ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Н.В. Демина, В.Л. Евтеев, В.А. Коваленко, Л.Д. Соловьев, Чэнь Цун-мо

Р-904

О НЕНАБЛЮДАЕМОЙ ОБЛАСТИ В ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ФОТОРОЖДЕНИЯ

Дубна 1962 год

Н.В. Демина, В.Л. Евтеев, В.А. Коваленко, Л.Д. Соловьев,
Чэнь Цун-мо

Р-904

О НЕНАБЛЮДАЕМОЙ ОБЛАСТИ В ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ФОТОРОЖДЕНИЯ

Показано, что продолжение в ненаблюдаемую область с помошью разложения по полиномам Лежандра в дисперсионных соотношениях для фоторождения не приводит к расхождению с экспериментальнымн данными по фоторождению нейтральных пионов н дает результаты, близкие в области малых энергий к результатам, полученным дифференциальным методом /1/.

В статическом приближении вычислен вклад ненаблюдаемой области. Показано, что при вычислении парциальных амплитуд с помощью интегрирования по углам этот вклад весьма существенен при энергиях выше резонансной.

Abstract

It is shown that the continuation of the dispersion relations for the photoproduction to the non-observable region by expanding in Legendre polynomials does not lead to the discrepancy with the experimental data on the photoproduction of the neutral pions and yields the results close in the low energy region to those obtained by the differential method /1/.

The contribution from the non-obsrvable region is calculated in the static approximation. It is also shown that in the calculation of the partial amplitudes by integrating over angles this contribution is essential at energies higher than the resonance one.

1. В в е д е н и е

Данная работа посвящена выяснению роли ненаблюдаемой области в дисперсионных соотношениях для фоторождения пионов на нуклонах.

Хорошо известно, что в дисперсионных соотношениях при фиксированном квадрате переданного импульса имеется ненаблюдаемая область. В переменных системы центра масс эта область является областью ненаблюдаемых углов $|\cos\theta|>1$. Ненаблюдаемая область исчезает лишь при единственном значении квадрата переданного импульса, и если мы хотим использовать дисперсионные соотношения при различных значениях этой величины, то мы должны иметь выражение для мнимой части амплитуды в ненаблюдаемой области. Обычно для этой цели используют разложение амплитуды в ряд по парциальным волнам (по полиномам Лежандра от $\cos\theta$), которое продолжают в область $|\cos\theta|>1$, причем ограничиваются несколькими первыми членами этого ряда (например, S и P волнами). Хотя ряд в целом сходится по крайней мере в большом эллипсе Лемана, однако, мы не знаем, насколько быстро он сходится при $|\cos\theta|>1$. Если ряд сходится медленно, то ограничение конечным числом его членов может привести к ошибкам при вычислении дисперсионных интегралов.

Именно это обстоятельство для случая фоторождения и выясняется в данной работе. Разумеется, сделать это без каких-либо предположений очень трудно. Мы делаем следующее. В предыдущей работе /1/ была получена амплитуда фоторождения с помощью дисперсионных соотношений при фиксированном квадрате переданного импульса, когда отсутствует ненаблюдаемая область. С точки зрения влияния ненаблюдаемой области дисперсионные интегралы вычислялись точно. Однако для определения их вкладов в парциальные амплитуды пришлось сделать предположение о том, что в ненаблюдаемой области отсутствуют D, F и старшие парциальные волны (для рассматриваемой области энергий эксперимент подтверждает это предположение). При этом в /1/ было получено согласие с экспериментом.

В данной работе мы вычисляем амплитуду фоторождения, используя дисперсионные соотношения с ненаблюдаемой областью и продолжая мнимую часть амплитуды в эту область с помощью конечного числа полиномов Лежандра. Из-за влияния ненаблюдаемой области дисперсионные интегралы при этом могут содержать ошибку. Для определения их вкладов в парциальные амплитуды мы при этом используем точные проекционные формулы (интегрированные по углам).

Все другие предположения данной работы совпадают с предположениями работы [1].

Результаты данного расчета мало отличаются от результатов работы [1] и согласуются с экспериментальными данными по фоторождению нейтральных пионов в области низких энергий.

Метод работы [1] (дифференциальный метод) и метод данной работы (интегральный метод) дают близкие результаты, если строго ограничиться областью малых энергий.

В п. 4 рассматриваются статические дисперсионные соотношения и с помощью проекционных формул определяется вклад ненаблюдаемой области в парциальные амплитуды. Этот вклад оказывается существенным при энергиях выше резонансной и растет с ростом энергии.

Таким образом, ненаблюдаемая область дает существенный вклад при энергиях выше резонансной для углов, близких к 180°. Аппроксимация же этого вклада с помощью разложения по конечному числу полиномов Лежандра не приводит к заметным ошибкам для парциальных амплитуд.

2. Ненаблюдаемая область

Рассмотрим дисперсионные соотношения для фоторождения пионов на нуклонах в системе центра масс. В обозначениях работы [1], имеем

$$Re\ F_i^{(a)}(W,x) = F_i^{(a)B}(W,x) + \delta F_i^{(a)}(W,x), \tag{1}$$

где

$$\delta F_i^{(a)}(W,x) = P\int_{M+1}^{\infty} dW' \sum_j K_{ij}^{(a)}(W,W',x)\ Im\ F_j^{(a)}(W',x') \tag{2}$$

– дисперсионный интеграл при фиксированном квадрате переданного импульса

$$k(\omega_q - qx) = k'(\omega_{q'} - q'x'). \tag{3}$$

Здесь x и x' – значения косинуса угла вылета пиона. Рассмотрим область изменения x' в дисперсионном интеграле (2). Обозначая

$$\nu_1 = k(\omega_q - qx), \tag{4}$$

мы имеем

$$x' = (k'\omega_{q'} - \nu_1)/k'q'. \tag{5}$$

Для наблюдаемых $\nu_1 > ½$ x' изменяется следующим образом:
при $W' \to \infty$

$$x' \to 1 - 0\,, \tag{6}$$

при $W' \to M + 1$

$$x' \to \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad \nu_1 < k_{\text{пор.}}, \\ 0, & \text{если} \quad \nu_1 = k_{\text{пор.}},\ k_{\text{пор.}} = \dfrac{2M+1}{2(M+1)} \approx 0{,}9 \\ -\infty, & \text{если} \quad \nu_1 > k_{\text{пор.}} \end{cases} \tag{7}$$

Зависимость x' от W' при различных ν_1 изображена на рис. 1.

При фиксированном ν_1 наблюдаемая точка x, W в (4) пробегает часть соответствующей кривой на рис. 1, которая заключена между прямыми $x = \pm 1$. Точка x', W' в (5) при этом пробегает ту же кривую целиком. Если точка x, W на рис. 1 выше кривой 2 ($\nu_1 < k_{\text{пор.}}$), то при достаточно малых W' $x' > 1$; при $W' \to M + 1$ $x' \to +\infty$. Если x, W лежит ниже кривой 2 ($\nu_1 > k_{\text{пор.}}$), то при малых W' $x' < -1$; при $W' \to M + 1$ $x' \to -\infty$.

Таким образом, при достаточно малых W' углы $Im\, F_j^{(a)}(W', x')$ в (2) ненаблюдаемы.

Исключением является случай, когда точка x, W лежит на кривой 2 ($\nu_1 = k_{\text{пор.}}$). При этом точка x', W' пробегает ту же кривую и $0 \le x' < 1$. Именно этот случай рассмотрен в работе /1/.

В данной работе мы будем рассматривать произвольные углы и ограниченные энергии $-1 \le x \le 1$

$$W < W_{max}\,,\ W_{max} - M = 2{,}5 \div 3. \tag{8}$$

Как видно из рис. 1, кривые x, W, проходящие через область (8), выходят за границы $x = \pm 1$ лишь при $W < W_{max}$. Это значит, что при условии (8) под интегралом в (2)

$$|x'| > 1 \qquad \text{лишь при} \quad W' < W_{max}\,, \tag{9}$$

т.е. в области рассматриваемых энергий.

Для продолжения подынтегральных функций $Im\, F_j^{(a)}(W', x')$ в эту область воспользуемся их разложениями в ряды по полиномам Лежандра от x', в которых ограничимся низшими волнами. Эти разложения символически можно записать в виде

$$Im\, F(W', x') = \sum_{\ell} Im\, A_\ell (W')\, P_\ell (x'), \tag{10}$$

где P_ℓ – полином Лежандра.
Заметим, что при $W' \to M+1$ $(q' \to 0)$ полином $P_\ell (x')$ при $\nu_1 \neq k$ возрастает как $1/q_1'^{\ell}$.

Однако ряд (10) при этом, наверняка, сходится, так как вследствие условия унитарности

$$Im\, A_\ell \sim \sin \delta_\ell , \tag{11}$$

где δ_ℓ – фаза πN – рассеяния, причем при $q' \to 0$

$$\sin \delta \sim q'^{2\ell+1} / (2\ell+1)!!\,(2\ell-1)!! \tag{12}$$

и поэтому ряд (10) быстро сходится при малых q'. (Это означает, что он быстро сходится при ν_1, близких к k). Дело может усложниться лишь вдали от порога, когда $|x'| > 1$ (но x' конечен) при больших энергиях, где парциальные амплитуды не убывают с ростом ℓ, так быстро, как в (12). Мы покажем, что это не происходит в области низких энергий (8).

3. Вычисление амплитуды фоторождения нейтральных пионов с помощью интегрального метода и сравнение с дифференциальным методом /1/

Рассматривая фоторождение нейтральных пионов в области (8) мы, как и в /1/, ограничимся S и P – волнами. В амплитуды этих волн дают вклад как борновские члены в (1), так и дисперсионные интегралы (2). Вклады от борновских членов мы возьмем те же, что и в работе /1/ – формулы (1,8)[x]. Для вычисления вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды парциальных волн воспользуемся точными проекционными формулами, полученными в /3/. Для вкладов дисперсионных интегралов (2) в амплитуды S и P волн имеем:

x) Формула (8) работы /1/.

$$\delta E_{0+}(W) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\,\{\delta F_1(W,x) - x\delta F_2(W,x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)\delta F_4(W,x)\},$$

$$\delta E_{1+}(W) = \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx\,\{x\delta F_1(W,x) + \tfrac{1}{2}(1-3x^2)\delta F_2(W,x) +$$

$$+ (1-x^2)[\tfrac{1}{2}\delta F_3(W,x) + x\delta F_4(W,x)]\},$$

$$\delta M_{1+}(W) = \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx\,\{x\delta F_1(W,x) + \tfrac{1}{2}(1-3x^2)\delta F_2(W,x) -$$

$$-\tfrac{1}{2}(1-x^2)\delta F_3(W,x)\},$$

$$\delta M_{1-}(W) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\,\{-x\delta F_1(W,x) + \delta F_2(W,x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)\delta F_3(W,x)\}. \qquad (13)$$

Для вычисления дисперсионных интегралов $\delta F_i(W,x)$ мы воспользуемся формулой (2), где $Im\,F_j(W',x')$ разложим по парциальным волнам и в этом разложении ограничимся лишь зависящей от магнитного момента амплитудой магнитно-дипольного перехода в резонансное (33) состояние, т.е. воспользуемся формулами (1.7). В отличие от работы /1/ мы теперь используем эти формулы и в области ненаблюдаемых x'. Для амплитуды магнитно-дипольного перехода в (33) состояние воспользуемся той же формулой, что и в /1/

$$M^{3/2}_{1+\mu}(W) = \frac{\mu_p - \mu_n}{2f}\,\frac{k}{q}\,\frac{\frac{4}{3}f^2q^2/\omega}{1 - \frac{\omega}{\omega_r} - i\frac{4}{3}f^2q^2/\omega} \qquad (14)$$

$$\omega = W - M^*; \quad \omega_r = 2{,}17; \quad f^2 = 0{,}0877.$$

При этом для вычисления вкладов интегралов (2) в нерезонансные амплитуды мы, как и в /1/, приближенно положим

$$Im\,M^{3/2}_{1+\mu}(W') = ef\,\frac{4{,}69\,\pi}{3M}\,k'q'\delta(W' - W_r). \qquad (15)$$

Найденные таким образом амплитуды S и P - волн определяют сечение фоторождения нейтральных пионов

$$d\sigma / d\Omega = A + B\cos\theta + C\cos^2\theta \qquad (16)$$

по формулам (1.15) (где M_{1+} означает реальную часть этой амплитуды). Результаты расчетов собраны в таблице, где E_γ - лабораторная энергия фотонов (все величины в системе единиц, где $\hbar = c = \mu = 1$). Кривые для сечений при этом практически совпадают с кривыми, полученными в /1/ дифференциальным методом.

Чтобы заметить различие интегрального метода данной работы и дифференциального метода работы /1/, надо сравнить вклады дисперсионных интегралов в нерезонансные амплитуды, вычисленные обоими методами. Эти вклады изображены на рис. 2 сплошными кривыми (И - интегральный метод данной работы, Д - дифференциальный метод работы /1/). Различие между кривыми И и Д обусловлено: 1) пренебрежением старшими парциальными волнами при вычислении кривых Д; это обстоятельство, вообще говоря, может сказываться при всех энергиях; 2) продолжением в ненаблюдаемую область с помощью конечного числа полиномов Лежандра при вычислении кривых И; это обстоятельство в силу приближения (15) может сказываться лишь при энергиях выше резонанса $\omega > 2{,}17$. Мы видим, что для энергий выше резонанса различие между кривыми И и Д с ростом энергии становится заметнее, но даже при $\omega = 2{,}77$ ($E_\gamma = 465$ Мэв) составляет 2,5% для $\delta E_{0+}^{(+)}$, 21% - для $\delta M_{1-}^{(+)}$ и 25% - для $\delta M_{1+}^{1/2}$. При резонансной энергии различия (обусловленные лишь неучетом старших парциальных волн) составляют собственно 1%, 13% и 8%. Поэтому можно заключить, что продолжение в ненаблюдаемую область с помощью конечного числа полиномов Лежандра в рассматриваемой области энергий приводит к ошибкам не более (1 - 2) % для вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды S - волн и (10 - 20) % для вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды P - волн. Для парциальных амплитуд в целом эта ошибка меньше или больше в зависимости от того, одинаковы или различны знаки у соответствующих им борновских членов и дисперсионных вкладов.

4. Оценка вклада ненаблюдаемой области в статическом приближении

Выше мы показали, что продолжение в ненаблюдаемую область с помощью конечного числа полиномов Лежандра не приводит к большим ошибкам. Рассмотрим теперь, какая возникнет ошибка, если в дисперсионных интегралах вообще выбросить вклад ненаблюдаемой области.

В брейтовской системе координат вклад ненаблюдаемой области выражается интегралом от $E = \frac{M^2 - \vec{p}^{\,2} + 1/4}{(\vec{p}^{\,2} + M^2)^{1/2}}$ до $E = (1 + \frac{1}{4\,\vec{p}^{\,2}})\,|\vec{p}|$ при фиксированном $\vec{p}^{\,2}$. Нетрудно убедиться, что в системе центра масс это соответствует интегралу по W' от $M+1$ до значения, определяемого равенством (5) при $x' = 1\ (\nu_l < k\ )$ и $x' = -1\ (\nu_l > k\ )$.

В приближении (15) это означает, что вклад ненаблюдаемой области равен нулю при $W \le W_r$, а при $W > W_r$ этот вклад дает

$$x > x_+ \quad \text{и} \quad x < x_- , \tag{17}$$

где

$$x_\pm = (k\omega_q - k\,\omega_{q_r} \pm k_r q_r)/kq.$$

Таким образом в нашем приближении вклад ненаблюдаемой области в нерезонансные парциальные амплитуды (13) равен 0 при $W \le W_r$. Чтобы выбросить этот вклад при $W > W_r$, надо в (13) интегрировать не от -1 до $+1$, а от x_- до x_+. Так как мы сейчас интересуемся лишь качественными выводами, то вполне достаточно рассмотреть дисперсионные соотношения в статическом приближении $M \to \infty$.

В этом приближении результаты интегрального и дифференциального /1/ методов совпадают и вклад дисперсионного интеграла в S - волну равен

$$\frac{1}{ef}\,\delta E_{0+}^{(+)}(\omega) = a\,\frac{4}{3}\,\omega, \quad a = \frac{4{,}69}{3M}. \tag{19}$$

Если же выбросить ненаблюдаемую область (и определять парциальные амплитуды с помощью проекционных формул (13)), то мы получим выражение $\overline{\delta E_{0+}}$, которое при $\omega \le \omega_r$ совпадает с (19), а при $\omega > \omega_r$

$$\overline{\delta E}_{0+}^{(+)}(\omega > \omega_r) = 0\,.$$

$$\delta E_{0+}(W) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\,\{\delta F_1(W,x) - x\delta F_2(W,x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)\delta F_4(W,x)\},$$

$$\delta E_{1+}(W) = \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx\,\{x\delta F_1(W,x) + \tfrac{1}{2}(1-3x^2)\delta F_2(W,x) +$$

$$+ (1-x^2)[\tfrac{1}{2}\delta F_3(W,x) + x\delta F_4(W,x)]\},$$

$$\delta M_{1+}(W) = \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} dx\,\{x\delta F_1(W,x) + \tfrac{1}{2}(1-3x^2)\delta F_2(W,x) -$$

$$-\tfrac{1}{2}(1-x^2)\delta F_3(W,x)\},$$

$$\delta M_{1-}(W) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\,\{-x\delta F_1(W,x) + \delta F_2(W,x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)\delta F_3(W,x)\}. \qquad (13)$$

Для вычисления дисперсионных интегралов $\delta F_i(W,x)$ мы воспользуемся формулой (2), где $Im\,F_j(W',x')$ <u>разложим по парциальным волнам</u> и в этом разложении ограничимся лишь зависящей от магнитного момента амплитудой магнитно-дипольного перехода в резонансное (33) состояние, т.е. воспользуемся формулами (1.7). В отличие от работы /1/ мы теперь используем эти формулы и в области ненаблюдаемых x'. Для амплитуды магнитно-дипольного перехода в (33) состояние воспользуемся той же формулой, что и в /1/

$$M^{3/2}_{1+\mu}(W) = \frac{\mu_p - \mu_n}{2f}\,\frac{k}{q}\,\frac{\frac{4}{3}f^2q^2/\omega}{1-\frac{\omega}{\omega_r} - i\frac{4}{3}f^2q^2/\omega} \qquad (14)$$

$$\omega = W - M^*;\quad \omega_r = 2{,}17;\quad f^2 = 0{,}0877\ .$$

При этом для вычисления вкладов интегралов (2) в нерезонансные амплитуды мы, как и в /1/, приближенно положим

$$Im\,M^{3/2}_{1+\mu}(W') = ef\,\frac{4{,}69\,\pi}{3M}\,k'q'\delta(W'-W_r). \qquad (15)$$

Найденные таким образом амплитуды S и P – волн определяют сечение фоторождения нейтральных пионов

$$d\sigma / d\Omega = A + B \cos\theta + C \cos^2\theta \qquad (16)$$

по формулам (1.15) (где M_{1+} означает реальную часть этой амплитуды). Результаты расчетов собраны в таблице, где E_γ - лабораторная энергия фотонов (все величины в системе единиц, где $\hbar = c = \mu = 1$). Кривые для сечений при этом практически совпадают с кривыми, полученными в /1/ дифференциальным методом.

Чтобы заметить различие интегрального метода данной работы и дифференциального метода работы /1/, надо сравнить вклады дисперсионных интегралов в нерезонансные амплитуды, вычисленные обоими методами. Эти вклады изображены на рис. 2 сплошными кривыми (И - интегральный метод данной работы, Д - дифференциальный метод работы /1/). Различие между кривыми И и Д обусловлено: 1) пренебрежением старшими парциальными волнами при вычислении кривых Д; это обстоятельство, вообще говоря, может сказываться при всех энергиях; 2) продолжением в ненаблюдаемую область с помощью конечного числа полиномов Лежандра при вычислении кривых И; это обстоятельство в силу приближения (15) может сказываться лишь при энергиях выше резонанса $\omega > 2{,}17$. Мы видим, что для энергий выше резонанса различие между кривыми И и Д с ростом энергии становится заметнее, но даже при $\omega = 2{,}77$ ($E_\gamma = 465$ Мэв) составляет 2,5% для $\delta E_{0+}^{(+)}$, 21% - для $\delta M_{1-}^{(+)}$ и 25% - для $\delta M_{1+}^{1/2}$. При резонансной энергии различия (обусловленные лишь неучетом старших парциальных волн) составляют собственно 1%, 13% и 8%. Поэтому можно заключить, что продолжение в ненаблюдаемую область с помощью конечного числа полиномов Лежандра в рассматриваемой области энергий приводит к ошибкам не более (1 - 2) % для вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды S - волн и (10 - 20) % для вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды P - волн. Для парциальных амплитуд в целом эта ошибка меньше или больше в зависимости от того, одинаковы или различны знаки у соответствующих им борновских членов и дисперсионных вкладов.

4. Оценка вклада ненаблюдаемой области в статическом приближении

Выше мы показали, что продолжение в ненаблюдаемую область с помощью конечного числа полиномов Лежандра не приводит к большим ошибкам. Рассмотрим теперь, какая возникнет ошибка, если в дисперсионных интегралах вообще выбросить вклад ненаблюдаемой области.

В брейтовской системе координат вклад ненаблюдаемой области выражается интегралом от $E = \frac{M^2 - \vec{p}^2 + 1/4}{(\vec{p}^2 + M^2)^{1/2}}$ до $E = (1 + \frac{1}{4\vec{p}^2}) |\vec{p}|$ при фиксированном $\vec{p}^2$. Нетрудно убедиться, что в системе центра масс это соответствует интегралу по W' от $M+1$ до значения, определяемого равенством (5) при $x' = 1\ (\nu_1 < k\quad)$ и $x' = -1\ (\nu_1 > k\quad)$.

В приближении (15) это означает, что вклад ненаблюдаемой области равен нулю при $W \leq W_r$, а при $W > W_r$ этот вклад дает

$$x > x_+ \quad \text{и} \quad x < x_-, \tag{17}$$

где

$$x_\pm = (k\omega_q - k\,\omega_{q_r} \pm k_r q_r)/kq.$$

Таким образом в нашем приближении вклад ненаблюдаемой области в нерезонансные парциальные амплитуды (13) равен 0 при $W \leq W_r$. Чтобы выбросить этот вклад при $W > W_r$, надо в (13) интегрировать не от -1 до +1, а от x_- до x_+. Так как мы сейчас интересуемся лишь качественными выводами, то вполне достаточно рассмотреть дисперсионные соотношения в статическом приближении $M \to \infty$.

В этом приближении результаты интегрального и дифференциального [1] методов совпадают и вклад дисперсионного интеграла в S - волну равен

$$\frac{1}{ef}\,\delta E_{0+}^{(+)}(\omega) = a\,\frac{4}{3}\,\omega, \quad a = \frac{4{,}69}{3M}. \tag{19}$$

Если же выбросить ненаблюдаемую область (и определять парциальные амплитуды с помощью проекционных формул (13)), то мы получим выражение $\overline{\delta E_{0+}}$, которое при $\omega \leq \omega_r$ совпадает с (19), а при $\omega > \omega_r$

$$\overline{\delta E_{0+}^{(+)}}(\omega > \omega_r) = 0.$$

Таким образом, весь вклад в выражение (19) при $\omega > \omega_r$ дает ненаблюдаемая область. Соответствующие формулы для упругих нерезонансных амплитуд имеют вид

$$\frac{1}{ef}\,\delta M^{(+)}_{1-}(\omega) = a\,\frac{8}{9}\,\frac{\omega q}{\omega_r+\omega}\ ; \tag{21}$$

$$\frac{1}{ef}\,\overline{\delta M}^{(+)}_{1-}(\omega>\omega_r) = a\,\frac{x_+-x_-}{6}\,\Big\{-2\omega(x_+ + x_-) + \omega q\Big[\frac{1-x_+^2-x_+x_- - x_-^2}{\omega_r-\omega} + \frac{9-x_+^2-x_+x_- - x_-^2}{3(\omega_r+\omega)}\Big]\Big\}\ ; \tag{22}$$

$$\frac{1}{ef}\,\delta M^{1/2}_{1+}(\omega) = a\,\frac{4}{9}\,\frac{\omega q}{\omega_r+\omega}\ ; \tag{23}$$

$$\frac{1}{ef}\,\overline{\delta M}^{1/2}_{1+}(\omega>\omega_r) = a\,\frac{x_+-x_-}{6}\Big\{\omega(x_+ + x_-) + \omega q\,\frac{9-5(x_+^2+x_+x_-+x_-^2)}{3(\omega_r+\omega)}\Big\} \tag{24}$$

Величины $\frac{1}{ef}\overline{\delta E}^{(+)}_{0+}$ и $\frac{1}{ef}\overline{\delta M}^{(+)}_{1-}$ в точке $\omega = \omega_r$ имеют скачки, равные соответственно $-a\,4/3\,\omega_r$ и $-a\,2/3\,\frac{\omega_r^2+q_r^2}{q_r}$. Эти скачки возникают благодаря скачкам амплитуд с изотопическим спином $T = 3/2$. Амплитуды с $T = 1/2$ скачков не имеют (рис. 3). Статические значения вкладов дисперсионных интегралов в нерезонансные амплитуды изображены на рис. 2, 3 пунктиром. Сплошные линии на рис. 3 соответствуют этим же величинам без учета ненаблюдаемой области.

Скачки амплитуд с $T = 3/2$, вычисленных без ненаблюдаемой области, обязаны, разумеется, приближению (15). Замена δ -функции (15) гладкой кривой привела бы к сглаживанию этих скачков. Однако это не изменило бы вывода о том, что при $\omega \leq \omega_r$ вклад ненаблюдаемой области весьма мал, при $\omega > \omega_r$ - наоборот, весьма велик.

§ 5. Выводы

1. Благодаря существованию узкого (33) резонанса вклад ненаблюдаемой области в парциальные амплитуды при энергиях ниже резонансной ничтожно мал. При энергиях выше резонансной этот вклад весьма велик - он сравним с полным вкладом дисперсионного интеграла.

2. Продолжение в ненаблюдаемую область с помощью конечного числа полиномов Лежандра практически не приводит к ошибкам в парциальных амплитудах при энергиях ниже резонансной. При энергиях выше резонансной ошибка возникает и растет с ростом энергии, однако даже при 460 Мэв она не превышает (1-2)% для вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды S - волны и (10-20)% для вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды P -волн.

3. Предположение о том, что в наблюдаемой области амплитуды D, F и старших волн тождественно равны нулю приводит к малой ошибке - порядка 1% для вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды S -волн и порядка 10% -для вкладов дисперсионных интегралов в амплитуды P волн.

Литература

1. Л.Д.Соловьев, Чэнь Чун-мо. Препринт ОИЯИ Д-728.
2. Э.Ферми. Лекции о π -мезонах и нуклонах. ИИЛ (1956).
3. Л.Д.Соловьев. *Nucl. Phys. 5, 256 (1958).*
4. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, Л.Д.Соловьев. *Nucl.Phys. 4, 427 (1957).*

Рукопись поступила в издательский отдел
25 января 1962 года.

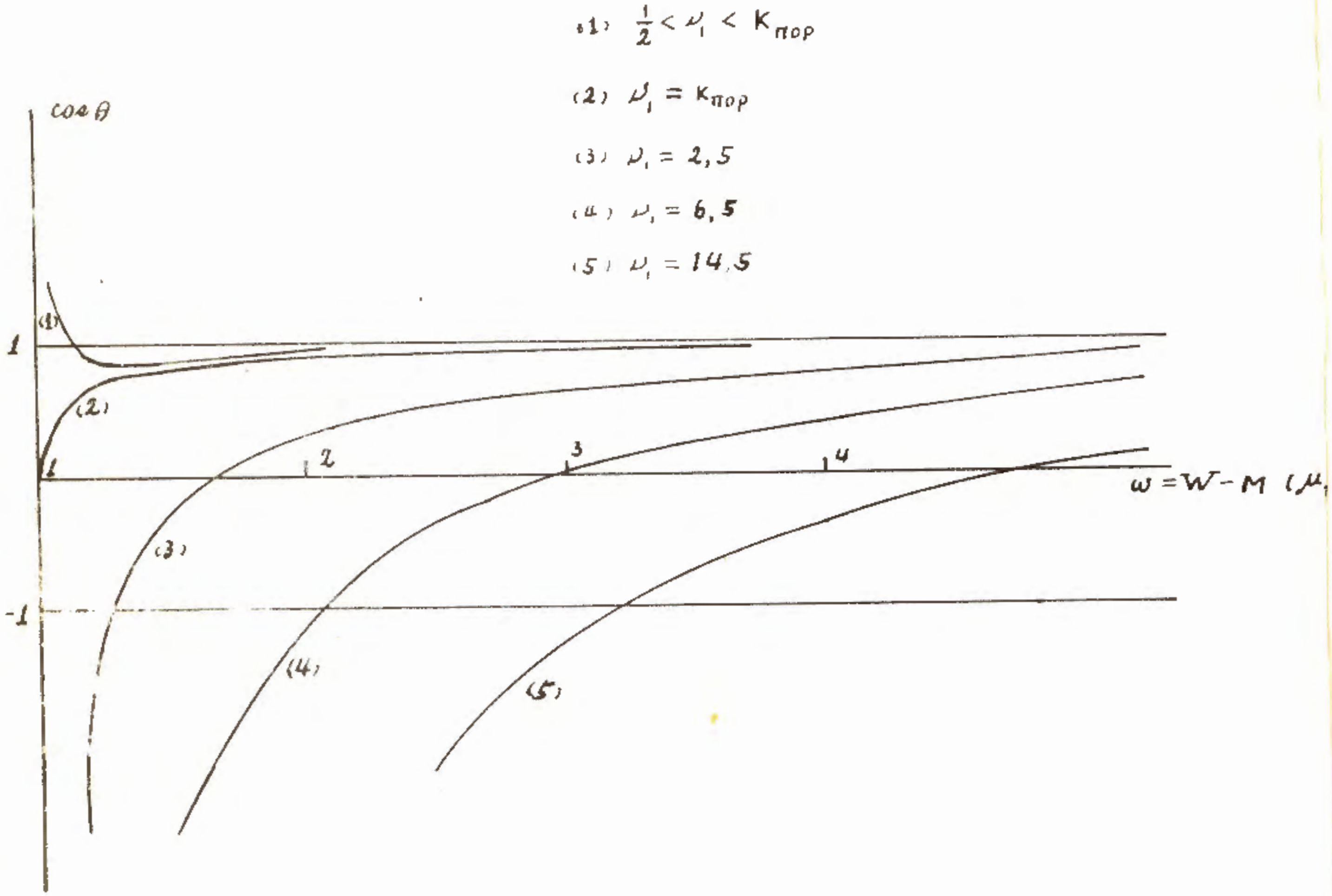

(1) $\frac{1}{2} < \nu_1 < K_{пор}$
(2) $\nu_1 = K_{пор}$
(3) $\nu_1 = 2,5$
(4) $\nu_1 = 6,5$
(5) $\nu_1 = 14,5$
$\cos\theta$
1
-1
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
2
3
4
$\omega = W - M$ (μ_1

Рис. 1.

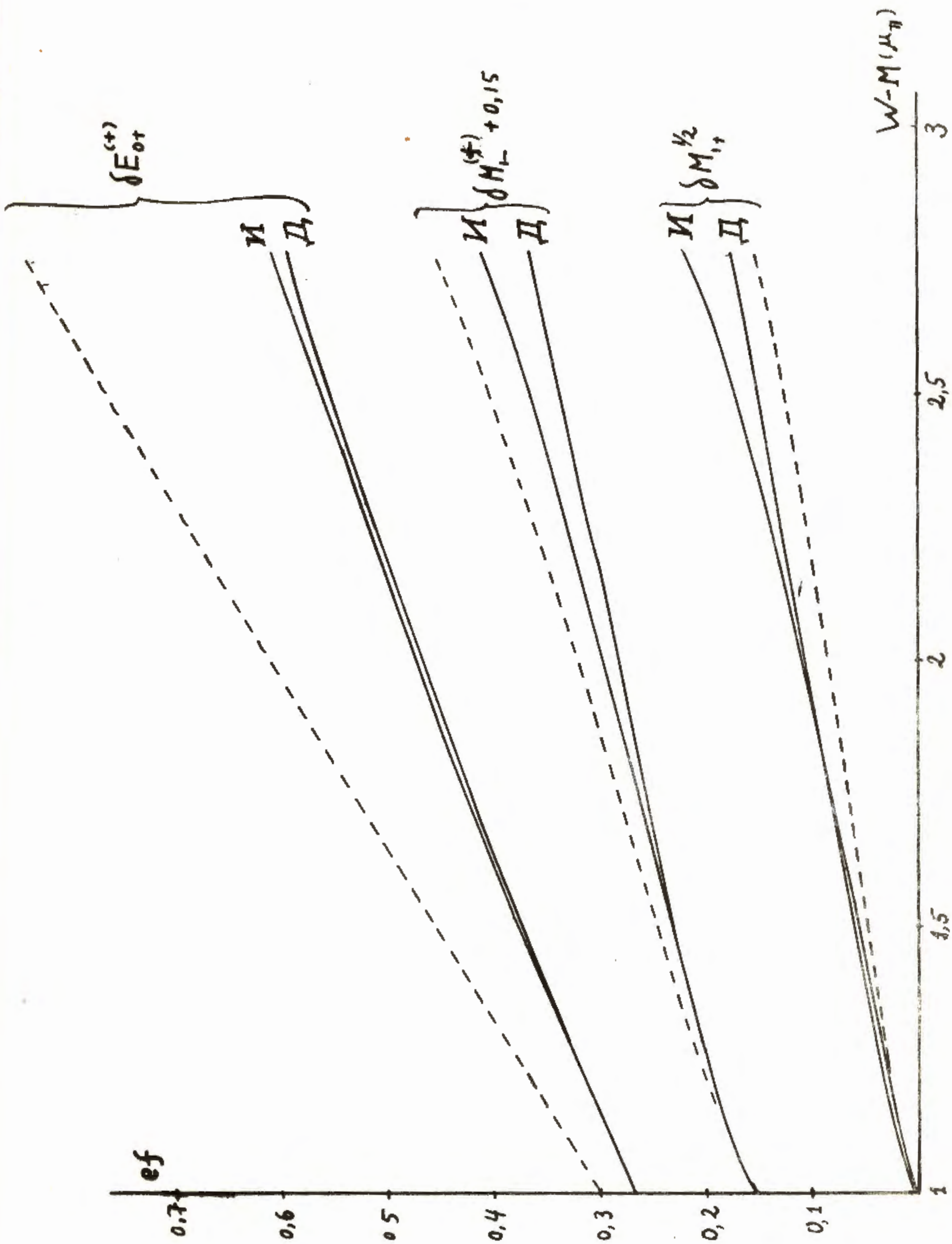
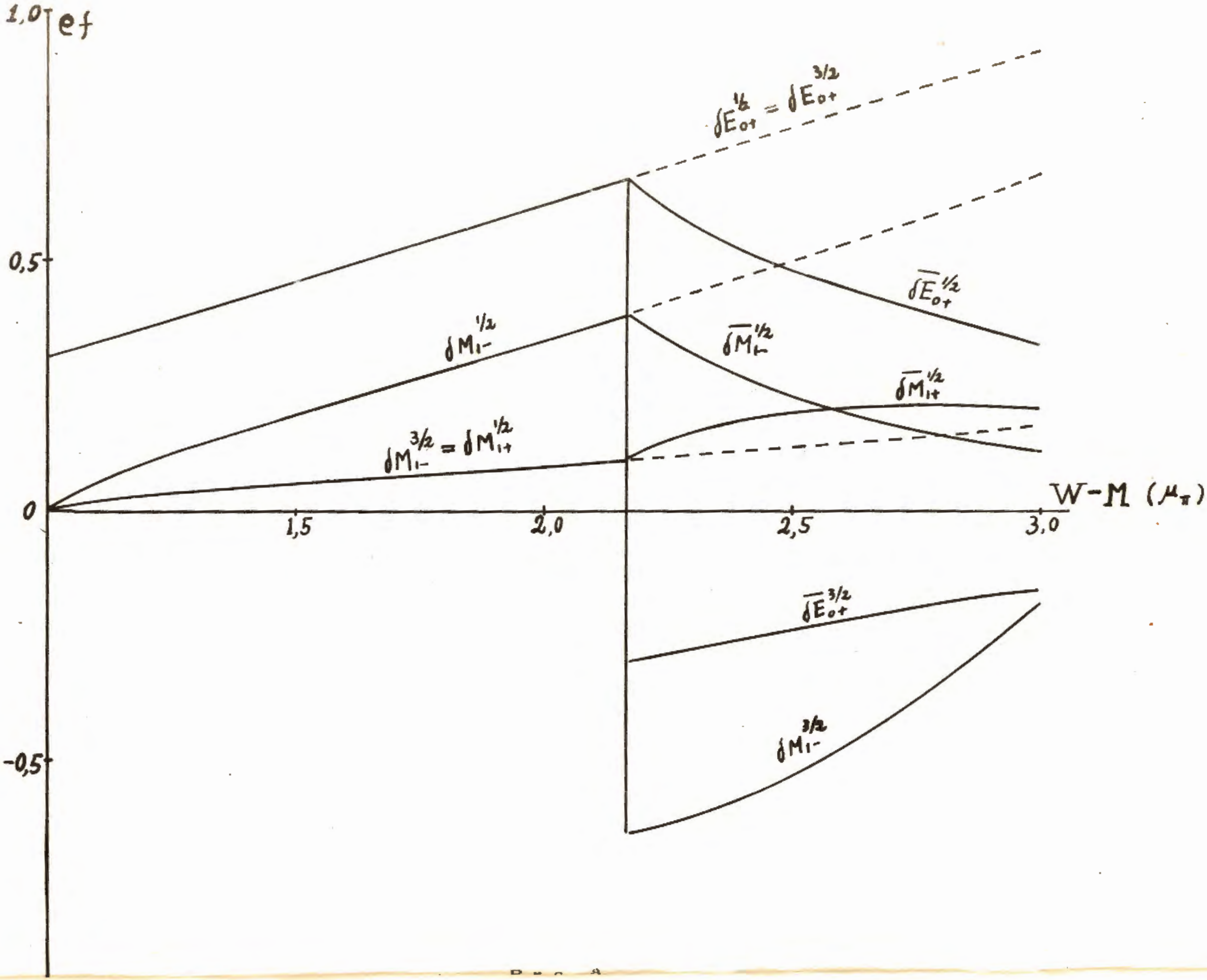


Рис. 2.



1,0
ef
0,5
0
-0,5
1,5
2,0
2,5
3,0
W-M (μ_π)
$\delta E_{0+}^{1/2} = \delta E_{0+}^{3/2}$
$\overline{\delta E}_{0+}^{1/2}$
$\delta M_{1-}^{1/2}$
$\overline{\delta M}_{1-}^{1/2}$
$\overline{\delta M}_{1+}^{1/2}$
$\delta M_{1-}^{3/2} = \delta M_{1+}^{1/2}$
$\overline{\delta E}_{0+}^{3/2}$
$\delta M_{1-}^{3/2}$

Таблица 1.

E_γ	$\delta E_{0+}^{(+)}/ef$	$\delta M_{1+}^{1/2}/ef$	$\delta M_{1+}^{3/2}/ef$	$\delta M_{1-}^{(+)}/ef$	$Im\, M_{1+}^{3/2}/ef$	$\delta E_{1+}^{(+)}/ef$	E_{0+}/ef	E_{1+}/ef	M_{1+}/ef	M_{1-}/ef	$A(E_\gamma)$	$B(E_\gamma)$	$C(E_\gamma)$
I,I852	0,28796	0,0I74I	0,09I83	0,02774	0,00285	-0,0309.I0^{-2}	-0,06564	0,350I.I0^{-3}	0,II907	-0,06549	0,09458.I0^{-4}	-0,0639I.I0^{-4}	0,00709.I0^{-4}
I,3333	0,3I59I	0,0298I	0,I783I	0,04639	0,0I890	-0,0545.I0^{-2}	-0,06313	0,4763.I0^{-3}	0,2086I	-0,09516	0,37503.I0^{-4}	-0,I4I76.I0^{-4}	-0,0I7I5.I0^{-4}
I,48I5	0,34266	0,04I45	0,2807I	0,06299	0,05869	-0,08II.I0^{-2}	-0,05963	0,475I.I0^{-3}	0,30I33	-0,II338	0,9I00I.I0^{-4}	-0,2I256.I0^{-4}	-0,I4657.I0^{-4}
I,6296	0,36826	0,053I7	0,40266	0,07894	0,I4043	-0,I45I.I0^{-2}	-0,05525	0,0432.I0^{-3}	0,40363	-0,I2562	I,86052.I0^{-4}	-0,27397.I0^{-4}	-0,49269.I0^{-4}
I,9259	0,4I643	0,07768	0,62493	0,II023	0,54686	-0,2230.I0^{-2}	-0,04428	-0,4446.I0^{-3}	0,588I6	-0,I3922	5,89570.I0^{-4}	-0,33329.I0^{-4}	-2,46466.I0^{-4}
2,I48I	0,45032	0,09722	0,4964I	0,I335I	I,06347	-0,3I48.I0^{-2}	-0,0343I	-0,I239.I0^{-2}	0,52669	-0,I4302	I0,2859.I0^{-4}	-0,24754.I0^{-4}	-5,I5433.I0^{-4}
2,2222	0,46II9	0,I0398	0,35462	0,I4I25	I,20795	-0,3387.I0^{-2}	-0,03075	-0,I452.I0^{-2}	0,43983	-0,I4338	II,3I77.I0^{-4}	-0,I9505.I0^{-4}	-5,924I0.I0^{-4}
3,3333	0,6062I	0,2I904	-0,82766	0,25659	0,69799	-0,8346.I0^{-2}	0,03507	-0,6868.I0^{-2}	-0,248I4	-0,II437	4,38I8.I0^{-4}	-0,0645I.I0^{-4}	-2,94236.I0^{-4}