

7-12

3.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

А. Павликовски, В. Рыбарска

P-923

ИЗУЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА БОГОЛЮБОВА
В ТЕОРИИ
ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

ис. ЭТФ, 1962, т. 43, в. 2, с. 543-550,

Дубна 1962

А. Павликовски, В. Рыбарска

P-923

ИЗУЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА БОГОЛЮБОВА
В ТЕОРИИ
ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

14231, 3.

Объединенный институ-
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

А н н о т а ц и я

Рассмотрен модельный пример: взаимодействие n частиц с потенциалом $-G \sum_{s, s'} a_{s+}^+ a_{s-}^+ a_{s'-} a_{s'+}$, расположенных на Ω дважды вырожденных эквидистантных уровнях. В этом случае задача на собственные значения решена численно точно. Полученные результаты сравнены с вычислениями с помощью приближенного метода (u, v) -трансформации Н.Н. Боголюбова. Для возбужденных состояний вычисления сделаны с учетом и без учета эффекта блокировки. Кроме того применен метод проектирования приближенных векторов на подпространство n частиц. Сделаны выводы о точности методов, применяемых при исследовании парного взаимодействия в четно-четных несферических ядрах.

Abstract

A model was considered: the interaction of n particles with the potential $-G \sum_{s, s'} a_{s+}^+ a_{s-}^+ a_{s'-} a_{s'+}$ situated on Ω twofold degenerated equidistant levels. In this case the eigenvalue problem has been solved numerically exactly. The results obtained are compared with the calculations by the approximate method of Bogolubov's (u, v) transformation. For the excited states the calculations were made with account of the blocking effect and without it. Besides, the method is applied of projecting the approximate vectors along the sub-space of n particles.

The conclusions are drawn as for the accuracy of the methods applied in investigating the pairing interaction in the even-even non-spherical nuclei.

В в е д е н и е

В последние годы к оболочечной и обобщенной моделям ядра широко применяются методы, разработанные в теории сверхпроводимости, для изучения остаточного взаимодействия между нуклонами ^{/1/, /2/}. Предполагается, что это взаимодействие имеет парный характер:

$$- G \sum_{s, s'} a_{s+}^+ a_{s-}^+ a_{s'-} a_{s'+} .$$

В теории сверхпроводимости для системы ферми-частиц с таким взаимодействием доказано, что приближенный метод (u, v) -трансформации Боголюбова асимптотически точен /это означает, что приближенные решения стремятся к точным при $n \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $n/V = \text{const}$ /^{3/}. В ядре число частиц и количество уровней в подоболочках ограничены, так что выводы, вытекающие из этого утверждения, непосредственно на этот случай не переносятся.

В связи с этим кажется интересным изучить модель системы четного числа частиц с парным остаточным взаимодействием, находящихся в одной подоболочке, настолько простую, что можно ее решить точно численным путем, затем решить задачу приближенно и сравнить результаты полученные обоими методами.

§ 1. Точное решение задачи

Изучаемая система описывается гамильтонианом

$$H = \sum_{s=1}^{\Omega} \epsilon_s (a_{s+}^+ a_{s+} + a_{s-}^+ a_{s-}) - G \sum_{s, s'} a_{s+}^+ a_{s-}^+ a_{s'-} a_{s'+} , \quad /1/$$

где $a_{s\rho}^+$, $a_{s\rho}$ - операторы рождения и уничтожения фермионов в состоянии с квантовыми числами s, ρ , ($s = 1, \dots, \Omega$, $\rho = \pm$), ϵ_s - спектр одночастичных уровней в самосогласованном поле. Рассматриваем систему четного числа n частиц, так как нас интересуют четно-четные ядра.

Решаем собственную задачу

$$H |\epsilon\rangle = \epsilon |\epsilon\rangle. \quad /2/$$

Будем работать в представлении, для которого базисные векторы имеют вид

$$|s_1 \rho_1, \dots, s_n \rho_n\rangle = a_{s_1 \rho_1}^+ \dots a_{s_n \rho_n}^+ |0\rangle, \quad /3/$$

где $|0\rangle$ — состояние вакуума. В этом представлении матричные элементы гамильтониана, диагональные по квантовым числам ρ_i , не зависят от значений этих чисел.

Введем диагональный в этом представлении оператор

$$\nu = \sum_s \nu_s^2, \quad /4/$$

где

$$\nu_s = N_{s+} - N_{s-}, \quad /5/$$

$$N_{sp} = a_{sp}^+ a_{sp}. \quad /6/$$

Назовем его оператором сеньорити /сравни ^{/4/}/. Собственные значения оператора ν равны числам уровней, на которых находится только одна частица. Другими словами, они равны числу частиц, несвязанных в пары. /Под парой подразумеваем две частицы с квантовыми числами $s+$, $s-$ /. Легко проверить, что сеньорити коммутирует с гамильтонианом. Следовательно, в представлении /3/ собственные уравнения /2/ распадаются на несвязанные системы уравнений, каждая из которых характеризуется определенным собственным значением сеньорити. Более того, с гамильтонианом коммутирует каждый из операторов ν_s отдельно:

$$[H, \nu_s] = 0. \quad /7/$$

Таким образом, интегралами движения являются, кроме сеньорити, тоже величины ν_s . Это значит, что парное взаимодействие не только не меняет числа частиц, несвязанных в пары, но и сохраняет квантовые числа этих частиц.

Итак, каждая система уравнений распадается в свою очередь на подсистемы, для которых заданы значения квантовых чисел частиц, несвязанных в пары.

В общем случае $\binom{2\Omega}{n}$ уравнений $/2/ \left(\binom{m}{k} = \frac{m!}{k! (m-k)!} \right)$ распадается на $\min(\Omega - n/2 + 1, n/2 + 1)$ систем. В каждой системе имеется $\binom{\Omega}{n-1} 2^\nu$ подсистем, а каждая подсистема состоит из $\binom{\Omega - \nu}{n/2 - \nu/2}$ уравнений, где ν - число сеньорити - пробегает значения $0, 2, 4, \dots, \min(2\Omega - n, n)$.

Базисные векторы с сеньорити $\nu = 0$ имеют вид

$$|s_1, \dots, s_{n/2}\rangle = |s_1^-, s_1^+, \dots, s_{n/2}^-, s_{n/2}^+\rangle, \quad /8/$$

где

$$s_1 < s_2 < \dots < s_{n/2}.$$

Матричные элементы гамильтониана в этом подпространстве равны

$$\begin{aligned} & \langle s_1, \dots, s_{n/2} | H | s_1', \dots, s_{n/2}' \rangle = \\ & = 2 \sum_{j=1}^{n/2} \epsilon_{s_j} \prod_{i=1}^{n/2} \delta_{s_i s_i'} - G \sum_{i=1}^{n/2} A_{s_1, \dots, s_{n/2}; s_1', \dots, s_{n/2}'}^{(i)}, \end{aligned} \quad /9/$$

где

$$A_{s_1, \dots, s_{n/2}; s_1', \dots, s_{n/2}'}^{(i)} = \sum_{\text{по всем перестановкам}} A_{s_1, \dots, s_{n/2}; s_1', \dots, s_{n/2}'}^{(i)}, \quad /10/$$

индексов $s_1', \dots, s_{n/2}'$

$$A_{s_1, \dots, s_{n/2}; s_1', \dots, s_{n/2}'}^{(i)} = J_{s_i s_i'} \prod_{j=1}^{n/2} \delta_{s_j s_j'}, \quad /11/$$

$$J_{s, s'} = 1. \quad /12/$$

Базисные векторы с сеньорити $\nu = 2$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 & |s_1, \dots, s_{\frac{n}{2}-1}; t_1 \rho_1, t_2 \rho_2 \rangle = \\
 & = |s_1^-, s_1^+, \dots, s_{(\frac{n}{2}-1)^-}, s_{(\frac{n}{2}-1)^+}; t_1 \rho_1, t_2 \rho_2 \rangle \quad /13/ \\
 & s_1 < s_2 < \dots < s_{\frac{n}{2}-1}, \quad t_1 < t_2, \quad s_1 \neq t_1, \quad s_1 \neq t_2.
 \end{aligned}$$

Матричные элементы гамильтониана равны

$$\begin{aligned}
 & \langle s_1, \dots, s_{\frac{n}{2}-1}; t_1 \rho_1, t_2 \rho_2 | H | s'_1, \dots, s'_{\frac{n}{2}-1}; t'_1 \rho'_1, t'_2 \rho'_2 \rangle = \\
 & = \langle s_1, \dots, s_{\frac{n}{2}-1}; t_1, t_2 | H | s'_1, \dots, s'_{\frac{n}{2}-1}; t'_1, t'_2 \rangle = \quad /14/ \\
 & = (\epsilon_{t'_1} + \epsilon_{t'_2} + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} \epsilon_{s'_j}) \prod_{i=1}^{(n/2)-1} \delta_{s_i s'_i} - G \sum_{k=1}^{(n/2)-1} A_{s_1, \dots, s_{\frac{n}{2}-1}, s'_1, \dots, s'_{\frac{n}{2}-1}},
 \end{aligned}$$

где определение матрицы $\tilde{A}_{s_1, \dots, s_{\frac{n}{2}-1}, s'_1, \dots, s'_{\frac{n}{2}-1}}$, аналогично приведенному выше.

Подобные выражения можно получить для других значений сеньорити.

Приведем еще выражение для распределения плотности, т.е. среднего значения оператора $N_{s\rho}$ в основном состоянии:

$$\bar{N}_{s\rho} = \sum_{s_1 < s_2 < \dots < s_{n/2}} C_{s_1, \dots, s_{n/2}}^2 (\delta_{ss_1} + \delta_{ss_2} + \dots + \delta_{ss_{n/2}}), \quad /15/$$

где коэффициенты $C_{s_1, \dots, s_{n/2}}$ есть амплитуды основного состояния,

$$C_{s_1, \dots, s_{n/2}} = \langle s_1, s_2, \dots, s_{n/2} | \psi_0 \rangle, \quad /16/$$

$|\psi_0\rangle$ основное состояние системы /как известно^{/3/}, это состояние $\nu = 0$ /.
 N_{sp} позволяет оценить, насколько парное взаимодействие изменяет распределение Ферми.

Пример, решением которого мы занимаемся, характеризуется числами $\Omega = 5$, $n = 6$ ^{x/}. Спектр одночастичных энергий у нас эквидистантен, что напоминает положение в сильно деформированном ядре. В принятых нами условных единицах $\epsilon_s = s$ / = 1,2,3,4,5/. Поскольку в сверхтекучей модели ядра^{/2/} G является параметром теории, значение которого подбирается для получения хорошего согласия с экспериментом, а наша проблема модельная, все вычисления проведены для нескольких значений G : $G = \frac{1}{2} \Delta\epsilon$, $\frac{4}{5} \Delta\epsilon$, $\Delta\epsilon$, $\frac{5}{4} \Delta\epsilon$. / $\Delta\epsilon$ расстояние между уровнями/. Заметим, что эти значения G довольно большие /в конкретных расчетах $G \approx \Delta\epsilon$ /, но для наших Ω и n только при таких G приближенный метод сохраняет свои характерные черты.

Согласно приведенным выше общим рассуждениям, получаем для численного решения следующие системы собственных уравнений:

- $\nu = 0$ - система, состоящая из одной подсистемы десятого порядка,
- $\nu = 2$ - система, состоящая из десяти подсистем третьего порядка,
- $\nu = 4$ - система, состоящая из пяти уравнений первого порядка.

Результаты расчетов приведены в дальнейших параграфах.

§ 2. Приближенное решение задачи

Метод (u, v) -трансформации Боголюбова, как известно, вариационный метод и в связи с этим наша задача будет заключаться в решении вариационных уравнений для параметров.

^{x/} Такие небольшие значения Ω и n взяты из-за ограниченных возможностей электронной машины.

Пробный вектор основного состояния системы постулируется в виде

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{s=1}^{\Omega} (u_s + v_s a_{s+}^+ a_{s-}^+) |0\rangle, \quad /17/$$

где u_s , v_s — вариационные параметры, удовлетворяющие условиям

$$u_s^2 + v_s^2 = 1, \quad /18/$$

что эквивалентно условию нормировки вектора $|\Phi_0\rangle$. Имея в виду, что в состоянии /17/ число частиц неопределенно, вычисляем энергию основного состояния системы, решая вариационную задачу:

$$\langle \Phi_0 | \mathcal{H} | \Phi_0 \rangle = \min \quad /19/$$

с условием

$$\langle \Phi_0 | N | \Phi_0 \rangle = n, \quad /20/$$

где

$$\mathcal{H} = H - \lambda N \quad /21/$$

N — оператор числа частиц, λ — множитель Лагранжа. Получаем уравнения^{x/}

$$v_s^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_s - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_s - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right), \quad /22/$$

$$\frac{2}{G} = \sum_{s=1}^{\Omega} \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_s - \lambda)^2 + \Delta^2}}, \quad /23/$$

$$n = \sum_{s=1}^{\Omega} \left(1 - \frac{\epsilon_s - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_s - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right), \quad /24/$$

а выражение для энергии основного состояния системы имеет вид

^{x/} Это приближенные вариационные уравнения. В точных уравнениях вместо ϵ_s появляется $\tilde{\epsilon}_s = \epsilon_s - \frac{1}{2} C v_s^2$.

$$E_0 = 2 \sum_{s=1}^{\Omega} \epsilon_s v_s^2 - \Delta^2 / G - G \sum_s v_s^4 . \quad /25/$$

Легко проверить, что в этом приближении распределение плотности в основном состоянии дается величиной v_s^2 :

$$v_s^2 = \langle \Phi_0 | N_{sp} | \Phi_0 \rangle . \quad /26/$$

Переходя к возбужденным состояниям, будем изучать приближенные решения проблемы с сеньорити равным 2 /одна разорванная пара/. По стандартному методу Боголюбова энергии возбужденных состояний вычисляются как двухквaziчастичные энергии по формуле

$$E_{s_1 s_2}^{(a)} = E_0 + \sqrt{(\epsilon_{s_1} - \lambda)^2 + \Delta^2} + \sqrt{(\epsilon_{s_2} - \lambda)^2 + \Delta^2} . \quad /27/$$

Приближенный вектор соответствующего состояния имеет вид

$$| \Phi_{s_1 s_2}^{(a)} \rangle = \prod_{s \neq s_1 s_2}^{\Omega} (u_s + v_s a_{s+}^+ a_{s-}^+) a_{s_1}^+ \rho_1^+ a_{s_2}^+ \rho_2^+ | 0 \rangle . \quad /28/$$

В выражениях /27/, /28/ значения величин u_s , v_s , λ , Δ берутся из уравнений для основного состояния. Этот способ вычисления энергии возбужденных состояний будем называть методом а/. Заметим, что при таком подходе к возбужденным состояниям не ставится никакой новой вариационной проблемы. В возбужденных состояниях даже в среднем не сохраняется число частиц и не учтен эффект блокировки уровней, занятых нуклонами не связанными в пары.

Все эти недостатки устранены в методе В.Г. Соловьева /который будем дальше называть методом б//. Здесь постулируется пробный вектор возбужденного состояния в виде /28/, но u_s , v_s вычисляются теперь из других уравнений. А именно, требуется минимум среднего значения

$$\langle \Phi_{s_1 s_2} | H | \Phi_{s_1 s_2} \rangle \quad /29/$$

с условием

$$\langle \Phi_{s_1 s_2} | N | \Phi_{s_1 s_2} \rangle = n \quad /30/$$

/как и раньше $v_s^2 + u_s^2 = 1$ /.

Получаем уравнения

$$\frac{2}{G} = \sum_{s \neq s_1, s_2}^{\Omega} \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_s - \lambda)^2 + \Delta^2}}, \quad /31/$$

$$n = 2 + \sum_{s \neq s_1, s_2}^{\Omega} \left(1 - \frac{\epsilon_s - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_s - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right), \quad /32/$$

а выражение для энергии возбужденных состояний имеет вид

$$E_{s_1 s_2}^{(\delta)} = \epsilon_{s_1} + \epsilon_{s_2} + 2 \sum_{s \neq s_1, s_2}^{\Omega} \epsilon_s v_s^2 - \Lambda^2 / G - G \sum_{s \neq s_1, s_2}^{\Omega} v_s^4. \quad /33/$$

Из-за того, что в употребляемом нами методе число частиц сохраняется только в среднем, приближенные векторы состояний содержат примеси состояний с разными числами частиц. Как замечено в работах ^{/5/, /4/}, лучшие результаты можно получить, употребляя для вычислений проекцию приближенного вектора состояния на подпространство состояний n частиц. Для нашего примера шести частиц эта проекция для основного состояния имеет вид

$$|\Phi_0\rangle_6 = \frac{P |\Phi_0\rangle}{\langle \Phi_0 | P | \Phi_0 \rangle} = \sum_{\substack{s_1, s_2, s_3=1 \\ s_1 < s_2 < s_3}}^{\Omega} C'_{s_1 s_2 s_3} |s_1, s_2, s_3\rangle, \quad /34/$$

где P оператор проектирования,

$$C'_{s_1 s_2 s_3} = \frac{d_{s_1 s_2 s_3}}{\sqrt{\sum_{\substack{s_1, s_2, s_3=1 \\ s_1 < s_2 < s_3}}^{\Omega} d_{s_1 s_2 s_3}^2}}, \quad /35/$$

$$d_{s_1 s_2 s_3} = v_{s_1} v_{s_2} v_{s_3} \prod_{s \neq s_1 s_2 s_3} u_s. \quad /36/$$

Подобным образом можно получить проекции $|\Phi_{s_1 s_2 s_3}\rangle$ возбужденных состояний.

§ 3. Результаты расчетов

1. Результаты точного решения задачи

Т а б л и ц а 1.

Точные собственные значения энергии при сеньорити $\nu \neq 0$
 для нескольких значений константы связи $g \cdot \mathcal{E}_0$ -
 - энергия основного состояния системы

	$g = 1,25$	$g = 1$	$g = 0,8$	$g = 0,5$
\mathcal{E}_0	4,953	6,828	8,213	9,998
\mathcal{E}_1	10,000	10,763	11,379	12,348
\mathcal{E}_2	11,630	12,576	13,317	14,386
\mathcal{E}_3	11,823	12,695	13,382	14,416
\mathcal{E}_4	13,768	14,695	15,415	16,443
\mathcal{E}_5	15,229	15,623	15,981	16,619
\mathcal{E}_6	16,768	17,338	17,821	18,591
\mathcal{E}_7	17,386	17,763	18,100	18,694
\mathcal{E}_8	19,550	19,906	20,220	20,764
\mathcal{E}_9	21,394	21,813	22,171	22,762

Т а б л и ц а 2.

Компоненты $C_{s_1 s_2 s_3}$ точных собственных векторов основного состояния для нескольких значений \mathcal{G} .

s_1, s_2, s_3	$C_{s_1 s_2 s_3}$			
	$\mathcal{G} = 1,25$	$\mathcal{G} = 1$	$\mathcal{G} = 0,8$	$\mathcal{G} = 0,5$
1,2,3	0,648	0,719	0,791	0,911
1,2,4	0,428	0,417	0,390	0,286
1,2,5	0,308	0,283	0,248	0,163
1,3,4	0,312	0,285	0,250	0,165
1,3,5	0,232	0,203	0,171	0,107
1,4,5	0,168	0,135	0,102	0,046
2,3,4	0,244	0,216	0,183	0,115
2,3,5	0,185	0,158	0,130	0,080
2,4,5	0,135	0,106	0,078	0,034
3,4,5	0,104	0,078	0,055	0,022

Числа, приведенные в таблицах 1 и 3, показывают, что первый возбужденный уровень - это всегда уровень с сеньорити $\nu = 2$.

Из приведенных результатов следует, что метод б/ всегда дает большие значения энергии чем точный, так как это вариационный метод. Он сохраняет /для не слишком малых значений G /последовательность уровней и довольно хорошо передает общее поведение спектра.

Ошибки метода а/ имеют неустойчивый характер и, так как это невариационный метод, они бывают разных знаков. Уровни часто перепутываются и поэтому этот метод плохо передает характер спектра.

Процедура проектирования как метода а/, так и метода б/ дает очень хорошее совпадение приближенных и точных значений энергий основного и возбужденных с $\nu = 2$ состояний системы. Ошибка при этом уменьшается с ростом G $x/$.

В недавней работе /4/ сравнены результаты точных и приближенных /полученных методом / и ν / вычислений для нуклонов с парным взаимодействием для случая, когда одночастичный спектр имеет вид нескольких многократно вырожденных уровней /вырожденные подболочки/. Такая ситуация отвечает сферическим ядрам. Благодаря упрощениям, связанным с вырождением, авторы могли решить проблему для нескольких ядер. Они тоже пользовались методом проектирования и получили хорошее совпадение результатов. Авторы пришли к выводу, что в их случае эффект блокировки ничтожно мал.

Мы не сравнивали в настоящей работе с приближенными уровнями точных возбужденных уровней с $\nu = 0$ и возбужденных уровней с $\nu = 2$ типа II, III, так как пока не ясно, как однозначным способом сопоставить этим уровням приближенные уровни.

В заключение выражаем благодарность В.Г. Соловьеву за постановку задачи и за многие ценные замечания. Пользуемся случаем выразить сотрудникам группы теории ядра, а особенно Н.И. Пятову и И.Н. Михайлову признательность за интересные дискуссии. Мы благодарны математикам Р.Н. Федоровой, Н.А. Буздавиной и С. Томашевскому за проведение численных расчетов.

$x/$ В пределе очень больших G /модель Маттельсона /6/ / метод проектирования дает точный вектор основного состояния.

Таблица 3.

Точные энергии возбужденных состояний системы для сеньорити $\nu=2$.

Числа I, II, III нумеруют энергетические уровни при заданных

квантовых числах s_1, s_2 .

s_1, s_2	E_{s_1, s_2}											
	$G = 1,25$			$G = 1$			$G = 0,8$			$G = 0,5$		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1,2	13,349	16,961	19,190	14,222	17,289	19,489	14,885	17,574	19,742	15,795	18,053	20,153
1,3	12,496	16,022	19,981	13,326	16,346	20,328	13,956	16,623	20,621	14,823	17,084	21,093
1,4	11,778	16,562	19,160	12,536	17,000	19,464	13,104	17,374	19,721	13,887	17,972	20,141
1,5	12,349	15,961	18,190	13,222	16,289	18,489	13,885	16,574	18,742	14,795	17,053	19,153
2,3	11,584	15,047	20,870	12,385	15,367	21,247	12,994	15,642	21,564	13,837	16,095	22,067
2,4	10,860	15,689	19,951	11,589	16,105	20,305	12,139	16,457	20,604	12,900	17,015	21,085
2,5	11,496	15,022	18,981	12,326	15,346	19,328	12,956	15,623	19,621	13,823	16,084	20,093
3,4	9,991	16,364	19,145	10,678	16,871	19,451	11,196	17,293	19,711	11,922	17,942	20,135
3,5	10,778	15,562	18,160	11,536	16,000	18,464	12,104	16,374	18,721	12,887	16,972	19,141
4,5	11,349	14,951	17,190	12,222	15,289	15,489	12,885	15,574	17,742	13,795	16,053	18,153

Таблица 4.

Точные энергии возбужденных состояний системы для $\nu = 4$.

s_1, s_2, s_3, s_4	$E_{s_1 s_2 s_3 s_4}$			
	$g = 1,25$	$g = 1$	$g = 0,8$	$g = 0,5$
2,3,4,5	14,75	15	15,2	15,5
1,3,4,5	15,75	16	16,2	16,5
1,2,4,5	16,75	17	17,2	17,5
1,2,3,5	17,75	18	18,2	18,5
1,2,3,4	18,75	19	19,2	19,5

II. Результаты решения задачи приближенными методами

Таблица 5.

Параметры Δ , λ и приближенные значения энергии основного состояния.

	$g = 1,25$	$g = 1$	$g = 0,8$	$g = 0,5$
Δ	2,767	2,093	1,537	0,668
λ	3,750	3,654	3,588	3,519
E_0	6,510	8,082	9,215	10,562

Таблица 6.

Приближенные энергии возбужденных состояний с $\nu=2$,
вычисленные методом а).

ν_1, ν_2	$E_{\nu_1, \nu_2}^{(a)}$			
	$\mathcal{G} = 1,25$	$\mathcal{G} = 1$	$\mathcal{G} = 0,8$	$\mathcal{G} = 0,5$
1,2	13,685	14,130	14,435	14,828
1,3	13,277	13,655	13,871	14,014
1,4	13,189	13,584	13,816	13,991
1,5	13,447	13,951	14,312	14,792
2,3	12,650	12,943	13,071	13,067
2,4	12,561	12,871	13,016	13,044
2,5	12,819	13,238	13,512	13,846
3,4	12,154	12,396	12,452	12,230
3,5	12,412	12,763	12,948	13,032
4,5	12,323	12,692	12,894	13,009

1423/1 "8"

Таблица 7.

Значения параметров Δ , λ с учётом эффекта блокировки для возбужденных состояний с $\nu=2$ и приближенные значения энергии, вычисленные этим методом.

s_1, s_2	$G = 1,25$			$G = 1$			$G = 0,8$			$G = 0,5$		
	Δ_{s_1, s_2}	λ_{s_1, s_2}	$E_{s_1, s_2}^{(5)}$	Δ_{s_1, s_2}	λ_{s_1, s_2}	$E_{s_1, s_2}^{(5)}$	Δ_{s_1, s_2}	λ_{s_1, s_2}	$E_{s_1, s_2}^{(5)}$	Δ_{s_1, s_2}	λ_{s_1, s_2}	$E_{s_1, s_2}^{(5)}$
1,2	1,608	4,746	14,246	1,219	4,651	14,948	0,894	4,586	15,463	0,325	4,522	16,064
1,3	1,493	4,615	13,368	1,110	4,560	14,019	0,798	4,530	14,494	0,241	4,507	15,043
1,4	1,320	4,187	12,684	0,812	4,108	13,161	0,000	4,117	13,400	0,000	4,670	14,000
1,5	1,608	3,746	13,246	1,219	3,651	13,948	0,894	3,586	14,463	0,325	3,522	15,064
2,3	1,407	4,559	12,424	1,043	4,529	13,050	0,749	4,514	13,506	0,200	4,503	14,032
2,4	1,174	4,087	11,702	0,649	4,044	12,128	0,000	4,299	12,400	0,000	4,681	13,000
2,5	1,493	3,615	12,368	1,110	3,560	13,019	0,798	3,530	13,494	0,241	3,507	14,043
3,4	0,644	2,647	10,604	0,000	3,000	11,000	0,000	2,679	11,400	0,000	2,347	12,000
3,5	1,320	3,187	11,684	0,812	3,108	12,161	0,000	3,117	12,400	0,000	3,670	13,000
4,5	1,608	2,746	12,246	1,219	2,651	12,948	0,894	2,586	13,463	0,325	2,522	14,064

Объединенный институт ядерных исследований "Курчатовский институт"

Таблица 8.

Приближенные значения с $\nu = 4$, вычисленные методом а).

$\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$	$E^{(a)}$ $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$			
	$\mathcal{G} = 1,25$	$\mathcal{G} = 1$	$\mathcal{G} = 0,8$	$\mathcal{G} = 0,5$
2,3,4,5	18,464	17,552	16,749	15,514
1,3,4,5	19,091	18,265	17,549	16,461
1,2,4,5	19,498	18,740	18,114	17,275
1,2,3,5	19,587	18,811	18,168	17,298
1,2,3,4	19,329	18,444	17,672	16,496

Таблица 9.

Приближенные значения энергии с $\nu = 4$, вычисленные методом б).

$\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$	$E^{(b)}$ $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$			
	$\mathcal{G} = 1,25$	$\mathcal{G} = 1$	$\mathcal{G} = 0,8$	$\mathcal{G} = 0,5$
2,3,4,5	14,75	15	15,2	15,5
1,3,4,5	15,75	16	16,2	16,5
1,2,4,5	16,75	17	17,2	17,5
1,2,3,5	17,75	18	18,2	18,5
1,2,3,4	18,75	19	19,2	19,5

Таблица 10.

Компоненты проекции приближенного вектора основного состояния на подпространство шести частиц

$s_1 s_2 s_3$	$C'_{s_1 s_2 s_3}$			
	$G = 1,25$	$G = 1$	$G = 0,8$	$G = 0,5$
1,2,3	0,640	0,715	0,798	0,957
1,2,4	0,447	0,446	0,421	0,240
1,2,5	0,316	0,287	0,241	0,101
1,3,4	0,322	0,294	0,248	0,103
1,3,5	0,227	0,189	0,142	0,043
1,4,5	0,159	0,118	0,075	0,011
2,3,4	0,243	0,210	0,168	0,064
2,3,5	0,172	0,135	0,096	0,027
2,4,5	0,120	0,084	0,051	0,007
3,4,5	0,086	0,056	0,030	0,003

Таблица 11.

Приближенные энергии основного состояния, вычисленные методом проектирования.

$\langle \Phi_0 H \Phi_0 \rangle_6$			
$G = 1,25$	$G = 1$	$G = 0,8$	$G = 0,5$
4,966	6,850	8,249	10,095

Таблица I2.

Приближенные энергии возбужденных состояний системы с $\nu = 2$, вычисленные путем проектирования приближенных векторов метода а).

$\alpha_1 \alpha_2$	$\langle \Phi_{\alpha_1 \alpha_2} H \Phi_{\alpha_1 \alpha_2} \rangle_6$			
	$S = 1,25$	$S = 1$	$S = 0,8$	$S = 0,5$
1,2	13,410	14,280	14,938	15,855
1,3	12,561	13,388	14,019	14,899
1,4	11,895	12,610	13,134	13,903
1,5	12,412	13,276	13,920	14,802
2,3	11,649	12,452	13,067	13,914
2,4	10,979	11,664	12,171	12,915
2,5	11,571	12,386	12,995	13,830
3,4	10,113	10,727	11,203	11,944
3,5	10,923	11,635	12,149	12,893
4,5	11,442	12,321	12,984	13,874

Таблица 13.

Приближенные энергии возбужденных состояний системы с $\nu = 2$, вычисленные путем проектирования приближенных векторов метода б).

$\langle \Phi_{s_1 s_2} H \Phi_{s_1 s_2} \rangle_6$				
s_1, s_2	$G = 1,25$	$G = 1$	$G = 0,8$	$G = 0,5$
1,2	13,356	14,234	14,910	15,897
1,3	12,520	13,358	14,001	14,942
1,4	11,842	12,687	13,400	14,000
1,5	12,256	13,234	13,910	14,897
2,3	11,619	12,426	13,045	13,960
2,4	10,969	11,795	12,400	13,000
2,5	11,520	12,358	13,001	13,942
3,4	10,340	11,000	11,400	12,000
3,5	10,842	11,687	12,400	13,000
4,5	11,356	12,234	12,910	13,897

§ 4. Обсуждение результатов.

Таблица 14.

Сравнение значений 2Δ с расстоянием между первым возбужденным и основным состояниями системы.

	$G = 1,25$	$G = 1$	$G = 0,8$	$G = 0,5$
2Δ	5,533	4,186	3,074	1,335
$\epsilon_{1,4} - \epsilon_0$	5,039	3,850	2,983	1,925

Видно, что сопоставляемые величины одного порядка.

Таблица 15.

Квадраты норм проекций приближенных векторов
основного состояния на подпространство шести
частиц

$\langle \Phi_0 \mathcal{P} \Phi_0 \rangle$			
$\mathcal{G} = 1,25$	$\mathcal{G} = 1$	$\mathcal{G} = 0,8$	$\mathcal{G} = 0,5$
0,388	0,412	0,450	0,629

Эти величины показывают, сколько процентов от $|\Phi_0\rangle$ составляет шестичастичная компонента. Видно, что с ростом \mathcal{G} вклад этой компоненты уменьшается.

Таблица 16.

Интегралы перекрытия точного и приближенного
спроектированного векторов основных состояний.

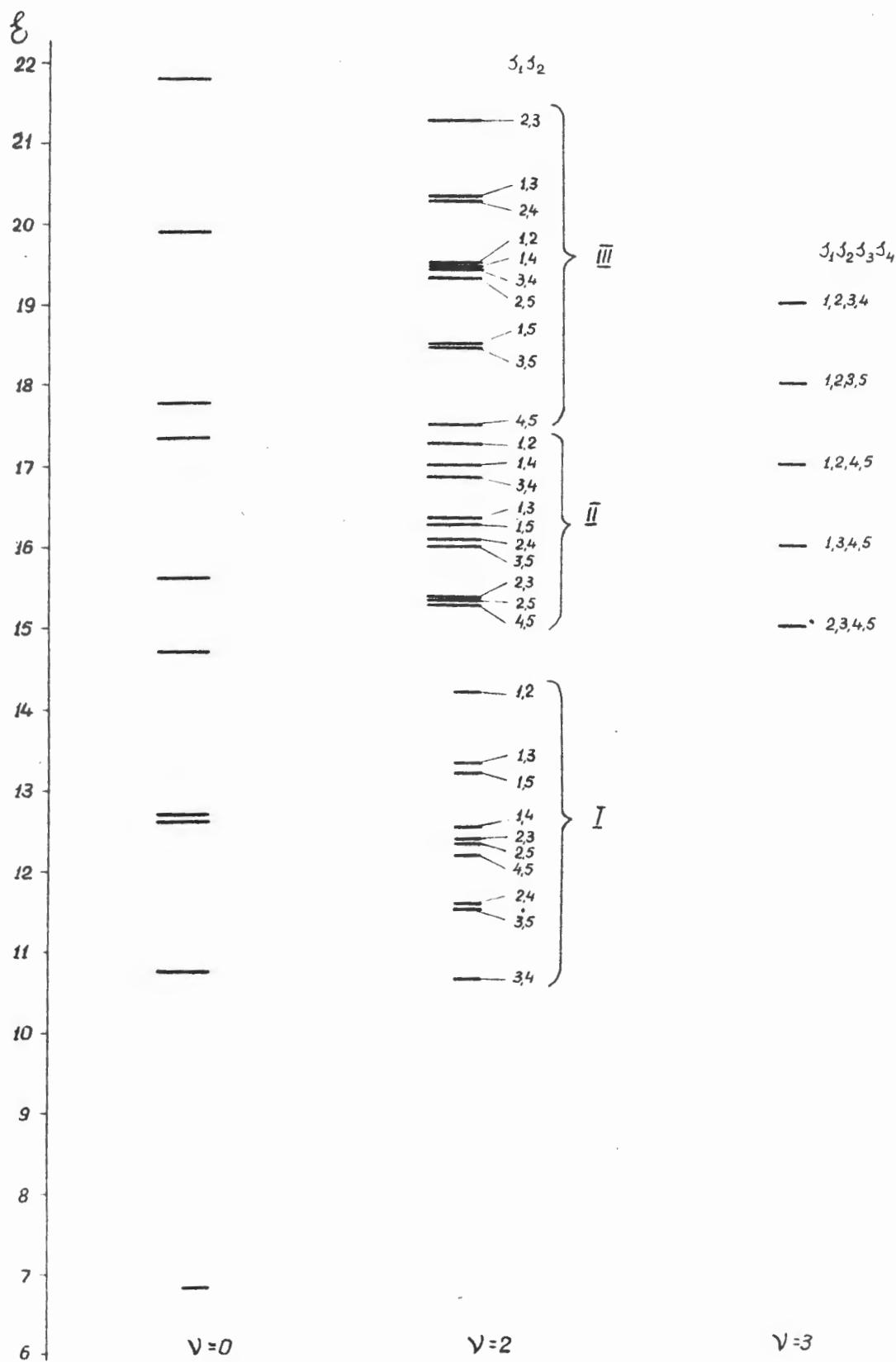
$\langle \Psi_0 \Phi \rangle_0$			
$\mathcal{G} = 1,25$	$\mathcal{G} = 1$	$\mathcal{G} = 0,8$	$\mathcal{G} = 1$
0,999	0,999	0,997	0,988

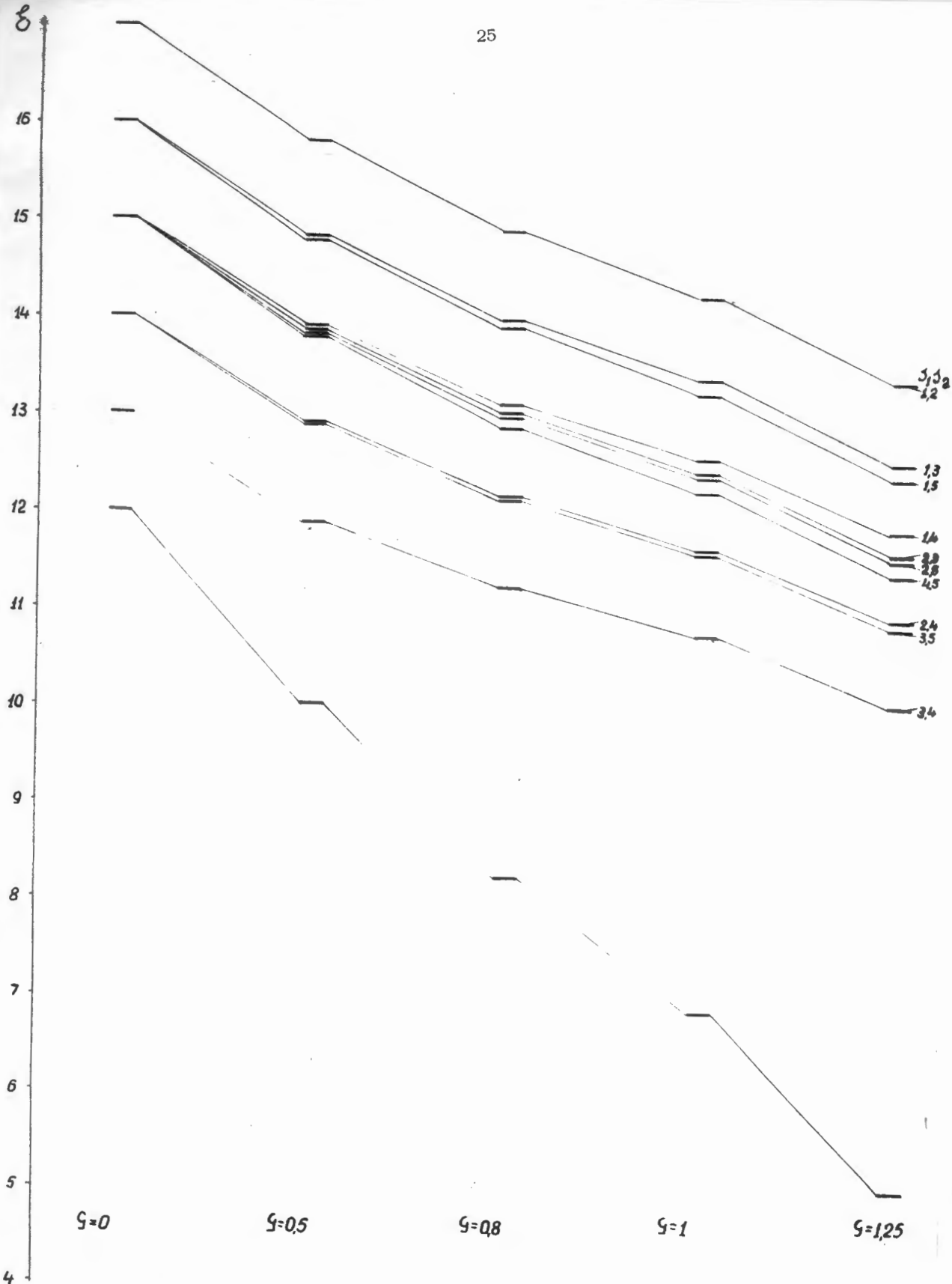
Здесь также видно, что процедура проектирования даёт вектор, очень близкий точному вектору основного состояния.

Таблица 17.

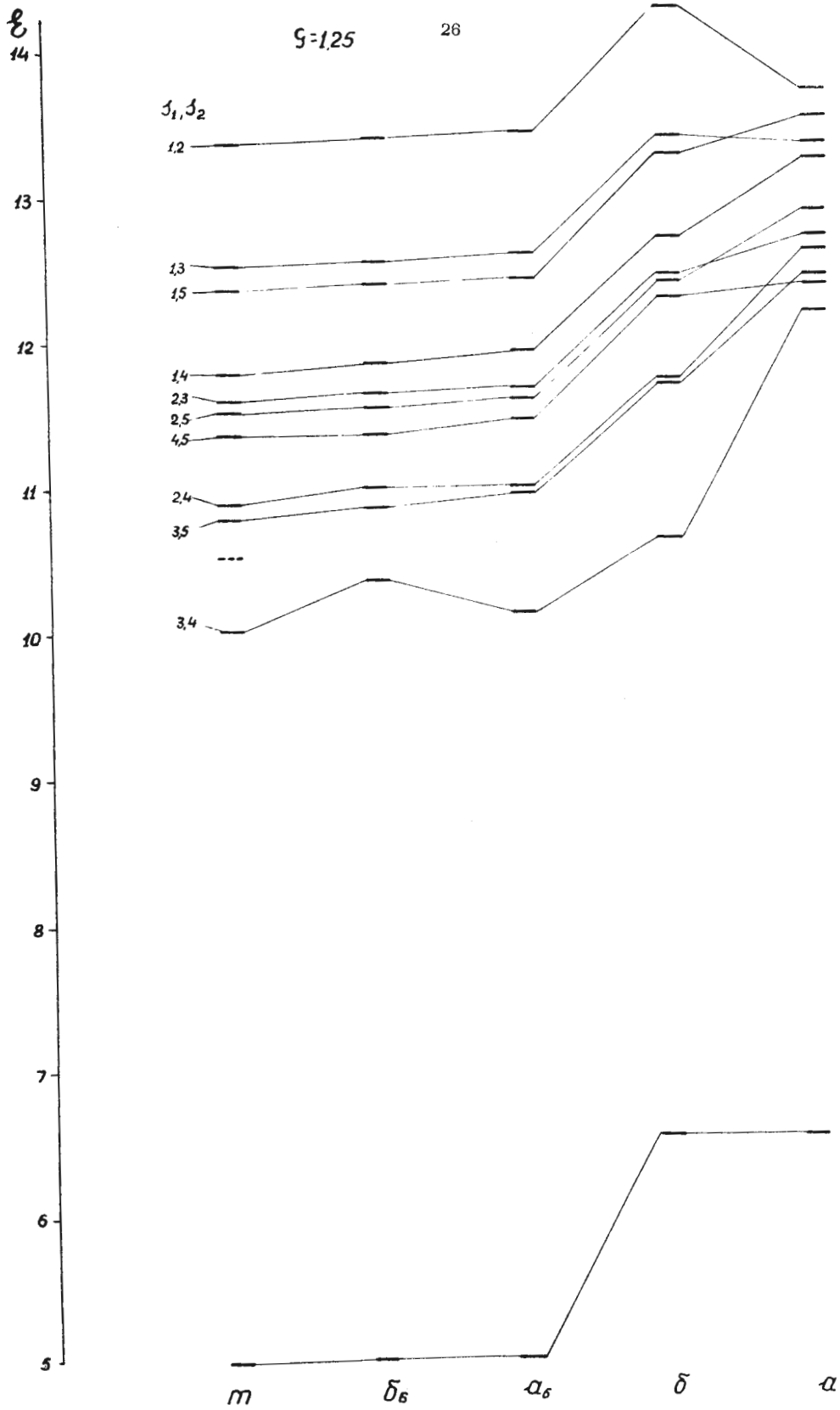
Распределение плотности в основном состоянии, вычисленное точным и приближенными методами.

s	S = 1,25			S = 1			S = 0,8			S = 0,5		
	\bar{N}_{ss}	$\langle \Phi_0 N_{ss} \Phi_0 \rangle$	ν_s^2	\bar{N}_{ss}	$\langle \Phi_0 N_{ss} \Phi_0 \rangle$	ν_s^2	\bar{N}_{ss}	$\langle \Phi_0 N_{ss} \Phi_0 \rangle$	ν_s^2	\bar{N}_{ss}	$\langle \Phi_0 N_{ss} \Phi_0 \rangle$	ν_s^2
1	0,877	0,889	0,853	0,911	0,927	0,893	0,940	0,959	0,930	0,979	0,995	0,983
2	0,810	0,812	0,767	0,853	0,861	0,810	0,895	0,912	0,859	0,959	0,987	0,952
3	0,675	0,661	0,631	0,716	0,698	0,649	0,770	0,756	0,679	0,868	0,932	0,807
4	0,398	0,410	0,455	0,338	0,353	0,419	0,268	0,276	0,370	0,126	0,072	0,208
5	0,240	0,228	0,294	0,182	0,160	0,230	0,127	0,097	0,162	0,048	0,013	0,014

Р и с. 1. Точные энергетические уровни для G_1 .



Р и с. 2. Точные значения энергий основного и возбужденных состояний с $\nu=2$ для нескольких значений константы связи G .

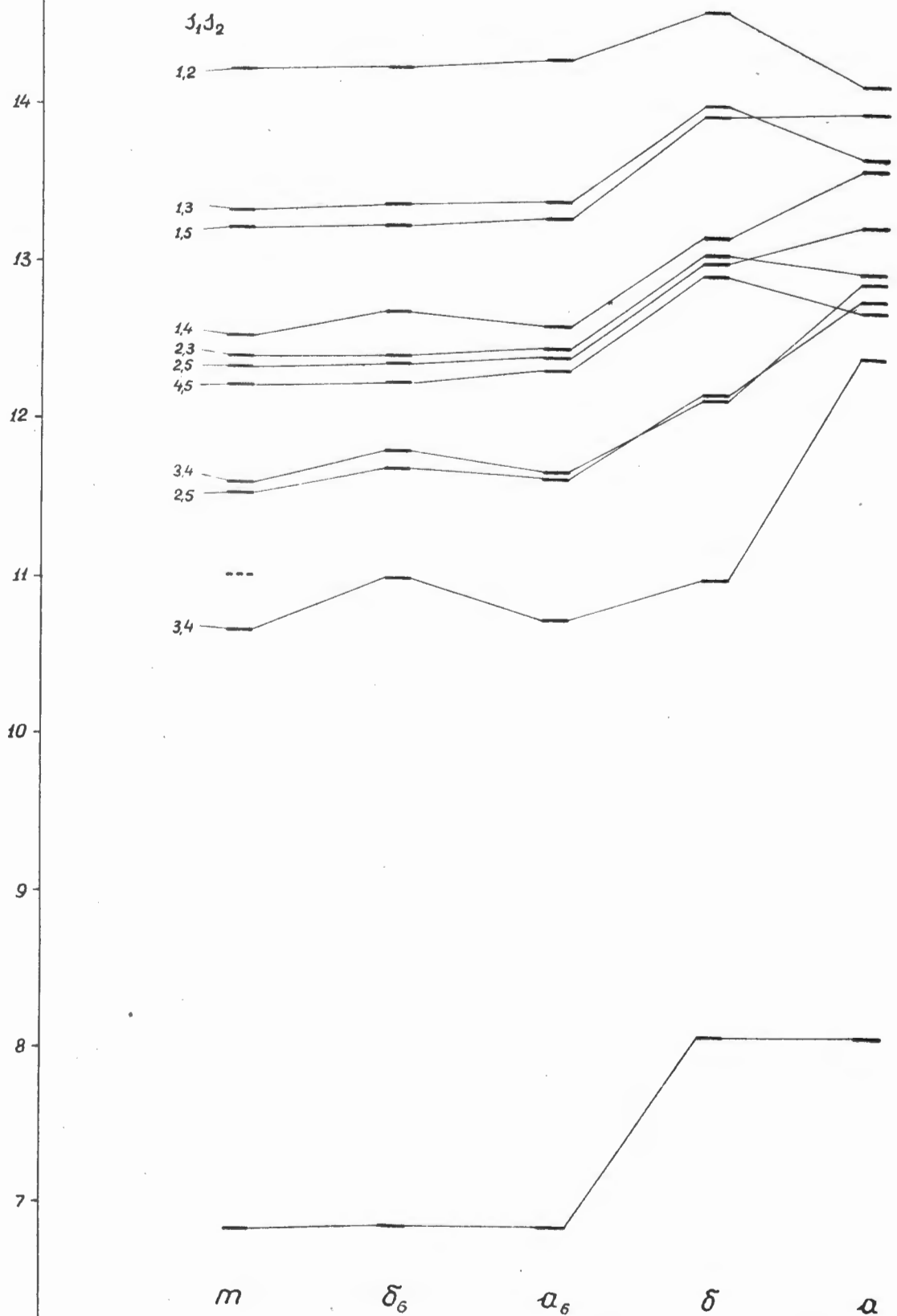


Р и с. 3. Сравнение точных уровней энергии с приближенными уровнями вычисленными:

- методом б/ с проектированием (δ_6),
- методом а/ с проектированием (a_6),
- методом б/ (δ),
- методом а/ (a),

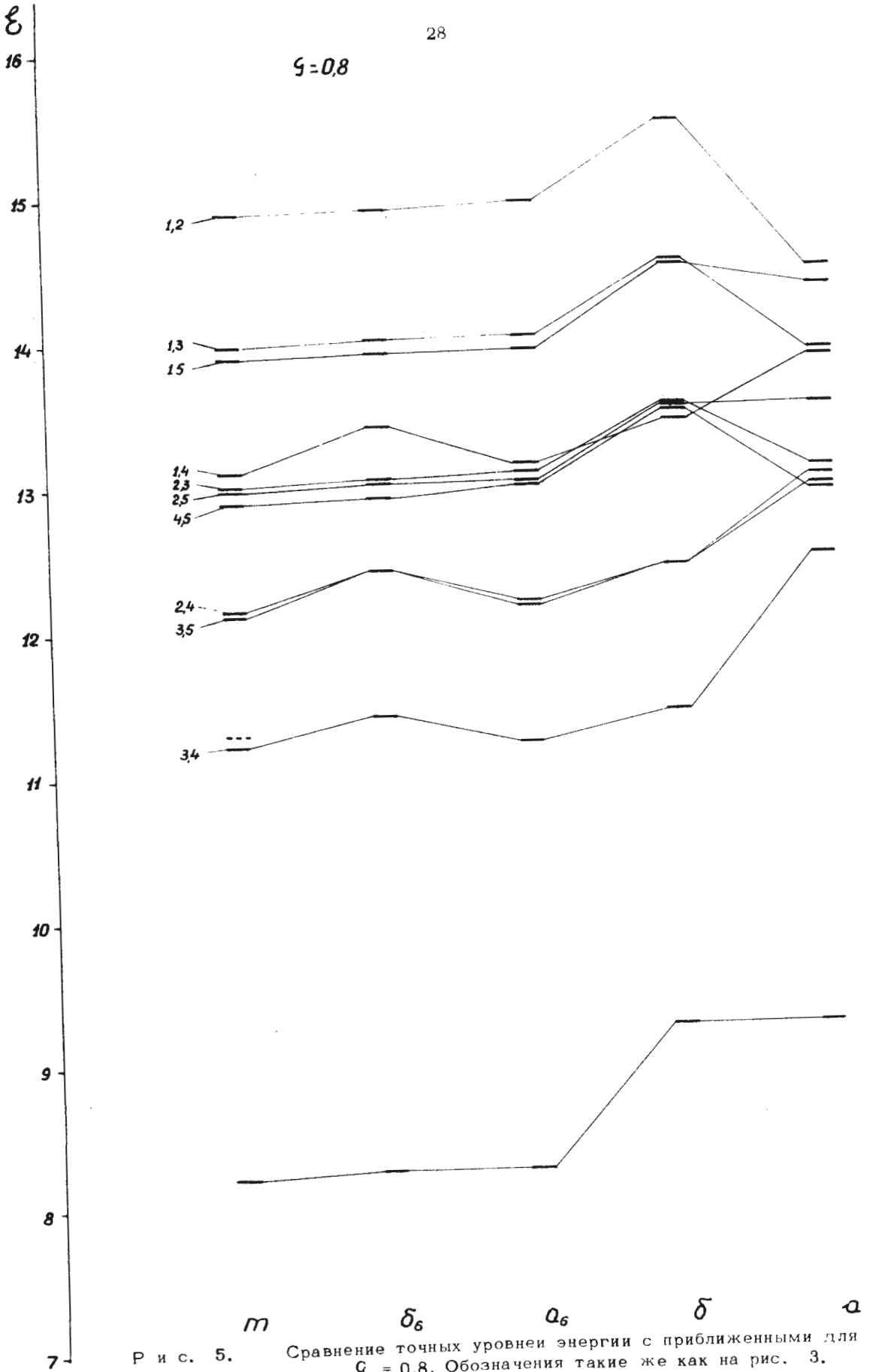
для $G = 1,25$.

Расстояние между точным основным уровнем и пунктирной линией равно 2Δ .

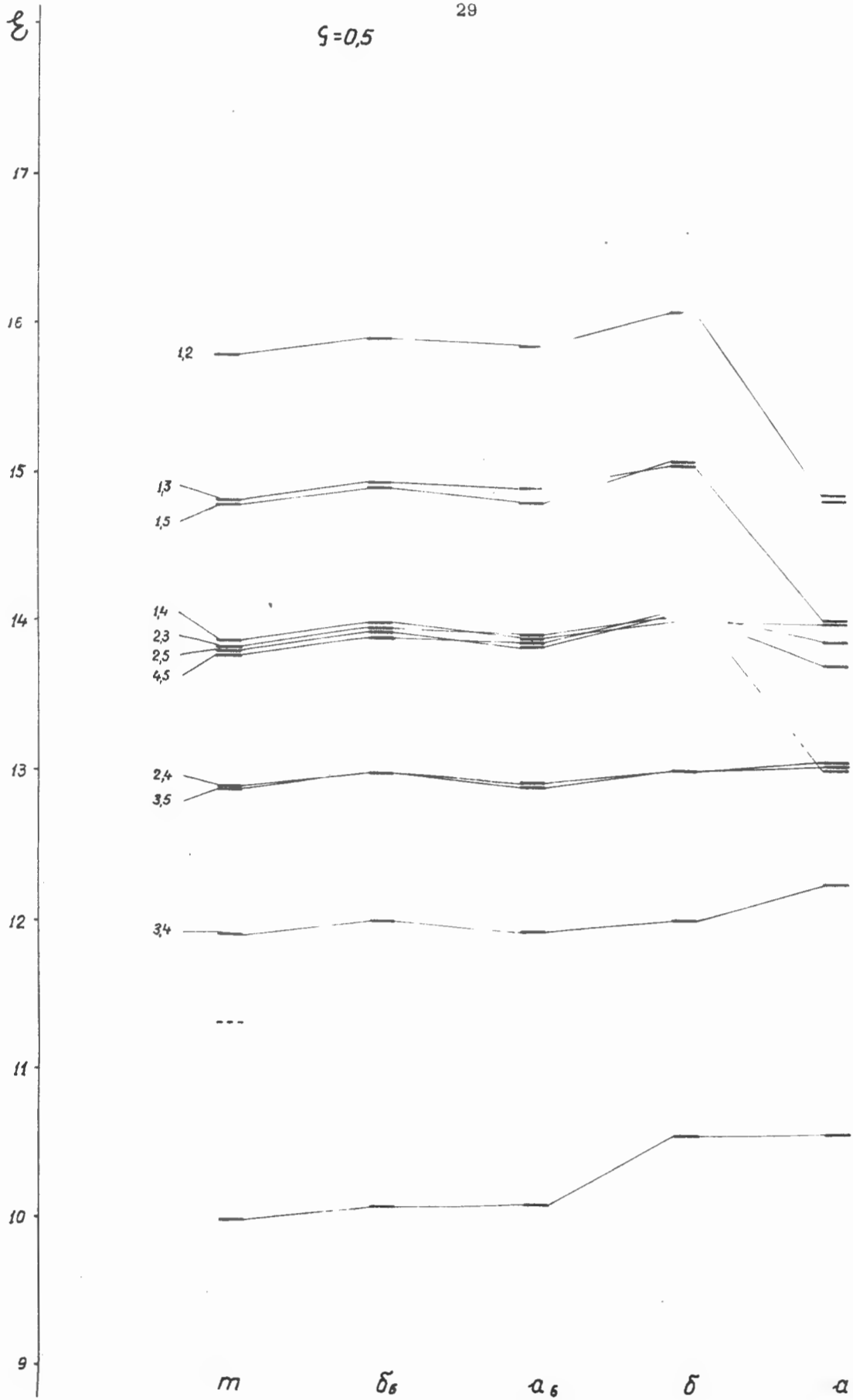


Р и с. 4. Сравнение точных уровней энергии с приближенными для $G=1$ Обозначения такие же как на рис. 3,

$\zeta = 0,8$



Р и с. 5. Сравнение точных уровней энергии с приближенными для $\zeta = 0,8$. Обозначения такие же как на рис. 3.



Р и с. 6.

Сравнение точных уровней энергии с приближенными для $G = 0,5$. Обозначения такие же как на рис. 3.

Л и т е р а т у р а

1. С.Т. Беляев. *Kgl. Danske Vich. Sels. Mat. Fys. Medd.* 31, NII, (1959).
2. В.Г. Соловьев. Парные корреляции сверхпроводящего типа в атомных ядрах, докторская диссертация. Препринт ОИЯИ, Р-801, Дубна /1961/.
3. Н.Н. Боголюбов. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт ОИЯИ, Р-511, Дубна /1960/.
4. A.K.Kerman, R.D.Lawson, M.H. Macfarlane, *Phys. Rev.* 124, 162 (1961).
5. B.F.Dayman, *Nucl. Phys.* 15, 33 (1960).
6. B.R.Mottelson, *Many Body Problem*, 283, Paris (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 февраля 1962 года.