ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р. Денчев

Р-901

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ, СВЯЗАННЫХ С ОДНИМ УРАВНЕНИЕМ ТИПА УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ЛОУ

Дубна 1962 год

Р. Денчев

Р-901

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ, СВЯЗАННЫХ С ОДНИМ УРАВНЕНИЕМ ТИПА УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ЛОУ

Рассмотрим следующую систему из одного линейного сингулярного интегрального уравнения и одного алгебраического нелинейного уравнения

$$u(s) = A - \frac{a}{s_0 - s} + 1/\pi \int_{-1}^{1} \frac{v(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma \qquad (1)$$

$$v(s) = u^2(s) + v^2(s), \qquad (2)$$

где $u(s)$, $v(s)$-неизвестные функции, определенные в интервале $(-1,1)$ и суммируемые со степенью p, $p>1$; s_0, a, A-заданные вещественные константы $a \le 0$, $|s_0| < 1$.

Как показано в /1/, все решения этой системы задаются формулами

$$u(s) = -\frac{L(s)}{1 + L^2(s)}, \quad v(s) = \frac{1}{1 + L^2(s)}, \qquad (3)$$

где

$$L(s) = \nu + 1/\pi \ ln \frac{1-s}{1+s} + \sum_k R_k \frac{1 + c_k s}{c_k - s} + \int_{-1}^{1} \frac{1+\sigma s}{\sigma - s} \frac{d\theta(\sigma)}{1+\sigma^2}, \qquad (4)$$

$\theta(\sigma)$ - неубывающая сингулярная функция[x)], ν, R_k, c_k - вещественные константы, удовлетворяющие соотношениям

$$R_k \ge 0, \quad |c_k| \le 1 \qquad (5)$$

$$1/A + \nu - \sum_k R_k c_k - \int_{-1}^{1} \frac{\sigma\, d\,\theta(\sigma)}{1+\sigma^2} = 0 \qquad (6)$$

$$\nu + 1/\pi \ ln \left| \frac{1-s_0}{1+s_0} \right| + \sum_k R_k \frac{1 + c_k s_0}{c_k - s_0} + \int_{-1}^{1} \frac{1+\sigma s_0}{\sigma - s_0} \frac{d\,\theta(\sigma)}{1+\sigma^2} = 0 \qquad (7)$$

$$1/a + 2/\pi \frac{1}{s_0^2 - 1} + \sum_k R_k \frac{1+c_k^2}{(c_k - s_0)^2} + \int_{-1}^{1} \frac{d\theta(\sigma)}{(\sigma - s_0)^2} = 0. \qquad (8)$$

---

x) Сингулярной функцией называется (см. /2/) отличная от постоянной непрерывная функция с конечным изменением, производная которой почти везде равна нулю.

Рассмотрим случай, когда $\theta(\sigma)\equiv 0$ и имеется только конечное число точек c_k. Тогда $u(s)$ и $v(s)$ – непрерывные и представляются формулами (3), в которых

$$L(s)=\nu+1/\pi\ \ln\frac{1-s}{1+s}+\sum_{k=1}^{N}R_k\frac{1+c_k s}{c_k-s}. \tag{9}$$

Очевидно,

$$u(c_k)=v(c_k)=0.$$

Кроме того, как легко видеть из /9/, если c_k и c_{k+1} – две последовательные точки, то

$$L(c_k+0)=-\infty,\quad L(c_{k+1}-0)=+\infty,$$

и так как $L(s)$ непрерывна в интервале (c_k, c_{k+1}), то в этом интервале существует хотя бы одна точка, в которой $L(s)$ обращается в нуль. В этой точке $u(s)$ обращается тоже в нуль, а $v(s)$ – в единицу, как видно из (3).

Разрешим соотношение (2) относительно $v(s)$

$$v(s)=\tfrac{1}{2}+\mu(s)\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2(s)}, \tag{10}$$

где $\mu(s)$ – функция, принимающая только значения ± 1. Из (2) видно, что $|u(s)|\leq \frac{1}{2}$ и $0\leq v(s)\leq 1$. Очевидно, $\mu(s)=-1$ в точках, где $v(s)=0$ и $\mu(s)=+1$ там, где $v(s)=1$. Так как $v(s)$ обращается в нуль в точках c_k и в единицу – между двумя последовательными точками c_k, то если есть хотя бы две точки c_k, $\mu(s)$ не является константой. При этом так как $v(s)$ непрерывна, $\mu(s)$ может менять свои значения в тех точках, где величина под корнем обращается в нуль, т.е. где $v(s)=\frac{1}{2}$. Между двумя соседними точками c_k и c_{k+1} есть хотя бы две точки, в которых $\mu(s)$ меняет свое значение. Так как $v(-1)=v(1)=0$, то $\mu(-1)=\mu(1)=-1$ и, следовательно, $\mu(s)$ может менять свои значения только четное число раз.

Разрешим (2) относительно $u(s)$

$$u(s)=\eta(s)\sqrt{v(s)-v^2(s)},\quad \eta(s)=\pm 1. \tag{11}$$

Так как

$$u'(c_k)=1/r_k>0,$$

то в точках c_k $\eta(s)$ меняет свое значение, а также хотя бы в одной точке между двумя последовательными c_k. Нетрудно видеть, что

$$u(-1+\epsilon)<0,\quad u(1-\epsilon)>0,$$

так что $\eta(s)$ должно менять значение нечетное число раз.

Можно поставить следующий вопрос: если задана $\mu(s)$ (или $\eta(s)$), т.е. заданы точки, в которых меняется знак в (10)(соответственно (11)), то можно ли найти решение $u(s), v(s)$, удовлетворяющее (10) (соответственно (11)) и будет ли такое решение единственным.

В связи с этим вопросом можно сделать следующее замечание. Если заданная функция $\mu(s)$ меняет свое значение в $2n$ точках, то в формуле (9) должно быть $N \le n+1$, так как, если $N > n+1$, то имеется хотя бы $n+2$ точек c_k и $n+1$ интервалов между ними и соответствующее $\mu(s)$ должно менять значение хотя бы $2n+2$ раза. Если в (9) возьмем $N=n+1$, то имеется $2n+3$ свободных параметров c_k, r_k и ν. Они должны удовлетворять как раз $2n+3$ соотношениям – трем соотношениям (6)–(8) и $2n$ соотношениям, выражающим условие, что $\mu(s)$ меняет свое значение в $2n$ заданных точках, т.е. $v(s)=\frac{1}{2}$ в этих точках. Это делает вероятным утвердительный ответ на поставленный вопрос. Однако, остается неясным, будет ли полученная система из $2n+3$ уравнения иметь решение (относительно c_k, r_k, ν), удовлетворяющее условиям (5). Кроме того, если даже существует единственное решение этой системы, то нельзя ли те же самые $u(s)$ и $v(s)$ получить из формулы (9) и при некотором $N<n+1$, так как заранее не ясно, что между двумя последовательными точками c_k $\mu(s)$ меняет значение только два раза – может быть она меняется четыре или более раз.

Аналогичные замечания можно сделать относительно $\eta(s)$ и формулы (11).

Если высказанная гипотеза верна, т.е. если при любой заданной $\mu(s)$ существует единственное решение $u(s)$, $v(s)$ удовлетворяющее (10), то это означает, что имеется единственное решение уравнения

$$u(s)=A-\frac{a}{s-s_0}+1/\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma-s}\left(\tfrac{1}{2}+\mu(\sigma)\sqrt{\tfrac{1}{4}-u^2(\sigma)}\right)d\sigma, \tag{12}$$

полученное из (1)–(2) исключением $v(s)$.

То же самое можно сказать и об уравнении

$$\eta(s)\sqrt{v(s)-v^2(s)}=A-\frac{a}{s-s_0}+1/\pi\int_{-1}^{1}\frac{v(\sigma)}{\sigma-s}\,d\sigma \tag{13}$$

полученном исключением $u(s)$. Обращая интеграл Коши в (13), получаем уравнение

$$v(s) = -\frac{\sqrt{1-s^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left(\eta(\sigma)\sqrt{v(\sigma)-v^2(\sigma)} - A + \frac{a}{s_0-\sigma} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - s} . \tag{14}$$

Обозначая

$$F(s) = \frac{\sqrt{1-s^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{A - \frac{a}{s_0-\sigma}}{\sqrt{1-\sigma^2}} \frac{d\sigma}{\sigma - s} =$$

$$= \left(A - \frac{a}{s_0-\sigma} \right) 1/\pi \ln \frac{(1-s\sqrt{1-s^2})(1+s+\sqrt{1-s^2})}{(1-s+\sqrt{1-s^2})(1+s-\sqrt{1-s^2})} - \frac{\sqrt{1-s^2}}{s_0-s} \frac{a}{\sqrt{s_0^2-q}} \operatorname{sign} s_0,$$

можно (14) записать следующим образом:

$$v(s) = F(s) - \frac{\sqrt{1-s^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\eta(\sigma)\sqrt{v(\sigma)-v^2(\sigma)}}{\sqrt{1-\sigma^2}} \frac{d\sigma}{\sigma - s} . \tag{15}$$

Таким образом в уравнении (12)(соответственно (15)) выделено, по-видимому, единственное решение, и если у нас есть некоторый метод для численного решения этого уравнения, то тем самым мы сможем найти любое решение нашей задачи вида (3) - (9), не используя явный вид решения. Этот метод можно было бы использовать, например, в случае системы уравнений типа уравнений для $\pi - N$ и $\pi - \pi$ рассеяния, где уже нельзя найти явный вид решений. Кроме того, если мы могли бы непосредственно исследовать вопрос о существовании и единственности решения уравнения (12), то тем самым мы исследовали бы вопрос о множестве решений нашей задачи и этот метод можно было бы обобщить и на системы вышеупомянутого типа.

Исследуем оператор в правой части (12). Пусть $\mu(s)$ меняется в точках $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}$. Прежде всего нужно подходящим образом выбрать пространство, в котором будем рассматривать этот оператор. Функция под интегралом непрерывна только для функций $u(s)$, обращающихся в $\pm 1/2$ в точках, где $\mu(s)$ меняется. Однако, такие функции не переводятся этим оператором в функции, обладающие тем же свойством. Поэтому нужно рассматривать и такие функции $u(s)$, для которых функция под интегралом разрывна. Но такие функции переводятся в функции, неограниченные в точках ω_i, с интегрируемыми особенностями. Поэтому введем следующее пространство. Обозначим

$$\rho(s)=\prod_{k=0}^{N}|s-\omega_k|^{a_k},\quad 0\le a_k<1$$

$$\omega_0=-1,\quad \omega_N=1\ .$$

Рассмотрим пространство $L_p(\rho(s))$, состоящее из таких функций $u(s)$, принимающих комплексные значения, что произведение $\rho(s)\,|u(s)|^p$ суммируемо в интервале $(-1,1)$. Введем в $L_p(\rho(s))$ норму

$$\|u\|=\Big[\int_{-1}^{1}\rho(s)\,|u(s)|^p\,ds\Big]^{1/p}.$$

Рассмотрим оператор

$$Ku=A-\frac{a}{s_0-s}+1/\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma-s}\,[\,1/2+\mu(\sigma)\sqrt{1/4-u^2(\sigma)}\,]\,d\sigma\ .$$

Берем ту ветвь квадратного корня, значения которой находятся в верхней полуплоскости.

Покажем, что оператор K не есть оператор сжатия в пространстве $L_p(\rho(s))$.

Пусть $u_1(\sigma)$ и $u_2(\sigma)$ – функции, совпадающие везде на интервале $(-1,1)$ кроме некоторого интервала $(\xi,\eta)\subset(\omega_i,\omega_{i+1})$. При этом на интервале $(\xi_1,\eta_1)\subset(\xi,\eta)$ $u_1(\sigma)=1/2$, а $u_2(\sigma)=1/2-h$, где $0<h<1/2$.

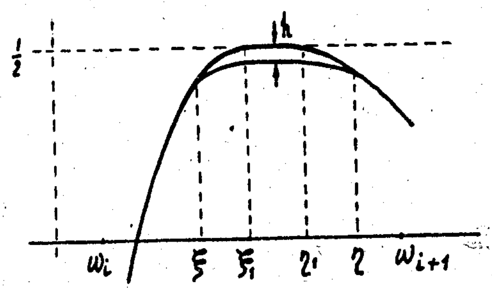

Рис. 1.

Оценим функцию

$$\psi(s)=|\,Ku_1-Ku_2\,|$$

$$\psi(s)=1/\pi\,\Big|\int_{-1}^{1}\frac{\mu(\sigma)}{\sigma-s}\,[\sqrt{1/4-u_1^2(\sigma)}\;-\sqrt{1/4-u_2^2(\sigma)}\,]\,d\sigma$$

$$= 1/\pi \left| \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{1}{\sigma - s} \frac{u_1(\sigma) + u_2(\sigma)}{\sqrt{1/4 - u_1^2(\sigma)} + \sqrt{1/4 - u_2^2(\sigma)}} (u_2(\sigma) - u_1(\sigma))\, d\sigma \right|,$$

так как $u_1 = u_2$ вне (ξ, η), а в (ξ, η) $\mu(\sigma) = const$.

Пусть s — точка вне интервала (ξ, η), например, $s < \xi$. Тогда

$$\psi(s) = 1/\pi \int\limits_{\xi}^{\eta} \frac{1}{\sigma - s} \frac{u_1(\sigma) + u_2(\sigma)}{\sqrt{1/4 - u_1^2(\sigma)} + \sqrt{1/4 - u_2^2(\sigma)}} (u_1(\sigma) - u_2(\sigma))\, d\sigma \geq$$

$$\geq 1/\pi \int\limits_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{1}{\sigma - s} \frac{u_1(\sigma) + u_2(\sigma)}{\sqrt{1/4 - u_1^2(\sigma)} + \sqrt{1/4 - u_2^2(\sigma)}} (u_1(\sigma) - u_2(\sigma))\, d\sigma$$

$$= 1/\pi \int\limits_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{1}{\sigma - s} \frac{1 - h}{\sqrt{h}\,\sqrt{1 - h}}\, h\, d\sigma = 1/\pi \sqrt{h}\sqrt{1-h} \quad \ln \left| \frac{\eta_1 - s}{\xi_1 - s} \right|.$$

Возьмем интервал Δ вне (ξ, η), например, влево от него. Тогда

$$\|Ku_1 - Ku_2\| = [\int\limits_{-1}^{1} \rho(s)\, (\psi(s))^p\, ds\,]^{1/p} \geq [\int\limits_{\Delta} \rho(s)\, (\psi(s))^p\, ds\,]^{1/p} \tag{16}$$

$$> \sqrt{h}\,\sqrt{1-h}\ [\int\limits_{\Delta} \rho(s)\, (1/\pi\ \ln \left| \frac{\eta_1 - s}{\xi_1 - s} \right|)^p\ ]^{1/p} \geq C_1 \sqrt{h},$$

где константа C_1 от h не зависит.

С другой стороны,

$$\| u_1 - u_2 \| = [\int\limits_{-1}^{1} \rho(s)\, | u_1(s) - u_2(s) |^p\, ds\,]^{1/p} < h \int\limits_{\xi_1}^{\eta_1} \rho(s)\, ds = C_2 h. \tag{17}$$

Из (16) и (17) получаем

$$\frac{||Ku_1 - Ku_2||}{||u_1 - u_2||} > \frac{C}{\sqrt{h}},$$

где C не зависит от h. Отсюда видно, что при достаточно маленьком h отношение $\frac{||Ku_1 - Ku_2||}{||u_1 - u_2||}$ может стать произвольно большим и, следовательно, оператор λK не является оператором сжатия ни при каком λ.

Пусть $\mu(s) = const$. В этом случае имеются только точки $\omega_0 = -1$ и $\omega_1 = 1$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ вещественных функций соответствующего пространства $L_p(\rho(s))$, удовлетворяющих условию

$$|u(s)| < \ell, \qquad \ell < 1/2.$$

Покажем, что над этим множеством оператор λK является оператором сжатия при достаточно малом λ. Действительно, пусть $u_1, u_2 \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$\psi(s) = |\lambda K u_1 - \lambda K u_2| = \lambda/\pi \left| \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sigma - s} \frac{u_1(\sigma) + u_2(\sigma)}{\sqrt{1/4 - u_1^2} + \sqrt{1/4 - u_2^2}} (u_2(\sigma) - u_1(\sigma))\, d\sigma \right|$$

$$||\lambda K u_1 - \lambda K u_2|| = \int_{-1}^{1} \rho(s)\,(\psi(s))^p\, ds$$

$$\leq \lambda M \int_{-1}^{1} \rho(s) \left| \frac{u_1(s) + u_2(s)}{\sqrt{1/4 - u_1^2(s)} + \sqrt{1/4 - u_2^2(s)}} (u_2(s) - u_1(s)) \right|^p ds.$$

Последнее неравенство написано на основании ограниченности сингулярного интегрального оператора в $L_p(\rho(s))$ (см. /3/). Из (18) получаем

$$||\lambda K u_1 - \lambda K u_2|| < \lambda M \frac{\ell}{\sqrt{1/4 - \ell^2}} \left[\int_{-1}^{1} \rho(s)\, |u_2(s) - u_1(s)|^p ds \right]^{1/p} =$$

$$= \lambda M \frac{\ell}{\sqrt{1/4 - \ell^2}} ||u_1 - u_2||.$$

Следовательно, если

$$\lambda < \frac{\sqrt{1/4 - \ell^2}}{\ell M},$$

то λK является оператором сжатия[x)].

Можно в уравнения (1)-(2) ввести параметр (фазу) $\delta(s)$ следующим образом:

$$u(s) = \cos\delta(s)\ \sin\delta(s)\,,$$

$$v(s) = \sin^2\delta(s)\,.$$

Тогда (1)-(2) можно заменить уравнением

$$\tfrac{1}{2}\sin 2\delta(s) = A - \frac{a}{s_0 - s} + 1/\pi \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2\delta(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma\,. \qquad (19)$$

Это уравнение можно записать также в виде

$$\delta(s) = \tfrac{1}{2}\arcsin 2\left(A - \frac{a}{s_0 - s} + 1/\pi \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2\delta(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma\right).$$

В точках, где $\delta(s)$ принимает значения $K\frac{\pi}{4}$, переходим из одной ветви $\arcsin$ в другую. При этом, подсчитывая число параметров в формулах, можно предположить, что эти точки могут быть произвольно заданы.

Таким образом, многозначность решения в рассмотренных уравнениях, получается из-за того, что в разных интервалах для s берутся разные ветви функций, которые в них входят. Это явление может иметь место и в других нелинейных уравнениях.

Литература

1. Р.Денчев. Об одном нелинейном сингулярном интегральном уравнении типа уравнений рассеяния Лоу, препринт ОИЯИ, Дубна, 1961, Р-890.
2. И.П.Натансон. Теория функции вещественной переменной, Москва, 1957. Физматгиз.
3. Б.В.Хведелидзе. Труды Тбилисского математического института, том 23, 1956.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 января 1962 года.

---

x) По-видимому, эти результаты связаны с некоторыми явлениями, которые имели место при численном решении уравнения в Москве и Новосибирске. При решении уравнения методом итераций, последовательные приближения всегда сходились к так называемому адиабатическому решению, которое соответствует $\mu(s) = const.$