требует дополнительного рассмотрения. Однако в нашем случае она кажется достаточной (см. [7]).

Интеграл вдоль разреза от реакции III содержит неизвестные функции ρ и $\tilde{\rho}$, которые связывают уравнения π-N - рассеяния с уравнениями для $\pi\pi\to N\bar{N}$. Обычно относительно них делаются дополнительные предположения. В работе [11] они заменяются значениями ρ и $\tilde{\rho}$ в точке, соответствующей резонансу $\pi\pi$ -взаимодействия $(T=J=1)$. Аналогичный прием используется в [12].

Если пренебречь высшими волнами в (1.6), то на левом разрезе для функций $\Phi \equiv (a, b^{-})$ будем иметь линейное краевое условие $\Phi^{+} = e^{2i\delta_1^1}\Phi^{-}$. На правом разрезе функции Φ выражаются через известные фазы πN-рассеяния и мы приходим к линейной краевой задаче для функций Φ /13/. Методы их решения известны /14/. Однако при этом возникает вопрос о выборе решения, ибо даже в классе функций, ограниченных на разрезе, оно не единственно. Кроме того, таким путем не удается оценить роль высших волн процесса III.

Поставим задачу - исключить из дисперсионных соотношений неизвестные функции ρ и $\tilde{\rho}$, но так, чтобы учесть высшие парциальные волны процесса III. Для решения задачи применим следующий прием. Обозначим через $F(\nu)$ класс функций, однозначных в плоскости ν с разрезом $-\infty, -1$. На разрезе $F^{+}(\nu) = e^{-2i\delta(\nu)}F^{-}(\nu)$ (2.2). Других ограничений на $F(\nu)$ налагать не будем. Рассмотрим вместо $\Phi(\nu)$ функцию $\Phi(\nu)\, F^{-1}(\nu)$. Тогда на левом разрезе имеем

$$(2.2') \qquad Im\, \tilde{\Phi}(\nu)\, F^{-1}(\nu) = \left(\frac{1}{F^{+}(\nu)} - \frac{1}{F^{-}(\nu)}\right)\phi(\nu),$$

где $\phi(\nu)$ - известный вклад высших волн процесса III (1.6). Таким образом, дисперсионные соотношения для $\Phi(\nu)\, F^{-1}(\nu)$ отвечают на поставленный выше вопрос. Однако их конкретная форма зависит от поведения $F(\nu)$ на бесконечности и от расположения нулей $F(\nu)$. Неоднозначность решения содержится в выборе степени "вычитательного" полинома и определении вычетов в нулях $F(\nu)$. Набор вышеупомянутых констант и интегральные члены, содержащие $F(\nu)$, определяют эффект $\pi\pi$-взаимодействия в πN-рассеянии. В зависимости от вида $F(\nu)$ можно получить эффект $\pi\pi$-взаимодействия любого знака и произвольной функциональной зависимости.

Выбор "физической" функции $F(\nu)$ гарантирует правильность учета $\pi\pi$-взаимодействия.

3. Электромагнитный формфактор π-мезона

Электромагнитный формфактор π-мезона $F_\pi(\nu)$ в двухмезонном приближении удовлетворяет краевому условию (2.2). Поэтому в качестве функции $F(\nu)$ естественно выбрать $F_\pi(\nu)$. Неоднозначность решения, линейного на разрезе $-\infty$, -1 интегрального уравнения (2.1), тем самым сводится к неоднозначности в определении $F_\pi(\nu)$.

Общее решение (2.2) имеет вид:

$$F_\pi(\nu) = P(\nu)\, e^{u(\nu)}, \quad u(\nu) = -\frac{\nu}{\pi}\int_0^\infty \frac{\delta_1^1(k^2)}{(k^2+1)(k^2+1+\nu)}\, dk^2, \tag{3.1}$$

где $P(\nu)$ - произвольный полином, δ_1^1 - фаза, соответствующая состоянию $J = T = 1$, k^2 - модуль импульса π-мезонов в системе центра масс $\pi\pi$-взаимодействия. Если потребовать, чтобы формфактор $F_\pi(\nu)$ был ограничен на разрезе, то степень полинома $P(\nu)$ определяется поведением фазы δ_1^1 на бесконечности. Из условия нормировки $F_\pi(0) = 1$ следует, что $P(0) = 1$. Вопрос о неоднозначности $F_\pi(\nu)$ обсуждался в частности в /15/. Мы будем пользоваться общепринятым предположением о том, что $P(\nu) \equiv 1$ (см. /16/).

Конкретный вид фазы $\delta_1^1(k^2)$ неизвестен. В соответствии с существующей гипотезой о резонансе в $J = T = 1$ волне $\pi\pi$-рассеяния положим:

$$a k^3 \operatorname{ctg} \delta_1^1 = k_r^2 - k^2. \tag{3.2}$$

Формулу (3.2) можно обобщить, написав в правой ее части произвольный полином от k^2 /13/. Выполняя интегрирование в (3.1), получим точное выражение для $F_\pi(\nu)$ (см. приложение 1).

Для $\epsilon^2 \ll 1$ вид $F_\pi(\nu)$ упрощается:

$$F_\pi(\nu) = \frac{k_r + \dfrac{1}{k_r + \epsilon}}{k_r + \omega^2 \dfrac{1}{k_r + \epsilon\omega}}; \qquad \omega^2 > 0 \tag{3.3}$$

$$|F_\pi(\nu)| = \left[\frac{(k_r^2+1)^2 + \epsilon^2\left(k_r^4 - \dfrac{k_r^2+1}{2}\right)}{(k_r^2+\omega^2)^2 + \epsilon^2\left(k_r^2 - \dfrac{k_r^2+1}{2}\right)}\right]^{1/2} \left[\frac{k^2 - \epsilon^2\omega^2}{k_r^2 - \epsilon^2}\right]^{1/2} \left[\frac{k_r^2 + 1 - a}{k_r^2 + 1 + a}\right]^{1/2}; \qquad \omega^2 < 0.$$

Интегральное уравнение

$$F_\pi(\nu) = 1 + \nu/\pi \int_{-1}^{-\infty} \frac{e^{i\delta} \sin\delta \, F_\pi(\nu')}{\nu' \, (\nu' - \nu)} d\nu', \qquad k^2 + 1 = -\nu \tag{3.4}$$

показывает, что для $F_\pi(\nu)$ в виде (3.3) наиболее важной является небольшая окрестность $-k_r^2 = \nu + 1$. Интеграл по далекой области определяет несущественные детали поведения $F_\pi(\nu)$ при малых $\nu \approx \nu_r$. Эти свойства связаны с тем, что в точке ν_r выражение $Re\, F_\pi(\nu) \approx 1/\epsilon$, т.е. имеется резко выраженный максимум.

Однако можно подобрать полином $P(\nu)$ так, чтобы он имел нуль в окрестности ν_r. Формфактор такого типа на бесконечности не ограничен и для него важна вся область интегрирования в (3.4). Последнее нельзя причислить к числу достоинств формфактора с нулем. Главным возражением против него является релятивистская модель, рассмотренная Гелл-Манном и Захариазеном /17/. Электромагнитный формфактор π -мезона в этой модели в точке $\nu = \nu_r$ обратно пропорционален ширине $\pi\pi$ -резонанса. Поэтому в дальнейшем будем пользоваться (3.3).

4. Уравнения для парциальных волн

Ограничимся рассмотрением $s^{(-)}$ и $p^{(-)}$ волн, что допустимо при малых энергиях. Используя функции $f_{1,2}^{(-)}(\nu, \pm 1)$, имеем

$$f_s^{(-)} = ½ \left[f_1^{(-)}(\nu, +1) + f_1^{(-)}(\nu, -1) \right]$$

$$f_{p_{3/2}}^{(-)} = 1/6 \left[f_1^{(-)}(\nu, +1) - f_1^{(-)}(\nu, -1) \right] \tag{4.1}$$

$$f_{p_{1/2}}^{(-)} - f_{p_{3/2}}^{(-)} = ½ \left[f_2^{(-)}(\nu, +1) + f_2^{(-)}(\nu, -1) \right].$$

Функции $f^{(-)}_{1,2}$ выражаются через скалярные коэффициенты (a , $B^{(-)}$ амплитуды πN - рассеяния) следующим образом:

$$f_1^{(-)}(\nu, C) = \frac{p_0+M}{8\pi W}\left[\{4p_0\,\omega + 2\nu(1+C)\}a(\nu, C) + (W-M)\,B^{(-)}(\nu, C)\right]$$

$$f_2^{(-)}(\nu, C) = \frac{p_0-M}{8\pi W}\left[-\{4p_0\omega + 2\nu(1+C)\}\,a(\nu, C) + (W+M)\,B^{(-)}(\nu, C)\right], \tag{4.2}$$

где $\omega = q_0$, $W = p_0 + q_0$. Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед запишем в обычной форме

$$\Phi(s, +1) = 1/\pi \int_{(M+1)^2}^{\infty} Im\,\Phi(s', +1)\left[\frac{1}{s'-s} + \frac{1}{s'-s}\right] ds' + \text{ полюсный член для } B^{(-)} \tag{4.3}$$

Дисперсионные соотношения для $\Phi(\nu,+1)$ в плоскости ν неудобны из-за сложной структуры разреза от кроссинг-реакции. Зависимость ν_2 от ν (1.46) содержит полюс, который приводит к тому, что разрез от процесса 11 распадается на несколько частей. Имея в виду в дальнейшем переход к переменной ν в (4.3), приведем необходимые формулы:

$$\frac{ds'}{s'-s} = d\nu'\left[\frac{1}{\nu'-\nu} - \frac{1}{K(\nu')}\,\frac{1}{\frac{s(\nu)\,s(\nu')}{(M^2-1)^2} - 1}\right]$$

$$\frac{ds'}{s'-s} = \frac{d\nu'\ s(\nu')}{2K(\nu')}\,\frac{1}{\nu'+\nu+K(\nu)+K(\nu')}\ , \tag{4.4}$$

где $s(\nu) = M^2 + 1 + 2\nu + 2K(\nu)$, $K(\nu) = \sqrt{(M^2+\nu)(1+\nu)}$.

Соотношение (4.3) записано без вычитания. Согласно теореме Померанчука /18/, $\sigma_{(+)tot}(\infty) = \delta_{-\,tot}(\infty)$ (здесь $\pm$ относятся к $\pi^{\pm}N$ соответственно). Это приводит к тому, что амплитуда упругого πN -рассеяния с изотопическим индексом (−) на бесконечности ограничена. Последнее свидетельствует в пользу (4.3). Отметим еще, что аналогичное предположение использовалось в /19/ и было получено удовлетворительное согласие с экспериментом.

Дисперсионные соотношения для рассеяния назад будем писать для функций $\frac{\Phi(\nu,-1)}{F_\pi(\nu)}$, где $F_\pi(\nu)$ выбирается в виде (3.3). Формфактор $F_\pi(\nu) \approx 1/\sqrt{\nu}$ при больших значениях ν , что ухудшает поведение отношения $\frac{\Phi(\nu,-1)}{F_\pi(\nu)}$ на бесконечности. Поэтому в дисперсионных соотношениях для $\frac{\Phi(\nu,-1)}{F_\pi(\nu)}$ необходимо провести дополнительное вычитание. Проводя вычитание в точке $\nu = 0$, окончательно получим:

$$\Phi(\nu,-1) = \Phi(0,-1)\,F_\pi(\nu) + \nu/\pi \int_0^{\infty} \frac{Im\,\Phi(\nu',-1)}{\nu'(\nu'-\nu)}\,\frac{F_\pi(\nu)}{F_\pi(\nu')}\,d\nu' + \tag{4.5}$$

$$+\frac{F_\pi(\nu)\,\nu}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-1} \frac{G(\nu')\left[\frac{1}{F_\pi^{+}(\nu')} - \frac{1}{F_\pi^{-}(\nu')}\right]}{\nu'(\nu'-\nu)}\,d\nu' + \text{ полюсный член для } B^{(-)}$$

$$F_\pi^{\pm}(\nu) = F_\pi(\nu \pm io),$$

$$G(\nu) = \begin{cases} g^2(\Delta - \Delta_1) & \text{для} \quad B^{(-)} \\ g^2 \dfrac{M}{M^2+\nu}(\Delta_1 + \Delta_2) & \text{для} \quad a. \end{cases}$$

Полюсный член для $B^{(-)}$ имеет вид:

$$-g^2 \frac{2 - 1/M^2}{4M^2} \frac{1}{F_\pi(\nu_0)} \frac{1}{\nu - \nu_0}, \qquad \nu_0 = -1 + \frac{1}{4M^2}.$$

При вычислении $Im\ \Phi(\nu, \pm 1)$ ограничимся наибольшей из фаз πN-рассеяния – фазой a_{33}. В этом приближении мнимые части функций $\Phi(\nu, \pm 1)$ имеют вид:

$$\frac{1}{4\pi} Im\ a(\nu, \pm 1) = \frac{1}{4K(\nu) + 2\nu(1 \pm 1)} \left[\pm 3 \frac{W+M}{p_0 + M} + \frac{W-M}{p_0 - M} \right] \frac{\psi(\nu)}{3}$$

$$\frac{1}{4\pi} Im\ B^{(-)}(\nu, \pm 1) = -\frac{\psi(\nu)}{3} \left[\pm 3 \frac{1}{p_0 + M} - \frac{1}{p_0 - M} \right]. \tag{4.6}$$

$$\psi(\nu) = Im\ f_{33}$$

Константы вычитания $\Phi(0, -1)$ выразятся через величины $a^- = \frac{1}{3}(a_1 - a_3)$, $a^- = \frac{1}{3}(a_{11} - a_{31})$, $a_3^- = 1/3(a_{13} - a_{33})$. Это не означает, что все они являются параметрами в окончательных выражениях, поскольку вычитание проведено только в (4.5), а в (4.3) такового не делается. Величины a^-, a_1^- и a_3^- вычисляются из уравнений. Подробнее этот вопрос будет обсужден ниже. Здесь же мы приведем явные выражения для $\Phi(0, -1)$:

$$\frac{a(0,-1)}{4\pi} = \frac{1}{4M} \left[\frac{2M+1}{2M} a^- - 2M(a_1^- - a_3^-) \right] \tag{4.7}$$

$$\frac{B^{(-)}(0,-1)}{4\pi} = \frac{a^-}{2M} + 2M(a_1^- - a_3^-).$$

Используя соотношения (4.1) – (4.7), получим выражение для $Re\ f_s^{(-)}$, $Re\ f_{p_{1/2}}^{(-)}$, $Re\ f_{p_{3/2}}^{(-)}$ через большую фазу a_{33} и константы вычитания. Эффект $\pi\pi$ –взаимодействия учитывается формфактором π –мезона $F_\pi(\nu)$.

5. Кроссинг-симметрия

Инвариантные скалярные функции амплитуды πN –рассеяния обладают следующими свойствами кроссинг-симметрии:

$$A^{(\pm)}(s, \bar{s}, t) = \pm A^{(\pm)}(\bar{s}, s, t); \qquad B^{(\pm)}(s, \bar{s}, t) = \mp B^{(\pm)}(\bar{s}, s, t). \tag{5.1}$$

Выясним вид кроссинг-симметрии для парциальных s- и p-амплитуд, вытекающий из (5.1). Замена $s \longleftrightarrow s$; $t \longleftrightarrow t$ в переменных ω, C означает $(\omega, C) \longleftrightarrow (\omega_1, C_1)$. Формулы перехода имеют громоздкий вид. Однако при разложении по $1/M$ они существенно упрощаются:

$$\omega_1 = -\omega + \nu/M\ (1 + C) + O\left(\frac{1}{M^2}\right) \tag{5.2}$$

$$C_1 = C + 2\,\frac{1 - C^2}{M} + O\left(\frac{1}{M^2}\right).$$

В области малых энергий $\omega < M$ такое разложение оправдано.

Ограничиваясь s- и p-волнами, получим, что $f_2(\omega, C)$ от C не зависит. Функции $f_1^{\pm}(\omega, C)$ и $f_2^{\pm}(\omega)$ связаны с $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$ соотношениями:

$$A^{(\pm)} = f_1^{(\pm)} - f_2^{(\pm)} - \frac{2M\omega}{\nu}\, f_2^{(\pm)} + O(1/M)$$

$$B^{(\pm)} = \frac{2M}{\nu}\, f_2^{(\pm)} + O(1/M). \tag{5.3}$$

Таким образом, из (5.2) и (5.3) следует, что

$$f_2^{(\pm)}(\omega) = \mp f_2^{(\pm)}(-\omega) + O(1/M)$$

$$f_1^{(\pm)}(\omega, C) - f_2^{(\pm)}(\omega) \mp [\, f_2^{(\pm)}(-\omega) - f_2^{(\pm)}(-\omega)] = \pm\, 2(1 + C)\, f_2^{(\pm)}(\omega) + O(1/M). \tag{5.4}$$

Второе из равенств линейно по C. Поэтому независимо от способа перехода к парциальным волнам будем иметь одни и те же свойства кроссинг-симметрии:

$$f_s^{(\pm)}(\omega) \mp f_s^{(\pm)}(\omega) = 0$$

$$f_{p_{1/2}}^{(\pm)}(\omega) - f_{p_{3/2}}^{(\pm)}(\omega) \pm [\, f_{p_{1/2}}^{(\pm)}(-\omega) - f_{p_{3/2}}^{(\pm)}(-\omega)] = 0 \tag{5.5}$$

$$f_{p_{1/2}}^{(\pm)}(\omega) + 2 f_{p_{3/2}}^{(\pm)}(\omega) \mp [\, f_{p_{1/2}}^{(\pm)}(-\omega) + 2 f_{p_{3/2}}^{(\pm)}(-\omega)] = 0.$$

Отметим, что такой простой вид условий кроссинг-симметрии есть результат разложения по $1/M$. Учет членов типа $1/M$ приводит к перепутыванию парциальных амплитуд; например, в первое из равенств (5.5) войдут p-волны /25/.

6. Разложение по $1/M$

При выводе уравнений для парциальных волн нами были учтены свойства (5.1). Очедля парциальных волн, удовлетворяющую свойствам симметрии (5.5). Проводя указанное разложение, имеем

$$Re\, f_s^{(-)} = f^2\omega + \frac{\nu f^2}{\omega}\left[\frac{F(\nu)}{F(-1)} - 1\right] + \frac{F(\nu)-1}{2}\left[\omega a^- + \nu(a_1^- - a_3^-)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\omega a^- + \nu(a_1^- - a_3^-)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'}\, Im\, f_{p_{3/2}}^{(-)}\left\{2\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\nu}{\nu'}\right\} - \frac{\nu}{2\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\,\frac{Im\, f_{p_{3/2}}^{(-)}}{\nu'}\left(\frac{F(\nu)}{F(\nu')} - 1\right)\left(2\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\nu}{\nu'}\right)$$

$$Re\, f_{p_{3/2}}^{(-)} = -2/3\, f^2\frac{\nu}{\omega} - \frac{f^2\nu}{3\omega}\left(\frac{F(\nu)}{F(-1)} - 1\right) + 1/6\,(1 - F(\nu))\left[\omega a^- + \nu(a_1^- - a_3^-)\right] +$$

$$+ \frac{\nu}{2\pi}\int_0^\infty \frac{Im\, f_{p_{3/2}}^{(-)}}{\omega'}\,\frac{d\nu'}{\nu'}\left(\frac{1}{\omega'-\omega} - \frac{1}{3(\omega'+\omega)}\right) + \frac{\nu}{6\pi}\int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\,\frac{Im\, f_{p_{3/2}}^{(-)}}{\nu'}\left(\frac{F(\nu)}{F(\nu')} - 1\right)\left(2\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\nu}{\nu'}\right) \tag{6.1}$$

$$Re\left(f_{p_{1/2}}^{(-)} - f_{p_{3/2}}^{(-)}\right) = -\frac{\nu}{2}(a_1^- - a_3^-)(1 - F(\nu)) - \frac{\nu}{2}(a_1^- - a_3^-) - \frac{\nu}{2\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\omega'-\omega} + \frac{1}{\omega'+\omega}\right)\left(1 + \frac{\nu}{\nu'}\right)\frac{Im\, f_{p_{3/2}}^{(-)}}{2\omega'}\,\frac{d\nu'}{\nu'}$$

$$- \frac{\nu^2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{Im\, f_{p_{3/2}}^{(-)}}{\nu'^2}\,\frac{d\nu'}{\nu'-\nu}\left[\frac{F(\nu)}{F(\nu')} - 1\right].$$

С помощью соотношения (4.5) легко получить оценку влияния высших волн процесса $\pi\pi \to N\bar{N}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-1}\frac{G(\nu')}{\nu'(\nu'-\nu)}\left[\frac{1}{F(\nu')} - \frac{1}{F(\nu)}\right]d\nu' \approx \epsilon^2\,\frac{Const}{\nu_r - \nu}\,. \tag{6.2}$$

Используя результаты /11/, находим, что $\epsilon^2 = 0{,}04$. Так как $\frac{\epsilon}{k_r} \lesssim 0.1$, то в первом из соотношений (3.3) и в (6.2) можно положить величину $\epsilon = 0$. Таким образом, в дальнейшем исключаем из рассмотрения высшие волны процесса $\pi\pi \to N\bar{N}$, а для формфактора получаем следующее выражение:

$$F(\nu) = \frac{k_r^2 + 1}{k_r^2 + \nu + 1}\,. \tag{6.3}$$

В рассматриваемом приближении можно упростить запись соотношений (6.1). Именно, осуществляя в (6.1) предельный переход $\nu \to 0$, получим:

$$\begin{aligned} a^- &= 2f^2 - \frac{2}{3\pi}\int_0^\infty \frac{\psi(\nu')}{\nu'\omega'}\,d\nu' \\ a_1^- - a_3^- &= \frac{1}{3\pi}\int_0^\infty \frac{\psi(\nu')}{\nu'^2}\,d\nu'\,. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Соотношения (6.3) и (6.4) позволяют теперь представить (6.1) в виде, явно удовлетворяющем условиям кроссинг-симметрии (5.5):

$$
\begin{aligned}
&Re\, f_S^{(-)} = a^- \omega F_\pi(\nu) \\
&Re\big(f_{P_{1/2}}^{(-)} - f_{P_{3/2}}^{(-)}\big) = \nu\,(a_1^- - a_3^-)\,\frac{F_\pi(\nu)}{2} - \frac{\nu}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\nu'+\nu}{\nu'-\nu}\,\frac{Im\, f_{P_{3/2}}^{(-)}}{\nu'^2}\,d\nu' - \frac{\nu^2}{2\pi}\int_0^\infty \frac{Im\, f_{P_{3/2}}^{(-)}}{\nu'^2(\nu'-\nu)}\Big[\frac{F_\pi(\nu)}{F_\pi(\nu')}-1\Big]d\nu' \qquad (6.5) \\
&Re\big(f_{P_{1/2}}^{(-)} + 2f_{P_{3/2}}^{(-)}\big) = -2\,\frac{\nu}{\omega} f^2 + a^- \omega\,[1 - F_\pi(\nu)] + \frac{2\nu\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{Im\, f_{P_{3/2}}^{(-)}}{\nu(\nu'-\nu)\omega'}\,d\nu'.
\end{aligned}
$$

7. Сравнение с экспериментом

При выводе уравнений (6.5) нами было проведено вычитание в дисперсионных соотношениях для рассеяния назад в точке $\nu=0$. Это приводит к исчезновению вклада $\pi\pi$ - членов в длину рассеяния $a^{(-)}$, для которой получается в точности формула $CGLN$ [20]. Учет поправок типа $1/M$ приводит к выражению

$$(1+1/M)\,a^- = 2f^2 - \frac{2}{3\pi}\int_0^\infty \frac{f(\nu')}{\nu'}\Big[\frac{1}{\omega'\frac{p_0}{M}+\frac{\nu'}{M}}\Big(1+\frac{\sqrt{1+\nu'}}{M+p_0'}\Big) + \frac{1}{M+p_0'}\Big]\,d\nu'. \qquad (7.1)$$

При получении соотношения (7.1) разложение по $1/M$ проводилось так, чтобы не ухудшать поведение подынтегральной функции на бесконечности. Численные расчеты по формуле (7.1) с использованием фазы a_{33} в виде [21]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\nu^{3/2}}{\omega^*}\,u^2(\nu)\,ctg\, a_{33} = \frac{4}{3f^2}\Big(1 - \frac{\omega^*}{2.17}\Big) \\
&u(\nu) = \frac{1}{1+a^2\nu};\quad a = 0{,}27;\qquad f^2 = 0.087
\end{aligned}
\qquad (7.2)
$$

дают значение $a^- = 0{,}092$, что находится в согласии с данными Орира [22]. Если вместо выражения (7.2) использовать другие известные формулы для a_{33}, то значения a^- – оказываются приблизительно равными 0,08. Таким образом, длину рассеяния a^- в уравнениях (6.5) можно рассматривать как параметр, поскольку при любом выборе фазы a_{33} значение величины a^- хорошо согласуется с экспериментальным значением.

Величины a_1^- и a_3^- известны из эксперимента с большими ошибками $a_1^- = +0{,}008 \pm 0{,}037$, $a_3^- = -0{,}095 \pm 0{,}08$ [23], которые обусловлены большими ошибками в определении малых фаз a_{11} и a_{13}. Для разности $a_1^- - a_3^-$, например, из соотношения (6.4) можно получить значение, равное 0,025, что в пределах ошибок согласуется с экспериментальными данными по a_{ij}. Однако, для описания энергетического хода фаз с помощью соотношения (6.5) величина $a_1^- - a_3^-$ должна иметь большие значения. Противоречивость в определении разности $a_1^- - a_3^-$ можно понять следующим образом: разложим правые части $Re\, f_{P_{1/2}}^{(-)}$ и $Re\, f_{P_{3/2}}^{(-)}$ в (6.5) по степеням ν; тогда первые члены разложений, т.е. a_1^- и a_3^-, вычисляются плохо, что является следствием пренебрежения малыми фазами под интегралами в системе (6.5). Если же провести дополнительное вычитание в точке $\nu=0$, то величины a_1^- и a_3^- станут параметрами теории и можно попытаться вычислить следующие коэффициенты разложения. Выполняя указанную операцию во втором и третьем из уравнений (6.5), получим

$$Re\ f_s^{(-)} = a^- \omega\ F_\pi\ (\nu)$$

$$3Re\ f_{p_{1/2}}^{(-)} = \nu\{\ a_1^-\ [\omega + 1 + F_\pi(\nu)\ ] + a_3^-\ [\ 2\frac{\nu}{\omega+1} + 1 - F_\pi\ (\nu)\ ] + 2\frac{\nu}{\omega}\ f^2 +$$

$$+ a^- \omega\ \frac{1 - F_\pi(\nu) + \nu\ F_\pi'(\nu)_{\nu=0}}{\nu} - \frac{2\nu}{\pi}\int_0^\infty \frac{Im\ f_{p_{3/2}}^{(-)}}{\nu'^2\omega'(\omega' + \omega)}\ d\nu' -$$

$$- \frac{\nu}{\pi}\ '\int_0^\infty \frac{Im\ f_{p_{3/2}}^{(-)}}{\nu'^2(\nu' - \nu)}\ [\ \frac{F(\nu)}{F(\nu')} - 1\ ]\ d\nu'\} \tag{7.3}$$

$$3Re\ f_{p_{3/2}}^{(-)} = \nu\{\ a_3^-\ [2\omega + \frac{1 + F(\nu)}{2}\ ] + a_1^-\ (\frac{\nu}{\omega+1} - \frac{1 - F(\nu)}{2}\ ) + 2\frac{\nu}{\omega}\ f^2 +$$

$$+ a^- \omega\ \frac{1 - F(\nu) + \nu F'(\nu)_{\nu=0}}{\nu} + \frac{\nu}{\pi}\int_0^\infty \frac{Im\ f_{p_{3/2}}^{(-)}}{\nu'^2(\nu' - \nu)}\ [\ 1 + 2\frac{\omega}{\omega'}]\ d\nu' +$$

$$+ \frac{\nu}{2\pi}\int_0^\infty \frac{Im\ f_{p_{3/2}}^{(-)}}{\nu'^2(\nu' - \nu)}\ [\ \frac{F(\nu)}{F(\nu')} - 1\ ]\ d\nu'\ \}.$$

Здесь штрих у F означает производную по ν, а выражение в фигурных скобках $-3a_1^-(\nu)$ и $3a_3^-(\nu)$, соответственно.

Положение $\pi\pi$ -резонанса определим из сравнения $Re\,f_s^{(-)}$ с экспериментальными данными. При этом удовлетворительное описание энергетической зависимости s -волны получаем при $a^- = 0.08$, $t_r = 22$, (рис. 2). Оценки по методу наименьших квадратов дают те же значения для a^- и t_r с точностью до ~ 2%. Формулы для p -волн мало чувствительны к величинам a^-, t_r и сильно зависят от a_1^-, a_3^- и f^2. Вид функций, стоящих множителями при a_1^- и a_3^- следует из кроссинг-симметрии. Они являются растущими функциями ω. Таким образом, небольшие изменения в константе вычитания сильно сказываются на поведении $Re\ f_{p_{1/2}}^{(-)}$ и $Re\ f_{p_{3/2}}^{(-)}$ при $\eta \approx 2-3$. Зависимость $Re\ f_{p_{1/2}}^{(-)}$ от энергии (см. рис. 3) требует, чтобы величина a_1^- была отрицательной. Отметим, что если использовать для $Re\ f_{p_{1/2}}^{(-)}$ выражение без дополнительного вычитания, то вывод о знаке a_1^- не меняется.

Вычитание в точке $\nu = 0$ значительно повышает требования к точности в определении $\psi(\nu)$. Интеграл в смысле главного значения в формуле для $Re\ f_{p_{3/2}}^{(-)}$ важен для получения резонансной зависимости. Небольшие изменения его величины сильно меняют ход кривой в области $\eta \gtrsim 1{,}5$. Вблизи резонанса $\eta\,Im\ f_{p_{3/2}}^{(-)} \approx Cos^2\,a_{13}$. Поскольку всюду под интегралами полагалось $a_{ij} = 0$, кроме a_{33}, то для $\eta Re\ f_{p_{3/2}}^{(-)}$ выше резонанса можно ожидать только качественного согласия с экспериментом.

Численные расчеты показывают (рис. 4), что при любых разумных значениях a_1^-, a_3^-, кривые $\eta\,Re\,f_{p_{3/2}}^{(-)}$ хорошо описывают эксперимент до $\eta \approx 1{,}1$. В окрестности резонанса $Re\ f_{p_{3/2}}^{(-)}$ проходит через нуль (см. рис. 4), однако экспериментальные точки лежат выше кривых. Наилучшего согласия с экспериментом удается добиться при значениях a_1^- , a_3^- , несколько отличающихся от таковых для $Re\, f^{(-)}_{p_{1/2}}$.

По нашему мнению, это является результатом аппроксимации подынтегральной функции. Поэтому представляет интерес численное решение интегрального уравнения для $f^{(-)}_{p_{3/2}}$. Если задаться энергетической зависимостью α_{33} , то можно надеяться получить малую фазу α_{13} . Такой численный расчет был бы дополнительной проверкой системы (7.3).

Влияние $\pi\pi$ -взаимодействия на $f^{(-)}_{p_{3/2}}$ – волну оказывается малым. Поскольку формула Чу-Лоу для α_{33} хорошо описывает эксперимент лишь до резонанса, можно ожидать, что вклад $\pi\pi$ -взаимодействия, если он важен, будет заметен выше $\eta \approx 2$. Пунктирная кривая, представляющая $\pi\pi$ -эффект, удовлетворяет этому требованию (см.рис.4).

Выводы

1. С помощью двойных спектральных представлений Мандельстама для скалярных функций амплитуды $\pi - N$ -рассеяния получены уравнения для s^- , $p^{(-)}_{1/2}$, $p^{(-)}_{3/2}$ парциальных волн. Переход к парциальным амплитудам осуществляется путем комбинирования дисперсионных соотношений для рассеяния вперед и назад.

2. Системы уравнений для парциальных волн (6,5), (7,3) учитывают влияние $\pi\pi$ -взаимодействия на πN -рассеяние. При выключении $\pi\pi$ -взаимодействия $(F_\pi(\nu) \equiv 1)$ уравнения (6.5) переходят в уравнения Чу-Лоу, а (7.3) – в уравнения Чу-Лоу с соответствующими вычитаниями. Окончательные формулы (6.5), (7.3) подчиняются свойствам кроссинг-симметрии в форме (5.5). Все параметры в них имеют "ясный физический смысл".

3. Анализируется неоднозначность учета $\pi\pi$ -взаимодействия, которая сводится к неоднозначности в определении электромагнитного формфактора π -мезона. Для конкретного вида $F_\pi(\nu)$ (6.3) проводится сравнение с экспериментом.

4. Удовлетворительное описание $s^{(-)}$ волны получается при $a^- = 0{,}08$, $t_r = 22$. При значении $a_1^- \approx -0{,}004$, $a_3^- \approx -0{,}1$ и $f^2 = 0{,}087$ волна $f^{(-)}_{p_{1/2}}$ хорошо передает энергетическую зависимость до $\eta \approx 3$, а для $f^{(-)}_{p_{3/2}}$ имеется качественно верная зависимость от η . Последнее связано с грубостью предположений, сделанных при вычислении интеграла в смысле главного значения. Как и ожидалось, эффект $\pi\pi$ -взаимодействия в $f^{(-)}_{p_{3/2}}$ мал.

Знак a_1^- $(a_1^- < 0)$ не зависит от того, проводится в уравнениях для p -волн вычитание или нет. Он является следствием кроссинг-симметрии. Если пренебречь ею и полагать, как обычно, $\alpha_{11} \approx a_{11}\eta$, то $a_1^- > 0$.

5. Ширина $\pi\pi$ -резонанса мало изменяет s – и p – волны при низких энергиях. Однако она определяет асимптотику $F_\pi(\nu)$ при $\nu \to +\infty$ и будет сказываться при больших энергиях, т.е. в области, лежащей за границами применимости наших уравнений. Относительный вклад членов, зависящих от ϵ мал при $\eta \approx 2$. Учитывая, что теоретические кривые при малых η хорошо проходят через экспериментальные точки, можно сказать, что из низкоэнергетической области определить ϵ не удается. От величины ϵ будет сильно зависеть поведение функций a и $B^{(-)}$ в области $\nu < -1$. Поэтому для определения ϵ необходимо обратиться к электромагнитной структуре нуклона.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову за интерес к работе и полезные советы, А.В. Ефремову, А.А. Логунову и Д.В. Ширкову за стимулирующие дискуссии.

П р и л о ж е н и е 1

Решение краевой задачи (2.2) сводится к вычислению интеграла $u(\nu)$. Интеграл легко берется по теории вычетов в плоскости $'k'$. Для различных моделей δ^1_1 определяется по формуле

$$\delta^1_1(k) = \frac{1}{2i} \ln \frac{P(k) + ia\,k^3}{P(k) - ia\,k^3}, \qquad (\text{П}.1)$$

где $P(k)$ – полином в правой части (3.2). Функция $u(\nu)$ при этом равна

$$u(\nu) = \frac{1}{4i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k \ln \frac{P(k) + ia\,k^3}{P(k) - ia\,k^3} \frac{dk}{(k^2+1)(k^2+\omega^2)}. \qquad (\text{П}.2)$$

Трудность при вычислении интеграла в (П.2) состоит в решении уравнений $P(k) \pm ia\,k^3 = 0$. Здесь всегда удобна замена $y = i/k$. Для $P(k) = k_r^2 - k^2$ (формула (3.2)) расположение логарифмических точек ветвления приведено на рис. 5. Непрерывное изменение $\delta^1_1(k)$ в интервале $[0,\pi]$ обеспечивается выбором разрезов (см.рис. 5). Окончательное выражение для электромагнитного формфактора π -мезона имеет вид

$$F_\pi(\nu) = \frac{\omega - \frac{k_r}{u+v}}{1 - \frac{k_r}{u+v}} \quad \frac{1 - 4k_r \frac{u+v}{(u-v)^2+(u+v)^2} + k_r^2}{\omega^2 - 4k_r \frac{u+v}{(u-v)^2+(u+v)^2}\,\omega_r + k_r^2} \quad ; \quad \omega > 0$$

$$|F_\pi(\nu)| = \left\{ \frac{\left[k_r^2 \frac{(u-v)^2 - 2uv}{2} + [(u-v)^2 + uv]^2\right]^2 + \frac{3(u^2-v^2)^2}{4}}{\left[k_r^2 \frac{(u-v)^2 - 2uv}{2} + \omega^2[(u-v)^2 + uv]^2\right]^2 + \frac{3(u^2 v^2)^2}{4}} \right\}^{1/2} \left[\frac{k_r^2 - \omega^2(u+v)^2}{k_r^2 - (u+v)^2}\right]^{1/2} \left[\frac{k_r^2 + 1 - a}{k_r^2 + 1 + a}\right]^{1/2}; \quad \omega^2 < 0,$$

где

$$u = \sqrt[3]{-\epsilon/2 + \sqrt{1/27 + (\epsilon/2)^2}} \qquad v = -\sqrt[3]{\epsilon/2 + \sqrt{(\epsilon/2)^2 + 1/27}},$$

а

$$\epsilon = a\,k_r .$$

Если $(\epsilon/2)^2 \ll 1/27$, то можно провести разложение u и v по ϵ. Тогда получим, например,

$$F_\pi(\omega) = \frac{k_r + \frac{1}{k_r + \epsilon}}{k_r + \omega^2 \frac{1}{k_r + \epsilon\omega}} \qquad \omega > 0 .$$

Интересно сравнить полученное выражение для $F_\pi(\omega)$ с таковым из /11/. Последнее следует из нашего при дополнительном разложении $\frac{1}{k_r + \epsilon\omega}$. Строго говоря, оно верно для $\frac{\epsilon\omega}{k_r} \ll 1$. Если отбросить ограничение на ω, то $F_\pi(\omega)$ будет содержать полюс при $\omega = k_r/\epsilon$.

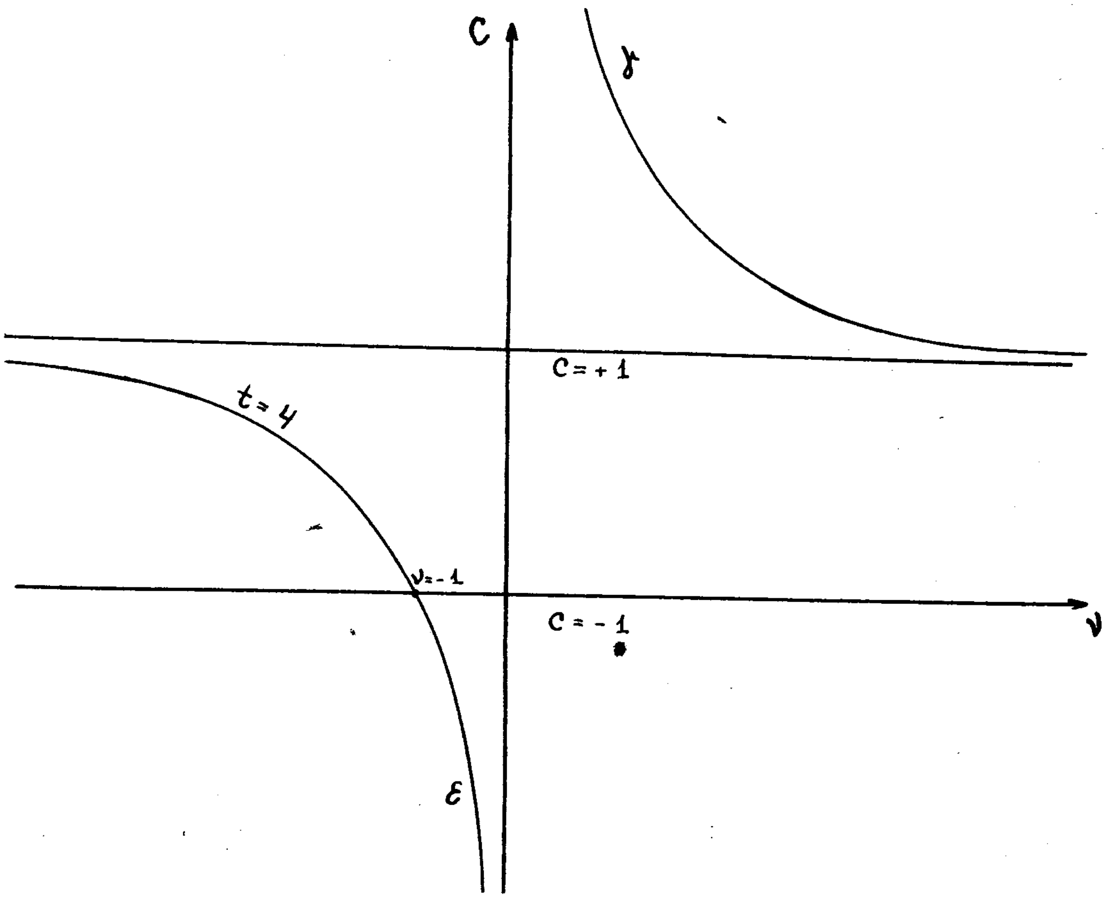


Рис. 1.

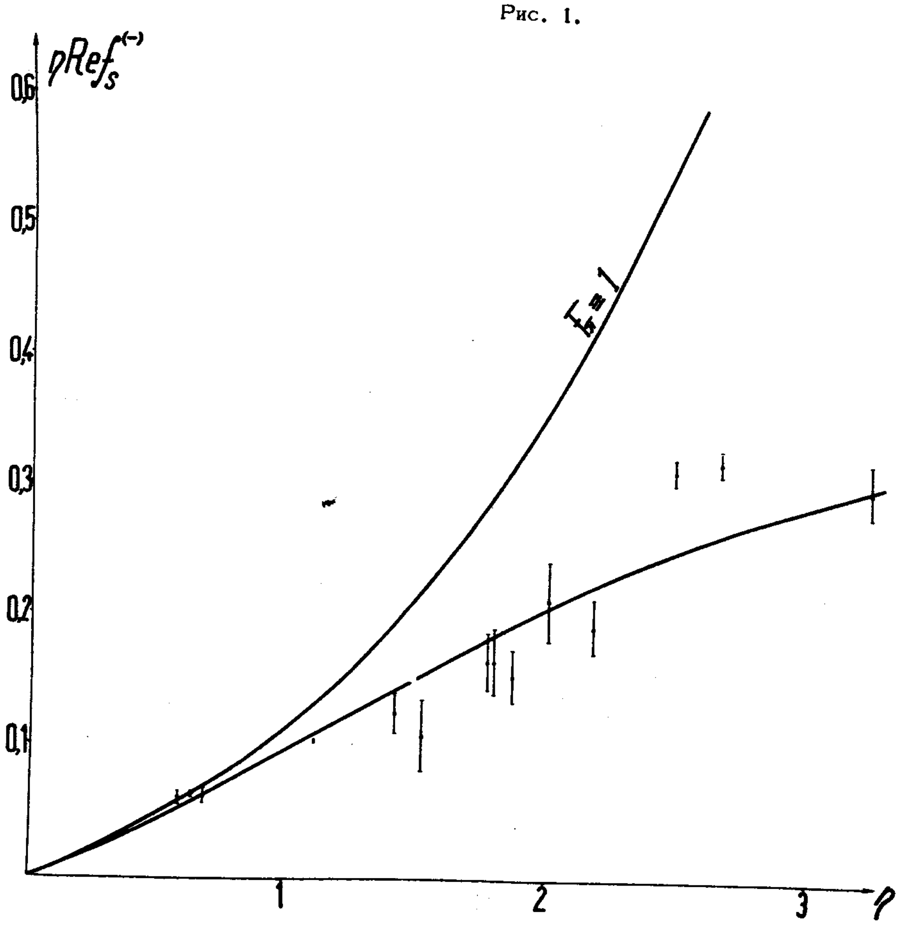
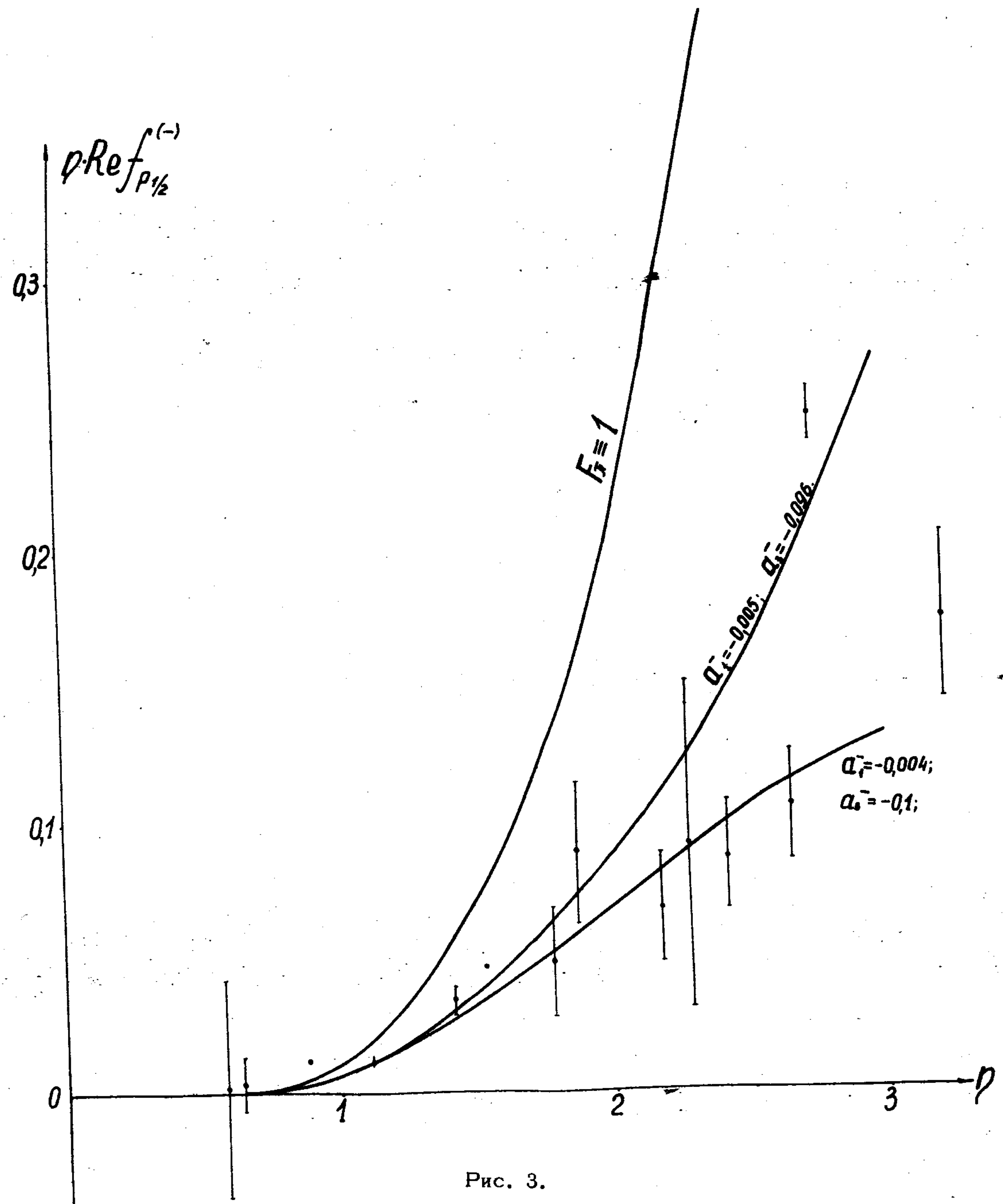


Рис. 2.



$p \cdot \mathrm{Re}\, f^{(-)}_{P1/2}$
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
p
$F_\pi \equiv 1$
$a_1^- = -0{,}005;\ a_3^- = -0{,}096$
$a_1^- = -0{,}004;$
$a_0^- = -0{,}1;$

Рис. 3.

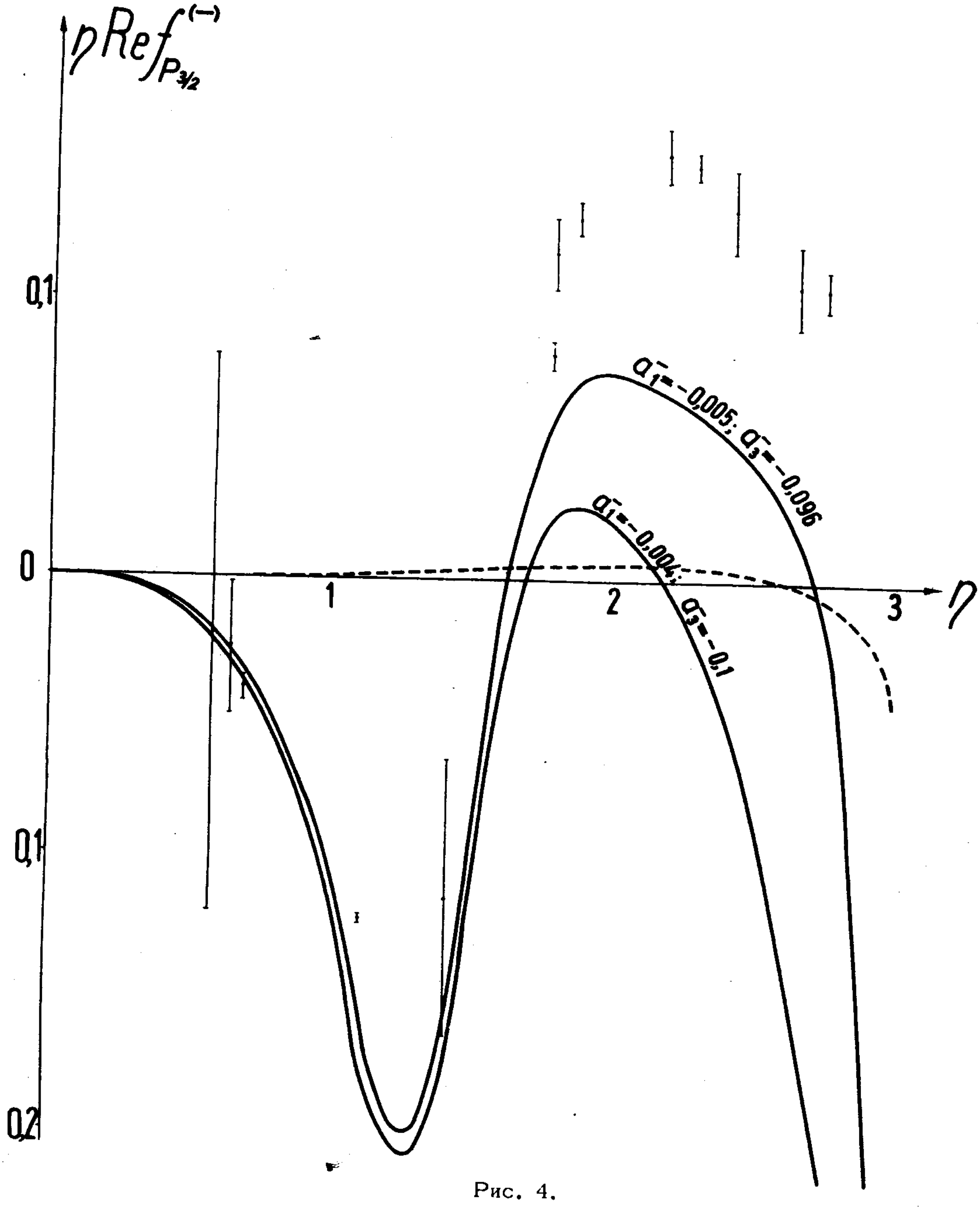


Рис. 4.

+ ● – корни уравнений

$k_r^2 - k^2 \mp iak^3 = 0$, соответственно.

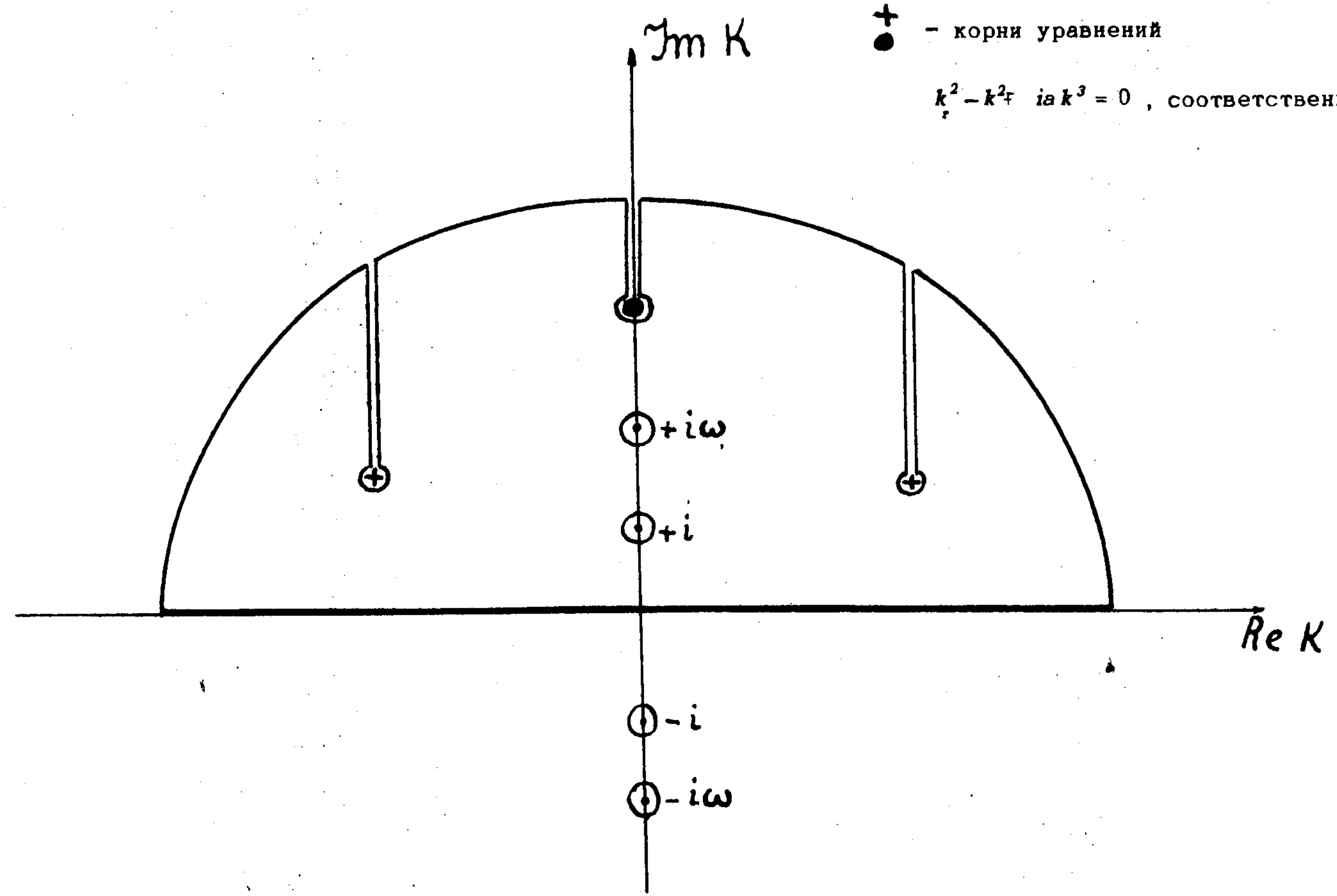


Рис. 5.

Литература

1. А.В. Ефремов, В.А. Мещеряков, Д.В. Ширков. ЖЭТФ, 39, 439 (1960).
2. Чжу Хун-юань. ЖЭТФ, 40, 227 (1961).
3. A.V.Efremov, V.A.Meshcheryakov, D.V.Shirkov and H.Y.Tzu. Nucl. Phys. 22, 202, (1961).
   C.Lovelace. Nuovo Cim. 21, 305 (1961).
   Д.В. Ширков. Дисперсионные теории низкоэнергетического рассеяния, препринт ТФ-2, Новосибирск (1961).
4. M. Jacob, G.C.Wick. Ann. of Phys. 7, 404 (1959).
5. S.Mandelstam. Phys. Rev. Lett. 4, 84 (1960).
6. Л.Б. Окунь, И.Я. Померанчук. ЖЭТФ, 36, (1959), 300; Nuclear Physics, 10, 492 (1959).
7. M.Cini, S.Fubini. Ann. of Phys. 3, 352 (1960).
8. А.В. Ефремов, В.А. Мещеряков, Д.В. Ширков. ЖЭТФ, 39, 1099 (1960).
9. А.В. Ефремов, Д.В. Ширков "Высшие парциальные волны в низко-энергетических приближениях", препринт ОИЯИ, Д-857 (1961).
10. G.Chew, S.Mandelstam. Phys.Rev. 119, 467 (1960).
11. J.Bowcock, W.N.Cottingham and D.Lurie. Nuovo Cim. 16, 918 (1960);
    Phys. Rev. Lett. 5, 386 (1960).
12. J.Hamilton, T.D.Spearman. Ann. of Phys. 12, 172 (1961).
    J.Hamilton, P.Menotti, T.D.Spearman and W.S.Woolcock. Nuovo Cim. 20, 519 (1961).
13. А.Д. Галанин, А.Ф. Гришин. ЖЭТФ, 41 (1961).
14. Ф.Д.Гахов, Краевые задачи. Гос. издат. физ.-мат. лит. М.1958.
15. P.Federbuch, M.Goldberger, S.Treiman. Phys. Rev. 112, 642 (1958).
16. S.Fubini. Electromagnetic Structure of Pions and Nucleons Report at Aix-en-Provence International Conference an Elementary Particles. Oct. (1961).
    S.D.Drell, F.Zachariasen. Electromagnetic Structure of Nucleons. Oxford 1961.
17. M.Gell-Mann, F.Zachariasen. Препринт CTSL -26.
18. И.Я.Померанчук. ЖЭТФ, 3, 306 (1956).
19. U.Haber-Shain. Phys.Rev. 104, 1113 (1956).
20. G.Chew, M.Goldberger, F.Low, Y.Nambu. Phys.Rev. 106, 1337 (1957).
21. W.M.Layson. Препринт 896/тн. 168.
22. J.Orear. Phys. Rev. 96, 176 (1954).
23. Barnes et al. Phys. Rev. 117, 226 (1960).
    там же см. дальнейшие ссылки по экспериментальному материалу.
24. S.F.Edwards and P.T.Matthews Phil. Mag, 2, N19, 839 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 марта 1962 года.