



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
Лаборатория теоретической физики

---

В.К. Мельников

P-929

О СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*ДАН СССР, 1962, т 144, № 4, с. 747-750*

В.К. Мельников

P-929

О СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1407/1, ур.

Направлено в ДАН СССР

Объединенный институт  
ядерных исследований  
Библиотека

Как известно, вопрос о движении плазмы в заданном магнитном поле может быть в некотором приближении исследован с помощью нахождения силовых линий этого поля. Этим объясняется тот интерес, который вызывает в настоящее время проблема нахождения силовых линий определенного типа магнитных полей.

С математической точки зрения мы сталкиваемся здесь с необходимостью исследования системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в силу равенства  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  обладают инвариантной мерой. Несмотря на усилия многих математиков, исследование систем такого типа до сих пор не привело в общем случае к сколь-нибудь удовлетворительному ответу на вопрос о поведении траекторий этого класса систем. Существует только один случай, когда можно дать удовлетворительный ответ на поставленный вопрос, — это случай полей, обладающих какой-нибудь симметрией /в смысле существования однопараметрической группы инвариантных преобразований/. В этом случае рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет первый интеграл, благодаря чему первоначальная проблема сводится к более простой задаче о расположении траекторий на двумерной поверхности. Продолжительные попытки Д.Д. Биркгофа получить аналогичный результат в общем случае к успеху не привели и, как показал в 1954 году К.Л. Зигель<sup>/1/</sup>, не могли привести к иному результату.

В последнее время в ряде статей И.А. Морозова, Л.С. Соловьева и др.<sup>/2-6/</sup> было довольно подробно исследовано расположение силовых линий магнитных полей, близких к симметричным. Используя метод усреднения, названные авторы заменили точные уравнения силовых линий более простыми приближенными уравнениями, которые и были ими исследованы. В результате они обнаружили, что у приближенных уравнений существуют области с различным поведением силовых линий и нашли границу, разделяющую эти области.

Однако, как было недавно показано<sup>/7/</sup>, применение метода усреднения к нахождению границы, отделяющей области с различным поведением силовых линий, приводит, вообще говоря, к качественно неверному результату. В действительности, граница, отделяющая области с различным поведением силовых линий, имеет гораздо более сложный вид, чем это следует из усредненных уравнений, для которых такое расположение границы вообще невозможно. Забегая вперед, отмечу, что такое необычное расположение границы, отделяющей области с различным поведением силовых линий, является одной из причин появления протуберанцев на плазме, приводящих, как известно, к неустойчивости плазмы.

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим безвихровое магнитное поле, задаваемое скалярным потенциалом  $H_0 z + \psi(x, y, z)$ , где  $H_0$  — константа, а функция  $\psi(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению Лапласа, периодическая по  $z$  с периодом  $2\pi$  и  $\int_0^{2\pi} \psi(x, y, z) dz = 0$ .

Уравнения силовых линий этого поля

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\psi'_x(x, y, z)}{H_0 + \psi'_z(x, y, z)}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\psi'_y(x, y, z)}{H_0 + \psi'_z(x, y, z)}$$

с помощью замены

$$u = x - 1/H_0 \phi'_x(x, y, z) - 1/H_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z \phi''_{xz}(x, y, \xi) \phi'_y(x, y, \xi) d\xi +$$

$$+ 1/H_0^2 \phi'_y(x, y, z) \phi''_{xy}(x, y, z) + \frac{z}{H_0^2} F'_y(x, y),$$

$$v = y - 1/H_0 \phi'_y(x, y, z) - 1/H_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z \phi''_{yz}(x, y, \xi) \phi'_x(x, y, \xi) d\xi +$$

$$+ 1/H_0^2 \phi'_x(x, y, z) \phi''_{xy}(x, y, z) - \frac{z}{H_0^2} F'_x(x, y)$$

могут быть преобразованы к виду:

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{H_0^2} F'_v(u, v) + \frac{1}{H_0^3} f(u, v, z, \frac{1}{H_0}),$$

/1/

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{1}{H_0^2} F'_u(u, v) + \frac{1}{H_0^3} g(u, v, z, \frac{1}{H_0}),$$

где

$$F(x, y) = \int_0^{2\pi} \phi''_{xz}(x, y, z) \cdot \phi'_y(x, y, z) dz =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \phi''_{yz}(x, y, z) \phi'_x(x, y, z) dz,$$

а функции  $f(u, v, z, 1/H_0)$  и  $g(u, v, z, 1/H_0)$  — периодические по  $z$  с периодом  $2\pi$ . Функция  $\phi(x, y, z)$ , встречающаяся выше, получается из  $\psi(x, y, z)$  следующим образом: пусть

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n \neq 0} \psi_n(x, y) e^{inz}, \quad \text{тогда}$$

$$\phi(x, y, z) = -i \sum_{n \neq 0} 1/n \psi_n(x, y) e^{inz}.$$

Пусть теперь

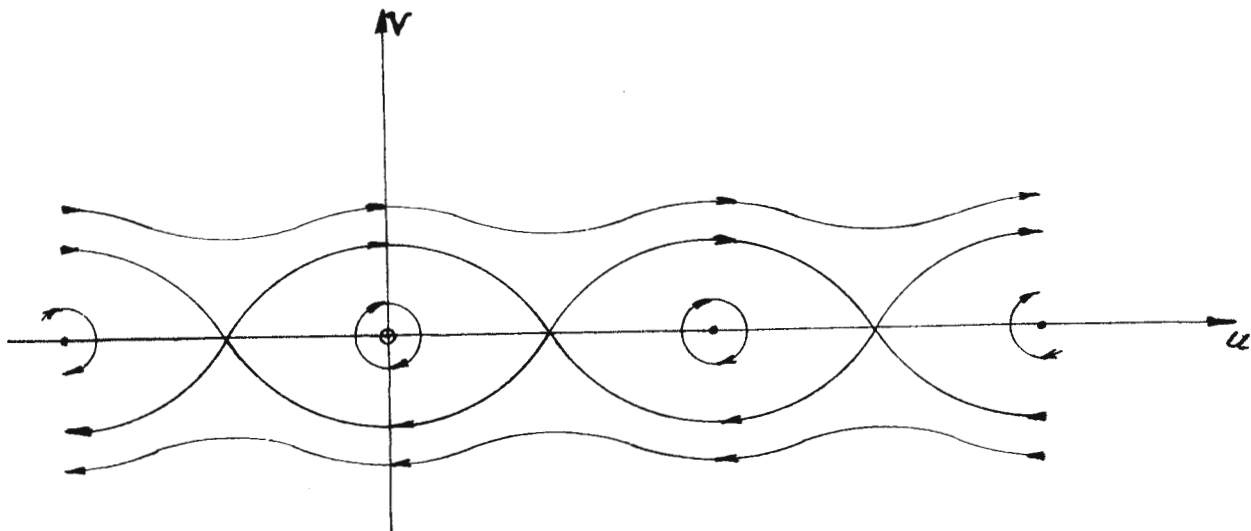
$$\psi(x, y, z) = \sin \omega x \operatorname{sh} \lambda y \sin z + \cos \omega x \operatorname{ch} \lambda y \cos z,$$

где  $\lambda^2 = \omega^2 + 1$  . Тогда  $F(u, v) = \omega \lambda \pi (sh^2 \lambda v + sin^2 \omega u)$

и, следовательно, расположение траекторий системы

$$\frac{du}{dz} = 1/H_0^2 F'_v(u, v), \quad \frac{dv}{dz} = -1/H_0^2 F'_u(u, v) \quad /2/$$

будет иметь вид, изображенный на рис. 1<sup>x/</sup>



Р и с. 1.

С другой стороны, следуя идеям работы<sup>/8/</sup>, можно определить для системы /1/ некий аналог сепаратрисы, выполняющий для систем типа /1/ ту же роль, что и обычная сепаратриса для системы автономных дифференциальных уравнений. Пользуясь результатами заметки<sup>/7/</sup>, можно показать, что для того, чтобы расположение сечений плоскостью  $z = z_0$  этого аналога сепаратрисы качественно совпадало с тем, что изображено на рис. 1, необходимо, чтобы функции  $f(u, v, z, 1/H_0)$  и  $g(u, v, z, 1/H_0)$  удовлетворяли некоторому бесконечному числу функциональных условий. Непосредственное вычисление показывает, что в рассматриваемом нами примере удовлетворить даже первому из этих условий мы, вообще говоря, не можем. Это приводит к тому, что сечение сепаратрисы системы /1/ плоскостью  $z = z_0$  будет иметь вид, указанный на рис. 2.

<sup>x/</sup>Заметим кстати, что для предложенного в статье<sup>/5/</sup> потенциала

$$\psi(x, y, z) = a_1 ch q_1 y \sin(kz - p_1 x) + a_2 sh q_2 y \sin(kz - p_2 x)$$

расположение траекторий системы /2/, вопреки утверждению авторов, будет иметь вид, имеющий мало общего с тем, что изображено на рис. 1.

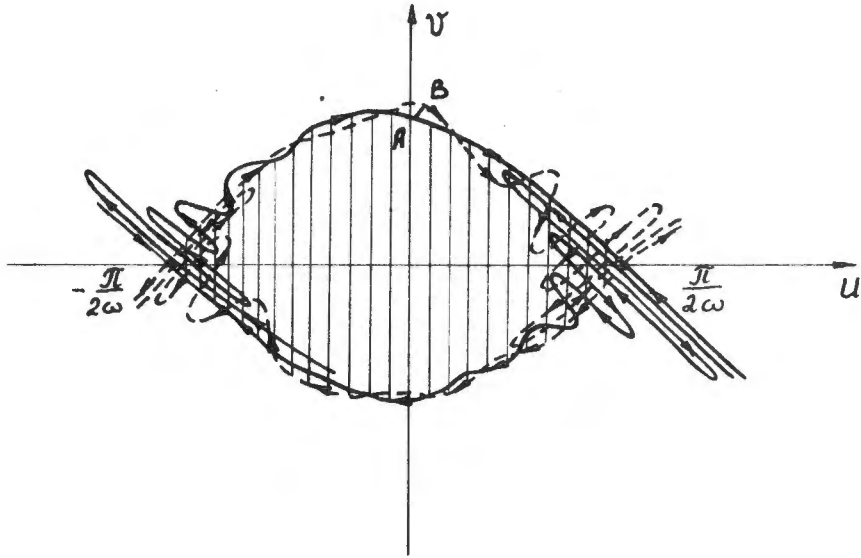


Рис. 2.

Сплошной чертой на этом рисунке изображено сечение сепаратрисы системы (1), пунктиром — сечение сепаратрисы системы, получающейся из (1) с помощью замены  $z$  на  $-z$ ; стрелками на этом рисунке показано, в каком направлении смещаются точки сечений при сдвиге по  $z$  на величину  $\Delta z = 2\pi$ . Отсюда следует, что часть решений, выходящих при  $z = z_0$  из заштрихованной на рис. 2 области, с ростом  $z$  покинет эту область, причем среди решений, покидающих названную область, существуют решения, которые будут находиться в этой области сколь угодно долго.

Нетрудно видеть, что доля решений, покидающих заштрихованную на рис. 2 область, будет зависеть от величины отрезка АВ. Можно показать, что при  $H_0 \rightarrow \infty$  величина отрезка АВ будет стремиться к нулю, как  $e^{-aH_0^2}$ , где  $a > 0$ , и, следовательно, при сравнительно небольших значениях  $H_0$  величина отрезка АВ будет довольно малой. Выбирая  $\psi(x, y, z)$  специальным образом в принципе можно добиться того, чтобы при  $H_0 \rightarrow \infty$  величина отрезка АВ стремилась к нулю, например, как  $e^{-\gamma H_0^4}$ , где  $\gamma > 0$ .

Необходимо отметить, что такая оптимистическая ситуация, как в рассмотренном примере, будет иметь место далеко не всегда. Рассмотрим для примера расположение силовых линий трехзаконного винтового поля, возмущенного гофрированным полем<sup>1/6/</sup>. Это поле может быть задано следующим скалярным потенциалом

$$\psi(r, \phi, z) = H_0 z + \frac{h_2}{a} I_2(3ar) \sin 3(\phi - az) + \frac{h_0}{a} I_0(kar) \sin kaz,$$

где  $I_0(r)$  и  $I_2(r)$  — бесселевы функции нулевого и третьего порядка от мнимого аргумента. Уравнения силовых линий этого поля могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{Hr}{Hz} = \frac{\psi'_r r}{\psi'_z z} =$$

$$= \frac{3 h_3 I_3'(3ar) \sin 3\theta - k h_0 I_0'(kar) \sin kau}{H_0 - 3 h_3 I_3(3ar) \cos 3\theta - k h_0 I_0(kar) \cos kau}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{r} \frac{H_0' - a H_z}{H_z} \dots \frac{1}{r^2} \frac{U_0' - a U_z}{U_z}$$

$$= \frac{-a H_0 + r \frac{h_3}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (r I_3'(3ar)) \cos 3\theta - \frac{h_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r I_0'(kar)) \cos kau}{H_0 - 3 h_3 I_3(3ar) \cos 3\theta + k h_0 I_0(kar) \cos kau},$$

где  $\theta = \phi - az$ . При  $h_0 \rightarrow 0$  система (3) имеет первый интеграл  $\frac{H_0 a r^2}{2} - r h_3 I_3'(3ar) \cos 3\theta = const$ , согласно которому расположение траекторий системы (3) при  $h_0=0$  имеет вид, указанный на рис. 3.

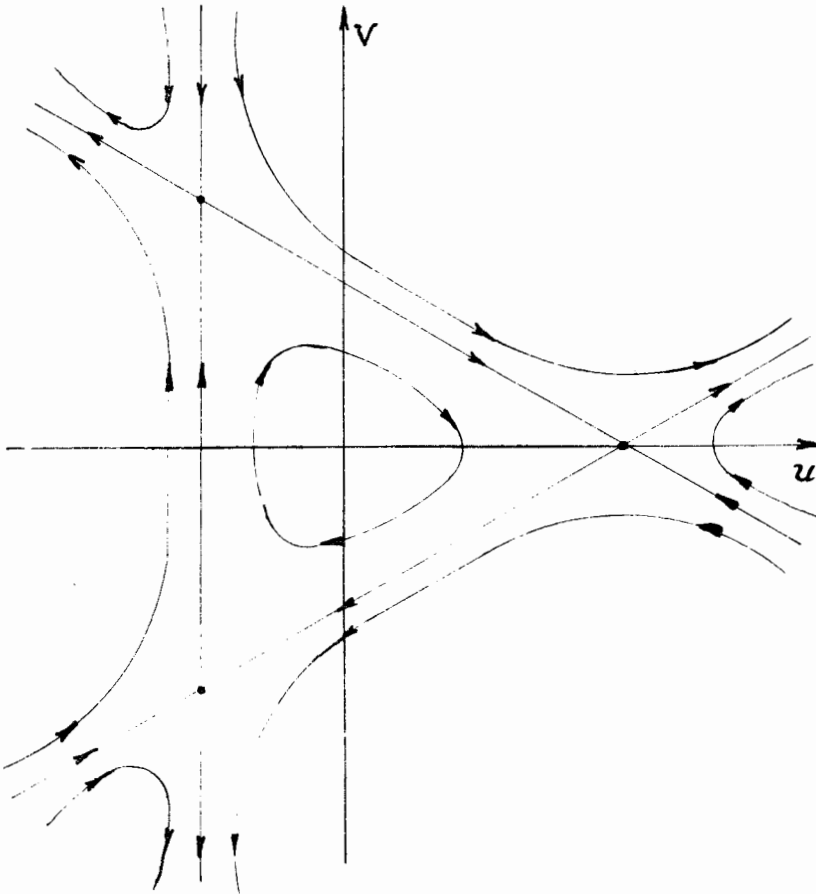


Рис. 3.

С другой стороны, используя результаты заметки /9/ нетрудно установить, что сечение сепаратрисы системы (3) плоскостью  $z = z_0$  имеет вид, указанный на рис. 4, причем при  $h_0/H_0 \rightarrow 0$  величина отрезка СД будет стремиться к нулю, как первая степень величины  $h_0/H_0$  (здесь предполагается, что отношение  $h_3/H_0$  фиксировано).

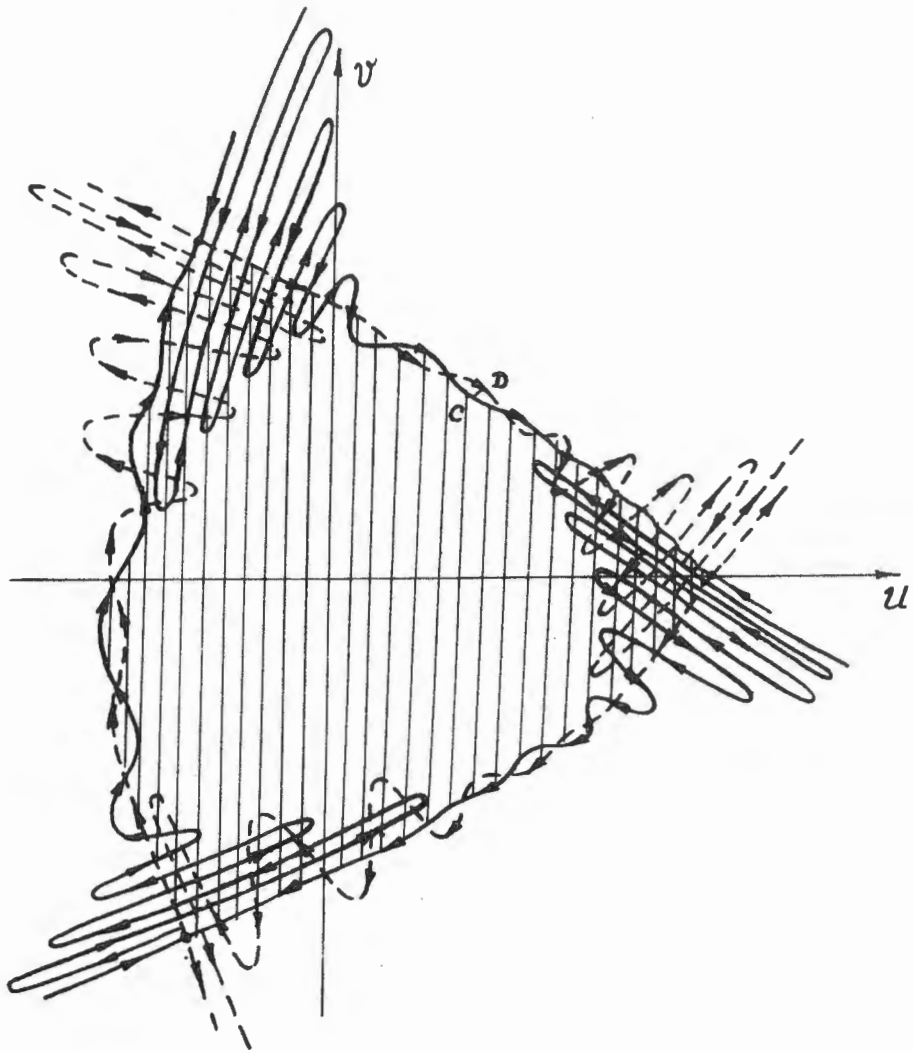


Рис. 4.

Здесь так же, как и в предыдущем примере, среди решений, покидающих заштрихованную на рис. 4 область, будут существовать решения, которые будут находиться в названной области сколь угодно долго. Поэтому попытка найти границу, отделяющую решения системы (3), которые будут долго оставаться в заштрихованной на рис. 4 области, от покидающих эту область решений, с помощью численного интегрирования системы (3) на небольшом промежутке изменения  $z$  вряд ли могут дать удовлетворительный результат, ибо далеко не ясно останутся ли в названной области хотя бы все решения системы (3), выходящие из лепестковых областей<sup>/5,6/</sup>.

Необходимо отметить, что основываясь на результатах заметки<sup>/8/</sup>, можно построить примеры потенциалов, аналогичных рассмотренному выше, для которых величина отрезка СД будет иметь любой наперед заданный порядок относительно параметра возмущения. Выбор таких полей для удержания плазмы может существенно увеличить время жизни плазмы.



В заключение пользуюсь случаем поблагодарить С.В. Фомина за проявленный им интерес к данной работе.

Л и т е р а т у р а

1. Siegel, C.L. *Math. Annalen*, 128 (1954), 144-170.
2. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев. ЖТФ, XXX, 3, 261-270 (1960).
3. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев. ЖТФ, XXX, 3, 271-282 (1960).
4. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев. ДАН СССР, 128, 3, 506-509 (1959).
5. Л.В. Кораблев, А.И. Морозов, Л.С. Соловьев. ЖТФ, XXXI, 10, 1153-1163 (1961).
6. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.М. Зуева, А.И. Морозов, Л.С. Соловьев. ЖТФ, XXXI, 10, 1164-1169 (1961).
7. В. Мельников. ДАН СССР, 142, 3, 542-545 (1962).
8. В.К. Мельников. Матем. сборник, 49 (91), 4, 353-380 (1959).
9. В. Мельников. ДАН СССР, 139, 1, 31-33 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел  
2 марта 1962 года.