ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

И.П. Недялков

Р-902

РЕДУКЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Дубна 1962 год

И.П. Недялков

Р-902

РЕДУКЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пусть U–регулярное решение эллиптического дифференциального уравнения (2). При $c \leq 0$ U–либо константа, либо достигает максимального значения только на границе области. Поэтому, если $U \neq$ константе, оно не может быть регулярно во всех точках m –мерного эвклидового пространства E_m; существуют области G_j, $j=1,2,..n$, в которых U не определено.

Поверхность, ограничивающую G_j, будем обозначать через S_j. Предполагаем, что S_j –кусочногладкая поверхность.

Замкнутые области $G_j + S_j$ выбираем так, чтобы они не имели общих точек.

Обозначим через G_0 область, содержащую внутри себя все замкнутые области $G_j + S_j$, $j=1,2...n$. Поверхность S_0, ограничивающую G_0, будем предполагать кусочногладкой.

В области $G_0 + S_0 - \sum\limits_{j=1}^{n} G_j$ решение U должно быть регулярным

Представим U как сумму слагаемых

$$U = U_0 + \sum_{j=1}^{n} U_j, \tag{1}$$

причем U_0 является регулярным в G_0 решением (2), а каждое из $U_j, j=1,2,..n$ – решение (2), которое регулярно в $G_0-(G_j + S_j)$ и имеет особенность хотя бы в одной точке области G_j.

Области G_j, $j=1,2,... n$ будем называть гнездами, функции $U_0, U_1, U_2, ... U_n$ – компонентами или редукционными компонентами, а представление U в виде суммы редукционных компонентов – редукцией.

Каждое гнездо вообще может быть разбито на несколько гнезд. Если редукция такая, что дальнейшее увеличение числа гнезд невозможно, она называется полной, а ее компоненты – элементарными.

Например, ньютоновский потенциал U в пространстве, окружающем два однородных шара, есть нетривиальное решение уравнения типа (2) при $c=0$. U имеет особенности в двух точках – в центре M_1 первого шара и в центре M_2 второго шара. Поэтому, если выбрать область G_1 с поверхностью S_1 так, чтобы она содержала внутри себя M_1 и область G_2 с поверхностью S_2 так, чтобы она содержала внутри себя M_2, причем $G_1 + S_1$ не имеет общих точек с $G_2 + S_2$, тогда G_1 и G_2 будут гнездами. Потенциал первого шара U_1 и потенциал второго шара U_2 будут редукционными компонентами. Редуцировать – значит, исходя из значения U, найти функции U_1 и U_2, отвечающие перечисленным выше требованиям. В данном случае редукция полная.

В этой работе мы будем изучать вопрос о редукции решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Сформулируем 5 теорем, которые, в основном, являются обобщениями результатов работы /1/.

<u>Теорема 1.</u> Пусть первые производные функции a_{ik}, e_i, $i,k=1,2,\dots n$ непрерывны в G_0+S_0 и пусть для уравнений (2) и (3) и области G_0+S_0 существуют функции Грина.

Тогда каждое отличное от константы решение (2), которое регулярно в $G_0+S_0-\sum_{j=1}^{n} G_j$, редуцируемо.

<u>Доказательство</u>. Обозначим через M эллиптический оператор

$$M=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}e_i+c$$

и рассмотрим функцию $U=U(x_1,x_2,\dots x_m)$, которая в области $G_0+S_0-\sum_{j=1}^{n} G_j$ является регулярным решением уравнения

$$MU=0\,. \tag{2}$$

Нам понадобится и уравнение

$$NV=0, \tag{3}$$

где N—сопряженный к M оператор.

Обозначим через $U^*(P,Q)$ функцию Грина уравнения (3) и области G_0+S_0. Переменную точку обозначим через Q, а фиксированную – через P. Условимся, что дифференциальное уравнение удовлетворяется по той переменной, которая написана на втором месте. Например, $U^*(P,Q)$ удовлетворяет (2) по переменной Q.

Аналогичную функцию Грина для (2) обозначим через $V^*(P,Q)$.

Функции U^* и V^* нормируем условием

$$\int\limits_{(G_0)} MU^*(P,Q)\,d\tau=\int\limits_{(G_0)} NV^*(P,Q)\,d\tau=-1,$$

где $d\tau$—дифференциальный элемент m-мерного эвклидового пространства в точке Q.

Применим формулу Грина в замкнутой области $G_0 + S_0 - \sum_{j=1}^{n} G_j$:

$$\int\limits_{(G_0+S_0-\sum_{j=1}^{n} G_j)} \{ V^*(P,Q)(MU) - UN[V^*(P,Q)] d\tau = \int\limits_{(S_0+\sum_{j=1}^{n} S_j)} \{ a[V^*(P,Q)\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial \nu}] + bUV^*(P,Q)\} d\tau .$$

Здесь

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\gamma_k)^2}$$

$$b = \sum_{i=1}^{m} e_i \gamma_i ,$$

где γ_i - направляющие косинусы внешней нормали к поверхностям $S_0, S_1, S_2, \ldots S_n$, $d\sigma$ - поверхностный элемент, ν - конормаль.

Для $P \in G_0 - \sum_{j=1}^{n} G_j$ формула Грина приводит к соотношениям:

$$U(P) = U_0(P) + \sum_{j=1}^{n} U_j(P),$$

где

$$U_0(P) = \int\limits_{(S_0)} \{ a[V^*(P,Q)\frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial \nu}] + bUV^*(P,Q)\} d\sigma$$

$$U_j(P) = -\int\limits_{(S_j)} \{ a[V^*(P,Q)\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial \nu}] + bUV^*(P,Q)\} d\sigma, \qquad (4)$$

которое тождественно с редукционной формулой (1). Надо еще доказать, что слагаемые $U_0, U_1, U_2, \ldots U_n$ - редукционные компоненты. В самом деле из сопряженности операторов M и N следует $V^*(P,Q)=U^*(Q,P)$. Поэтому

$$U_0(P) = \int\limits_{(S_0)} \{ a[U^*(Q,P)\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\frac{\partial U^*(Q,P)}{\partial \nu}] + bUU^*(Q,P)\} d\sigma$$

$$U_j(P) = -\int\limits_{(S_j)} \{ a[U^*(Q,P)\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\frac{\partial U^*(Q,P)}{\partial \nu}] + bUU^*(Q,P)\} d\sigma. \qquad (5)$$

Функция Грина $U^*(Q,P)$ удовлетворяет (2) по P. Из (5) вытекает, что $U_0(P)$-регулярное решение (2) в G_0, а U_j - регулярное решение (2) в $G_0-(G_j+S_j)$, т.е. $U_0, U_1, \ldots U_n$ являются редукционными компонентами. Тем самым теорема доказана.

<u>Теорема 2.</u> Пусть области G_j' и G_j'', ограниченные поверхностями S_j' и S_j'', содержат внутри себя $G_j + S_j$, а замкнутые области $G_j' + S_j'$ $G_j'' + S_j''$ не имеют общих точек с остальными гнездами $G_k + S_k$, $k = 1, 2, \dots j-1, j+1, \dots n$.

Обозначим через U_j' и U_j'' значения, полученные по формуле (4) подстановкой в нее вместо S_j, соответственно, S_j' и S_j''.

Тогда $U_j' = U_j''$ для всех точек, которые находятся вне S_j' и вне S_j''.

<u>Доказательство.</u> Применим (4) вначале для S_j', потом для S_j и вычтем второе уравнение из первого:

$$U_j' - U_j = \iint\limits_{(S_j' + S_j)} \{ a [V^* \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial V^*}{\partial \nu}] + b U V^* \} d\sigma .$$

Здесь $S_j' + S_j''$ – поверхность, ограничивающая кольцевую область $G_j' - G_j$.

При помощи формулы Грина это равенство можно записать

$$U_j' - U_j = -\int\limits_{(G_i' - G_i)} [V^*(MU) - U(NV^*)] d\tau .$$

Интегрируем по Q, а фиксированную точку P выбираем так, чтобы она находилась вне S_j и вне S_j'. Это означает, что в подынтегральном выражении $V^*(P,Q)$ и $U = U(Q)$ удовлетворяют соответственно (3) и (2) во всех точках области интегрирования. Поэтому $U_j' - U_j = 0$. Подобным образом доказывается, что $U_j'' - U_j = 0$ и, следовательно, $U_j' = U_j''$.

<u>Теорема 3.</u> Пусть поверхность S_k ограничивает область G_k, в которой U регулярно. Тогда $U_k = 0$.

<u>Доказательство.</u> При помощи формулы Грина выражение

$$U_k(P) = -\int\limits_{(S_k)} [a (V^* \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial V^*}{\partial \nu}) + b U V^*] d\sigma$$

записывается как

$$U_k(P) = -\int\limits_{(G_k)} [V^*(MU) - U(NV^*)] d\tau .$$

В G_k U регулярно Π. По предположению $V^*(P,Q)$ тоже регулярно в G_k, так как полюсная точка P находится вне G_k. Поэтому $U_k(P)=0$.

Теорема 4. Пусть при данной системе гнезд $G_0, G_j, j=1,2,\dots n$ U редуцируется как при помощи функций $U_0, U_j, j=1,2,\dots n$, так и при помощи функций $\tilde U_0, \tilde U_j, j=1,2,\dots n$. Тогда, если $c\le 0$, существуют решения (2), $W_j, j=1,2,\dots n$, которые регулярны в G_0 и в $G_0-(G_j+S_j)$ совпадают с $U_j-\tilde U_j$.

Доказательство. Подставляя (1) в (4), находим

$$U_j(P)=-\int_{(S_j)}\left\{a\left[V^*(P,Q)\frac{\partial U_j}{\partial\nu}-U_j\frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial\nu}\right]+bU_jV^*(P,Q)\right\}d\sigma \qquad P\in G_0-\sum_{j=1}^{n}(G_j+S_j).$$

При выводе этой формулы принимается во внимание, что при $i\neq j$ решение U_i регулярно в G_j+S_j. Поэтому из теоремы 3 вытекает, что все интегралы вида

$$\int_{(S_j)}\left\{a\left[V^*(P,Q)\frac{\partial U_i}{\partial\nu}-U_i\frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial\nu}\right]+bU_iV^*(P,Q)\right\}d\tau,\ i\neq j$$

равны нулю.

Подставляя в (4) функцию $U=\tilde U_0+\sum_{j=1}^{n}\tilde U_j$, подобным образом находим, что

$$U_j(P)=-\int_{(S_j)}\left\{a\left[V^*(P,Q)\frac{\partial\tilde U_j}{\partial\nu}-\tilde U_j\frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial\nu}\right]+b\tilde U_jV^*(P,Q)\right\}d\sigma,\ P\in G-\sum_{j=1}^{n}(G_j+S_j).$$

$U_j(P)$ получено один раз при помощи поверхностного интеграла, в который входит U_j и второй раз при помощи поверхностного интеграла, в который входит $\tilde U_j$ Вычитая соответствующие выражения, получаем

$$\int_{(S_j)}\left\{a\left[V^*(P,Q)\frac{\partial(U_j-\tilde U_j)}{\partial\nu}-(U_j-\tilde U_j)\frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial\nu}\right]+b(U_j-\tilde U_j)V^*(P,Q)\right\}d\sigma=0\ \dots\dots \qquad (6)$$

$$P\in G_0-\sum_{j=1}^{n}(G_j+S_j).$$

Функция

$$W_j(P)=\int_{(S_j)}\left\{a\left[U^*(Q,P)\frac{\partial(U_j-\tilde U_j)}{\partial\nu}-(U_j-\tilde U_j)\frac{\partial U^*(Q,P)}{\partial\nu}\right]+b(U_j-\tilde U_j)U^*(Q,P)\right\}d\sigma,\quad P\in G_0 \qquad (7)$$

является регулярным решением (2) в G_0.

Применим формулу Грина в области $G_0-(G_j+S_j)$ для функций $U_j-\tilde U_j$ и $V^*(P,Q)$:

$$U_j - \tilde{U}_j = \int\limits_{(S_0)} \{ a[V^*(P,Q) \frac{\partial (U_j - \tilde{U}_j)}{\partial \nu} - (U_j - \tilde{U}_j) \frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial \nu}] + b(U_j - \tilde{U}_j) V^*(P,Q) \} d\sigma -$$

$$- \int\limits_{(S_j)} \{ a[V^*(P,Q) \frac{\partial (U_j - \tilde{U}_j)}{\partial \nu} - (U_j - \tilde{U}_j) \frac{\partial V^*(P,Q)}{\partial \nu}] + b(U_j - \tilde{U}_j) V^*(P,Q) \} d\sigma .$$

Подставим (6) и (7) в (8). (Перед подстановкой (7) $U^*(Q,P)$ заменяем на $V^*(P,Q)$). Находим, что

$$W_j(P) = U_j(P) - \tilde{U}_j(P), \qquad P \in G_0 - \sum_{j=1}^{n} (G_j + S_j).$$

Так как $c \leq 0$ равенство имеет силу и в более широкой области

$$W_j(P) = U_j(P) - \tilde{U}_j(P) \qquad P \in G_0 - (G_j + S_j).$$

Только что полученное равенство и (7) доказывают теорему.

Оказывается, что редукция однозначна с точностью до решений уравнения (2), которые регулярны в G_0. Если редукция осуществлена при помощи формулы Грина задачи Дирхле, редукционные компоненты анулируются на S_0. Если формулы Грина соответствуют краевой задаче с косой производной, тогда на S_0 аннулируется косая производная редукционных компонентов.

Так как мы можем прибавить регулярное решение, принимающее определенные краевые значения на S_0 (предполагается, что соответствующая краевая задача имеет решение), мы в состоянии построить редукционные компоненты, отвечающие заданным краевым условиям.

Иногда эти краевые условия определяются однозначно от природы задачи. Например, биоэлектрический потенциал U удовлетворяет (2), причем $a_{ik} = \delta_{ik} \lambda$, где δ_{ik} – символ Кронекера, а скалярная функция λ – специфическая электропроводность тканей. Если обменом электрическими товарами с окружающей средой можно пренебречь, то на S_0 естественно положить $\frac{\partial U_j}{\partial n} = 0$. Это означает, что редукция однозначна. В частности, очаги электрической деятельности головного мозга можно изолировать однозначно, несмотря на их взаимное влияние.

Иногда U может быть определено во всем пространстве. Сформулируем теорему для этого случая.

Теорема 5. Пусть S_0 – шар радиуса R_0 и пусть при $R_0 \to \infty$ первые производные a_{ik} и e_i непрерывны в $G_0 + S_0$ и $c \leq 0$.

Если при $R_0 \to \infty$ существует функция Грина и если U и редукционные компоненты стремятся к нулю, тогда U редуцируемо однозначно.

Теоремы и формулы в этой работе могут быть полезны при выделении гравитационного поля данного тела, если оно дано вместе с гравитационными полями других тел, т.е. при решении обратной задачи потенциала[1,2,3,4]. Они могут быть использованы при выделении геофизических аномалий[1] и при изучении биэлектрических явлений.

Автор выражает большую благодарность И.Г.Петровскому за ряд ценных замечаний, сделанных при обсуждении этой работы.

Литература

1. И.П.Недялков. Известия Болг. АН сер. геофизическая т.1 (1960).
2. В.К.Иванов. Известия АН СССР, сер.матем. 1956, 20, № 6,
3. П.С.Новиков, Докл. АН СССР, 18, 165-168, (1938).
4. Л.Н.Сретенский. Докл. АН СССР, 99, 21, т.22 (1954).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 января 1962 года.