ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Ким Зе Пхен

Р-913

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ВИДА СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В $L^2$

Дубна 1962 год

Ким Зе Пхен

Р-913

14/11/3 г.

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ВИДА СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В $L^2$

## А н н о т а ц и я

Эта работа посвящена нахождению достаточного условия сходимости метода последовательных приближений для одного вида систем линейных сингулярных интегральных уравнений, встречающихся в теории дисперсионных соотношений.

В теории дисперсионных соотношений встречаются сингулярные интегральные уравнения следующего вида (например, для процесса $\pi + N \to n\pi + N$ см. [7]):

$$u(t) = -1/\pi \int_{-1}^{+1} \frac{v(r)}{r - t}\, dr ,$$

$$v(t) = [\, S_1(t) + N_1(-t)\,]\,\lambda + S_1(t)\, u(t) + \qquad (1)$$

$$+ S_2(t)\, v(t) + N_1(-t)\, u(-t) + N_2(-t)\, v(-t) ,$$

где $\qquad T(t) = u(t) + iv(t) , \qquad -1 \le t \le +1 ,$

$u(t),\ v(t)$ – искомые вектор-функции, $S_\beta(t),\ N_\beta(t)$ – заданные матрицы, такие, что

1. $S_\beta(t) = N_\beta(t) = 0 \qquad t \le 0 \qquad t \ge 1 ,$
2. $S_\beta(t),\ N_\beta(t) \quad \in H(a) \quad$ в $\quad [-1, +1],$

$a > 0$ – постоянная, $\beta = 1$ или 2.

Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В этой статье выводится достаточное условие сходимости последовательных приближений для уравнений (1) в $L^2[-1, +1]$.

Приведем сначала несколько определений, а также теорему Титчмарша, которыми мы воспользуемся впоследствии.

Из физических соображений нужно найти непрерывные решения уравнения (1), поэтому дальнейшие рассуждения проводятся только с непрерывными функциями на отрезке $[-1, +1]$.

Построим гильбертово пространство, которое состоит из вектор-функций $f(t) \equiv (f_1(t),\ f_2(t), \ldots\ldots\ldots\ f_n(t))$, где $\quad f_i(t) \quad \in C \quad$ в $\quad [-1, +1]$.

## Определение 1

Скалярное произведение двух непрерывных вектор-функций в $[-1, +1]$.

$$f(t) = (f_1(t),\ f_2(t),\ \ldots\ldots\ldots,\ f_n(t))$$

$$g(t) = (g_1(t),\ g_2(t),\ \ldots\ldots\ ,\ g_n(t))$$

определим следующим образом:

$$(f(t),\ g(t)) = \int_{-1}^{+1} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} f_i(t)\,\overline{g_i(t)}\,dt .$$

## Определение 2

Норму непрерывной вектор-функции $f(t)$ определим так:

$$\| f(t) \| = \sqrt{(f(t),\ f(t))} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} f_i(t)\,\overline{f_i(t)}\,dt\Big)^{1/2} .$$

Предыдущие определения позволяют построить нормированное пространство.

Покажем, что все аксиомы нормированного пространства выполняются:

1. Ясно, что $\| f(t) \| = 0$, тогда и только тогда, когда $f(t) = 0$, ( 0 - нулевой элемент).

2. $\| \lambda f(t) \| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} |\lambda f_i(t)|^2 dt\Big)^{1/2} = |\lambda|\ \| f(t) \| .$

3. $\| f(t) + g(t) \| \le \| f(t) \| + \| g(t) \| .$

Доказательство: Предположим, что $f(t)$ и $g(t)$ - непрерывные вектор-функции в $[-1, +1]$.

Определим функции $F(t)$, $G(t)$ следующим образом:

$$F(2\ell + t) = f_\ell(t)$$

$$G(2\ell + t) = g_\ell(t),$$

где

$$-1 \le t \le +1,$$

$$\ell = 1, 2, \ldots\ldots, n.$$

Ясно, что $F(t) \in L^2$ и $G(t) \in L^2$ в $[1, 2n+1]$.

Используя неравенство Минковского, получим

$$\| f(t) + g(t) \| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} | f_i(t) + g_i(t) |^2 dt \Big)^{1/2} = \Big( \int_{1}^{2n+1} | F(t) + G(t) |^2 dt \Big)^{1/2} \le$$

$$\le \Big( \int_{1}^{2n+1} | F(t) |^2 dt \Big)^{1/2} + \Big( \int_{1}^{2n+1} | G(t) |^2 dt \Big)^{1/2} =$$

$$= \Big( \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} | f_i(t) |^2 dt \Big)^{1/2} + \Big( \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} | g_i(t) |^2 dt \Big)^{1/2} =$$

$$= \| f(t) \| + \| g(t) \| .$$

Аналогичным способом можно убедиться в справедливости следующих утверждений:

1. $\| f(t) \| - \| g(t) \| \le \| f(t) - g(t) \|$ ,
2. $\int_{-1}^{+1} | f(t)\ g(t) |\, dt \le \| f(t) \|\ \| g(t) \|$ ,
3. $\| f(t)\ g(t) \| \le \big( \max\limits_{\substack{i \\ -1 \le t \le +1}} | f_i(t) | \big)\ \| g(t) \|$ ,
4. $\| a(t)\ f(t) \| \le \sqrt{n} \max\limits_{\substack{i,j \\ -1 \le t \le +1}} | a_{ij}(t) |\ \| f(t) \|$ ,

где $a(t)$ – матрица, $f(t)$ – вектор-функция, $f(t) \in L^2$.

Доказательство пункта 4

$$\| a(t)\ f(t) \| = \Big( \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\ f_j(t) \Big|^2 dt \Big)^{1/2} .$$

Определяя функции $A_i(t)$ по формулам

$$A_i(2j + t) = a_{ij}(t) ,$$

где $-1 \le t \le +1$ , $j = 1, 2, \ldots , n$ ; $i = 1, 2, \ldots , n$, получим

$$\| a(t)\ f(t) \| = \left( \sum_{i=1}^{n} \int_{1}^{2n+1} | A_i(t)\ F(t) |^2\, dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left( \sum_{i=1}^{n} \max_{1 \leq t \leq 2n+1} | A_i(t) |^2 \int_{1}^{2n+1} | F(t) |^2 dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{n} \max_{\substack{i \\ 1 \leq t \leq 2n+1}} | A_i(t) | \left( \int_{1}^{2n+1} | F(t) |^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{n} \max_{\substack{i,j \\ -1 \leq t \leq +1}} | a_{ij}(t) |\ \| f(t) \|$$

и т.д.

Сформулируем одну теорему из [8].

Теорема 1

Пусть $f(x)$ принадлежит к $L^2(-\infty, \infty)$. Тогда формула

$$g(x) = 1/\pi \int_{\to 0}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt$$

определяет почти всюду некоторую функцию $g(x)$ также из $L^2(-\infty, \infty)$. Почти всюду имеет место также двойственная формула

$$f(x) = -1/\pi \int_{\to 0}^{\infty} \frac{g(x+t) - g(x-t)}{t}\, dt,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} [ f(x) ]^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} [ g(x) ]^2 dx. \tag{3}$$

Здесь $\int_{\to 0}^{\infty}$ означает интеграл в смысле главного значения по Коши.

Подобная теорема также имеет место для ядра Гильберта (см. [3]).

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости последовательных приближений к решению сингулярного интегрального уравнения (1).

Перепишем уравнение (1) в виде

$$v(t) = S v + f(t), \qquad (1')$$

где

$$S v \equiv - S_1(t)\, 1/\pi \int_{-1}^{+1} \frac{v(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + S_2(t)\, v(t) -$$

$$- N_1(-t)\, 1/\pi \int_{-1}^{+1} \frac{v(\tau)}{\tau + t}\, d\tau + N_2(-t)\, v(-t),$$

$$f(t) = [\, S_1(t) + N_1(-t)\,]\, \lambda .$$

Из (1) или (1') следует, что $v(t) = 0$ при $t \leqslant -1$ и при $t \geqslant 1$ .

Введем в рассмотрение класс функций $Z(\alpha)$ , характеризующийся следующими свойствами: каждый элемент $\phi(t) \in Z(\alpha)$ принадлежит к классу Гёльдера с показателем $\alpha$ в $[-1, +1]$ и $\phi(t) = 0$ при $t \leq -1$ и при $t \geq 1$ .
Здесь

$$\phi(t) \equiv (\phi_1(t),\ \phi_2(t),\ \dots,\ \phi_n(t)\ ).$$

Из теоремы Привалова /4/ вытекает, что оператор $S\phi$ переводит класс $Z(\alpha)$ в класс $Z(\alpha)$ .

Очевидно, что $Z(\alpha) \subset L^2[-1, 1]$.

Из теоремы 1 следует :

1. Если $\phi(t)$ принадлежит классу $Z(\alpha)$ , то удовлетворяется следующее неравенство:

$$\| \psi(t) \| \leqslant \| \phi(t) \| , \qquad (4)$$

где

$$\psi(t) = 1/\pi \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau .$$

В самом деле,

$$\| \psi(t) \| = \| 1/\pi \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \| = \| 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \| \leq$$

$$\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau \right|^2 dt \right) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \left( \int_{-1}^{+1} |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \| \phi(t) \| .$$

2. Аналогично получим

$$\left\| 1/\pi \int_{-1}^{+1} \frac{\phi(\tau)}{\tau + t} d\tau \right\| \leq \| \phi(\tau) \| , \qquad (5)$$

где

$$\phi(t) \in Z(a) .$$

Рассмотрим ряд Неймана

$$v(t) = f(t) + S f + S^2 f + \dots + S^m f + \dots \qquad (6)$$

В силу теоремы Банаха имеем: если $\| S \| < g < 1$ ,то ряд (6) сходится по норме. (Здесь $\| S \|$ – модуль оператора $S$ , т.е. $\| S \| = \sup\limits_{\|\phi\|=1} \| S\phi \|$, $\phi \in Z(a)$ /.

Учитывая соотношения (2), (4), (5), можно оценить $\| S \|$ .

Для любой вектор-функции $\phi(t) \in Z(a)$ имеет место оценка

$$\| S\phi \| = \| - S_1(t)\, 1/\pi \int_{-1}^{1} \frac{\phi(\tau)}{\tau - t} d\tau + S_2(t)\, \phi(t) -$$

$$- N_1(-t)\, 1/\pi \int_{-1}^{1} \frac{\phi(\tau)}{\tau + t} d\tau + N_2(-t)\, \phi(-t) \| \leq \qquad (7)$$

$$\leq \sqrt{n} \{ S_1 + S_2 + N_1 + N_2 \} ,$$

где

$$S_\beta = \max_{i,j,-1 \leq t \leq 1} | S_{\beta ij}(t) | , \qquad N_\beta = \max_{i,j,-1 \leq t \leq 1} | N_{\beta ij}(t) | ,$$

или

$$\|S\| \leq \sqrt{n}\,\{ S_1 + S_2 + N_1 + N_2 \} . \qquad (8)$$

В силу (7) и (8) можно сделать следующий вывод:

Теорема II

Условие

$$\sqrt{n}\,( S_1 + S_2 + N_1 + N_2 ) < g < 1 , \qquad (9)$$

где

$$S_\beta = \max_{i,j,-1\leq t\leq 1} | S_{\beta ij}(t) | ,$$

$$N_\beta = \max_{i,j,-1\leq t\leq 1} | N_{\beta ij}(t) | ,$$

$$\beta = 1, 2 ; \qquad i,j, = 1,2, \ \dots \ , n,$$

является достаточным условием сходимости по норме ряда (6).

Если удовлетворяется неравенство (9), то уравнение (1') имеет единственное решение в классе $Z(a)$ .

Автор выражает искреннюю благодарность Н.Н.Говоруну, Е.П.Жидкову и Г.И.Макаренко за ряд критических замечаний при предварительном обсуждении этой работы.

## Литература

1. Ф.Д.Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, 1956.
2. С.Г.Михлин. Проблема эквивалентности в теории сингулярных уравнений. Математический сборник, 3 ,(45) 1938. стр.121 -141.
3. С.Г.Михлин. Сингулярные интегральные уравнения. УМН, III , в. 3/ 25/, 1948.
4. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
5. Н.П.Векуа. Системы сингулярных интегральных уравнений. Гостехиздат.1950.

6. Harald Widom. Singular Integral Equations in $L_p$. Trans. of the American Math. Soc. vol 97, No. 1, 1960, p. 131–160.

7. В.Целлнер. АН СССР, ЖЭТФ, 36, вып. 4 1959, стр. 1103–1109.

8. Е.Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.

9. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз 1959.

10. Г.Ф. Манджавице. Приближенное решение граничных задач теории аналитических функций. Исследования по современным проблемам теорий функций комплексного переменного. Физматгиз, 1960. стр. 365–370.

11. Ким Зе Пхен. Регуляризация уравнения типа Чу-Лоу для процесса $\pi + N \to 2\pi + N$. Препринт ОИЯИ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1962 года.