О Б Ъ Е Д И Н Е Н Н Ы Й   И Н С Т И Т У Т   Я Д Е Р Н Ы Х
И С С Л Е Д О В А Н И Й

Лаборатория высоких энергий

Реакции с поляризованными частицами x/

М.Широков.

Д е к а б р ь 1956 г.

x/ Статья направлена в ЖЭТФ.

Реакции с поляризованными частицами.

Получены статистические тензоры частиц, образующихся в реакциях типа $a+b \to c+d$ или $a \to c+d$ в наиболее общем случае, когда падающий пучок и частицы мишени находятся в определенных спиновых состояниях. В основе работы лежит использование диагональности S - матрицы таких реакций по полной энергии, полному моменту количества движения и его проекции и последовательное применение теории преобразований Дирака. Выводятся новые "правила отбора", дополняющие общие правила Симона и Велтона [1,2]. Первое может рассматриваться как обобщение правила, согласно которому вектор поляризации частиц-продуктов реакции перпендикулярен плоскости реакции, если падающий пучок и мишень неполяризованы. Второе гласит, что статистические тензоры частицы-продукта реакции, определенные относительно направления ее импульса либо чисто действительные, либо чисто мнимые, если падающий пучок и мишень неполяризованы. В качестве частного случая рассмотрен распад нестабильной частицы на частицы со спинами 1/2 и 0 и показано, что поляризация и угловое распределение этих частиц зависят только от спина и спинового состояния распадающейся частицы.

Общая теория ядерных реакций уже получила широкое развитие в работах[1,2]. В настоящей статье предлагается новый метод получения статистических тензоров /определение см. в приложении 1/ частиц-продуктов реакции. Кратко и в несколько другом виде он был изложен в[3] /близкий по идее метод см. в[4] /. Этот подход допускает релятивистское обобщение, а также непосредственное обобщение на случай ядерных реакций с более чем двумя частицами в конечном состоянии. Аналогично можно использовать диагональность S - матрицы по другим сохраняющимся физическим величинам для получения ряда общих свойств процессов в квантово-механических системах.

В этой статье широко используется формализм Дирака[5] /см. главы 1-1У, особенно § 17/.

§ 1. Рассматриваются реакции типа $a+b \to c+d$ и $a \to c+d$. a, b, c, d обозначают либо "элементарные" частицы, либо ядра со спинами i_a, i_b, i_c, i_d соответственно. Спин трактуется в приближении Паули и в этом смысле рассмотрение будет нерелятивистским /в частности, частицы с массой покоя равной нулю не рассматриваются/. Зная начальное состояние /до реакции/ системы и предполагая известными элементы S - матрицы в соответствующем представлении, можно получить волновую функцию конечного состояния:

1/

$$ {}_{\eta'}\Psi'_{\xi_0} = (\eta'|S|\xi)\,{}_{\xi}\Psi_{\xi_0} \qquad /1.1/ $$

Подразумевается суммирование или интегрирование по ξ . Индексы ξ и η обозначают полный набор величин, характеризующих состояние системы /род частиц и т.д. см. ниже полный набор для системы из двух частиц/. ${}_{\eta''}\Psi'_{\xi_0}$ есть амплитуда вероятности того, что в конечном состоянии величины η имеют значение η' , если вначале система находилась в ξ_0 - состоянии [5].

Однако начальное и конечное состояние следует описывать не волновыми функциями, а матрицами плотности, так как состояния системы до и после реакции образуют, вообще говоря, смешанный ансамбль [7, 13]. Например, неполяризованный пучок падающих на мишень частиц описывается ансамблем, в котором вероятности

---

x/ Соотношение /1.1/ обычно пишется в применении к реакциям типа $a+b \to c+d$. В этом случае $S=\hat{U}(\infty,-\infty)$, где оператор $\hat{U}(t,t_0)$, например, удовлетворяет уравнению Шредингера /в представлении взаимодействия/ $i\hbar\,\partial/\partial t\;\hat{U}(t,t_0)=\hat{H}_{вз}\cdot\hat{U}(t,t_0)$ [6]. Однако если частица a живет достаточно долго, чтобы можно было приближенно говорить об определенном /квазистационарном/ начальном состоянии /с определенной энергией и т.д./, то /1.1/ можно написать и для реакции $a \to c+d$, при этом $S=\hat{U}(\infty,0)$ /отсчет времени начинается с момента рождения нестабильной частицы/.

всех возможных ориентаций спина одинаковы. Матрицу плотности мы определяем так:

$$(\xi_1/\rho/\xi_2) = \sum_\alpha P_\alpha \, {}_{\xi_1}\psi_\alpha \cdot {}_{\xi_2}\psi_\alpha^* \qquad /1.2/$$

где P_α - веса отдельных чистых состояний $/\sum_\alpha P_\alpha = 1/$.

С помощью /1.1/ найдем, что матрица плотности конечного состояния равна:

$$(\eta_1'/\rho/\eta_2') = (\eta_1'/S/\xi_1)(\eta_2'/S/\xi_2)^*(\xi_1/\rho/\xi_2) = (\eta_1'/S\rho S^+/\eta_2') \qquad /1.3/$$

Диагональные элементы $(\eta'/\rho'/\eta')$ дают вероятность того, что после реакции система будет находиться в η' - состоянии, если начальное состояние характеризовалось матрицей плотности /1.2/.

В дальнейшем вместо S - матрицы мы будем пользоваться матрицей рассеяния $\hat{R} = \hat{S} - \hat{1}$, все элементы которой совпадают с элементами S - матрицы, за исключением переходов без изменения состояния [6].

Известно, что у изолированной системы полный момент количества движения J, его проекция M, полный импульс $\vec{P}$ и полная энергия E сохраняются. Выражением этого факта является диагональность S - /или R - / матрицы системы по этим величинам. Однако, вообще говоря, $\mathcal{J}, M, \vec{P}$ и E не могут входить в один и тот же полный набор. Поэтому в общем случае надо, записав диагональность элементов R - матрицы по $\mathcal{J}, M, E$ в представлении набора, включающего $\mathcal{J}, M, E$, выразить затем через эти элементы матричные элементы R - матрицы в представлении другого полного набора, включающего $\vec{P}$ и записать диагональность по $\vec{P}$. Практическое выполнение этих операций потребовало бы довольно громоздких унитарных преобразований.

Существует система координат, однако, где мы можем использовать диагональность R - матрицы сразу по $\mathcal{J}, M, E$ и $\vec{P}$. А именно, если мы выбрали для описания системы двух частиц систему координат, где $P^2=0$, то в набор, включающий $\mathcal{J}, M$ и E, кроме них могут входить: спины обеих частиц i_c и i_d, суммарный спин S, суммарный орбитальный момент частиц относительно центра инерции ℓ [3], орбитальный момент всей системы относительно начала координат L /см. ниже/, суммарный орбитальный момент $\mathcal{L}(\hat{\mathcal{L}}=\hat{L}+\hat{\ell})$, модуль

3/ В системе центра инерции $\hat{\ell}=[(\hat{r}_c-\hat{R}_c)\cdot\hat{p}_c]+[(\hat{r}_d-\hat{R}_c)\cdot\hat{p}_d]=$ $=[(\hat{r}_c-\hat{R}_c)\cdot\hat{p}_c]+[(\hat{r}_d-\hat{R}_c)(-\hat{p}_c)]=[(\hat{r}_c-\hat{r}_d)\cdot\hat{p}_c]$
Здесь $\hat{p}_c=-\hat{p}_d$ - операторы импульсов частиц c и d в системе центра инерции.

полного импульса системы P /равный нулю/ 3/. Так как оператор $\hat{L}$ можно представить как $[\hat{R}_c \cdot \hat{\vec{P}}]$, где R_c оператор центра инерции, то в тех состояниях, где $\vec{P}=0$ и $L=0$ /а мы и рассматриваем только такие состояния системы, где $|\vec{P}|=0$ и, следовательно, $\vec{P}=0$/.

Так как P^2 сохраняется, то $L=0$ всегда, и суммарный орбитальный момент системы равен ℓ. В представлении этого полного набора для реакции типа $a+b \to c+d$, например, имеем: $(i_c i_d s' \ell' L' P' J' M' E' \alpha' | R | i_a i_b s \ell L \mathcal{L} 0 J M E \alpha) =$

$$= (i_c i_d s' \ell' 0 \ell' \alpha' | R^{0JE} | i_a i_b s \ell 0 \ell \alpha) \delta(\vec{P}' - 0) \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta(E' - E) \qquad /1.4/$$

Верхними индексами обозначена зависимость диагональных элементов от P, J и E; от M, как можно показать, они не зависят. В дальнейшем не будут выписываться в соответствующих местах индексы спинов частиц i_c, i_d и т.д., а также индексы полного импульса и величин L и $\mathcal{L}$ ни в элементах R - матрицы, ни в

3/ Заметим, что в полный набор должны еще входить, вообще говоря, массы частиц. Для краткости они явно не выписываются. В полный набор может еще входить ряд переменных, например, внутренние четности обеих частиц. Все они обозначаются буквой α.

матрице плотности /другими словами не будет описываться движение системы как целого, т.е. тот факт, что она покоится в выбранной системе координат/.

В представлении полного набора S, ℓ, J, M, E, α /1.3/ при использовании /1.4/ принимает вид:

$$(S_1' \ell_1' J_1 M_1 E_1 \alpha_1' | \rho' | S_2' \ell_2' J_2 M_2 E_2 \alpha_2') =$$
$$= (S_1' \ell_1' \alpha_1' | R^{J_1 E_1} | S_1 \ell_1 \alpha_1)(S_2' \ell_2' \alpha_2' | R^{J_2 E_2} | S_2 \ell_2 \alpha_2)^* \cdot (S_1 \ell_1 J_1 M_1 E_1 \alpha_1 | \rho | S_2 \ell_2 J_2 M_2 E_2 \alpha_2) \qquad /1.5/$$

§ 2. Смысл /1.1/ или /1.3/ заключается в выделении неизвестных параметров, определяющих ψ' или ρ', в форме элементов S - матрицы. Законы сохранения уменьшают число этих параметров. Теперь надо установить, как это сказывается на описании углового распределения и спинового состояния продуктов c и d рассматриваемых реакций. Суть дальнейшего заключается в преобразованиях /главным образом унитарных/ от представления конечных и начальных состояний этих реакций в величинах S, ℓ, J, M, E, которые не измеряются непосредственно, в представление величин, измеряющихся в эксперименте.

Для характеристики конечного состояния нам нужны диагональные по $\vec{p}_c$ /импульс в системе центра инерции/

элементы матрицы плотности и статистические тензоры / c. тензоры/, описывающие спиновое состояние продуктов реакции /см. приложение I/. Обозначим символом $\rho'(\vec{p}_c; q_c\nu_c q_d\nu_d)$ совокупность этих величин. Заметим, что согласно /I.1/, /I.2/, /I.3/ индексы $\vec{p}_c$ могут рассматриваться и как параметры c. тензоров частиц c и d /как величин, пропорциональных средним значениям соответствующих спиновых операторов в ансамбле частиц с импульсом $\vec{p}_c$ /.

Начальное состояние в задаче типа $a+b \to c+d$ характеризуется определенным значением величины $\vec{p}_a$ и c. тензорами. Символическая запись: $\rho(\vec{p}_a; q_a\nu_a q_b\nu_b)(\vec{p}_a'|\vec{p}_a)(\vec{p}_a''|\vec{p}_a)$ /см. приложение П/.

В дальнейшем импульсы $\vec{p}$ будем задавать их модулями p и соответствующими единичными векторами $\vec{n}$ со сферическими углами ϑ и φ .

Итак, нам надо выразить $\rho(\vec{n}_c, p_c, \alpha'; q_c\nu_c q_d\nu_d)$ через элементы $(S_1'\ell_1'J_1'M_1'E_1'\alpha'|\rho'|S_2'\ell_2'J_2'M_2'E_2'\alpha')$ /см. /1.4/ / и $(S_1\ell_1J_1M_1E_1\alpha_1|\rho|S_2\ell_2J_2M_2E_2\alpha_2)$ через $\rho(\vec{n}_a, p_a; q_a\nu_a q_b\nu_b)(\vec{p}_a'|\vec{p}_a)(\vec{p}_a''|\vec{p}_a)$. Это выполняется путем последовательного перехода от одного представления к другому с помощью коэффициентов Клебша-Гордана $(j_1j_2m_1m_2|j_1j_2jm)$ или $C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}$ [8,9] и правильно нормированных /см. прилож. П/ функций преобразования $(\vartheta,\varphi,p|\ell\mu E)$.

$$\begin{aligned}
\rho'(\vec{n}_c,p_c,\alpha';q_c\nu_c\,q_d\nu_d) &= [(2i_c+1)(2i_d+1)]^{1/2}\times \\
&\times\sum_{m_c,m_c',m_d,m_d'}(-1)^{i_c-m_c'+i_d-m_d'}(i_c i_c m_c -m_c'|i_c i_c\, q_c\nu_c)(i_d i_d m_d -m_d'|i_d i_d\, q_d\nu_d)\times \\
&\times\sum (i_c i_d m_c m_d|i_c i_d S_1' m_1')(\vec{n}_c p_c|\ell_1'\mu_1' E_1')(S_1'\ell_1' m_1'\mu_1'|S_1'\ell_1' J_1' M_1')\times \\
&\times(S_1'\ell_1' J_1' M_1' E_1'\alpha'|\rho'|S_2'\ell_2' J_2' M_2' E_2'\alpha')\times \\
&\times(S_2'\ell_2' J_2' M_2'|S_2'\ell_2' m_2'\mu_2')(\ell_2'\mu_2' E_2'|\vec{n}_c p_c)(i_c i_d S_2' m_2'|i_c i_d m_c' m_d')
\end{aligned} \qquad /2.1/$$

$\sum$ означает суммирование или интегрирование /по E_1' и E_2' / по всем дважды встречающимся индексам. Вставим в /2.1/ выражение /П.2/ для $(\vartheta,\varphi,p|\ell\mu E)$ и воспользуемся формулой

$$Y_{\ell_1\mu_1}(\vec{n})Y_{\ell_2\mu_2}(\vec{n}) = \sum_{L,m_L}\left[\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2L+1)}\right]^{1/2} C^{L0}_{\ell_1 0\ell_2 0}\, C^{Lm_L}_{\ell_1\mu_1\ell_2\mu_2}\, Y_{Lm_L}(\vec{n}) \qquad /2.2/$$

Большинства сумм по магнитным квантовым числам в /2.1/ в силу свойства коэффициентов Клебша-Гордана фактически нет, однако их удобно сохранить для выполнения суммирования по этим индексам. Для этого воспользуемся следующей типовой формулой:

$$\sum_{m_1,m_2,\mu_1,\mu_2} C^{s_1\sigma_1}_{j_1m_1\ell_1\mu_1} C^{s_2\sigma_2}_{j_2m_2\ell_2\mu_2} C^{jm_j}_{j_1m_1j_2-m_2} C^{\ell m_\ell}_{\ell_1\mu_1\ell_2-\mu_2} =$$

$$=(-1)^{s_2-j_2-\ell_2}\left[(2s_1+1)(2s_2+1)(2j+1)(2\ell+1)\right]^{1/2}\times$$

$$\times\sum_{g,m_g} C^{gm_g}_{s_1\sigma_1s_2-\sigma_2} C^{gm_g}_{jm_j\ell m_\ell} X(j_1jj_2;s_1gs_2;\ell_1\ell\ell_2) \qquad /2.3/$$

/2.3/ может быть получено с помощью соотношений /1/, /18/ и /19/ в [9], а также из формулы /3/ в [10], коэффициенты X определены в [10] и [1]. С помощью /2.3/ сразу выполняется в /2.1/ сумма по m_c, m_c', m_d, m_d' от произведения первого, второго, третьего и последнего коэффициентов Клебша-Гордана /заметим, что $-m_c'-m_d'=-m_2'$ /. После этого в /2.1/ может быть взята сумма по $m_1', m_2', \mu_1', \mu_2'$ /опять сумма типа /2.3//и окончательно из /2.1/ получается

$$\rho'(\vec{n}_c,p_c,\alpha';q_c\nu_cq_d\nu_d) = N_1'N_2'(4\pi)^{-1/2}\left[(2i_c+1)(2i_d+1)\right]^{1/2}\times$$

$$\times\sum(\vec{n}_c|L'm_L')C^{J'M'}_{q'\nu'L'm_L'} C^{q'\nu'}_{q_c\nu_cq_d\nu_d} C^{L'0}_{\ell_1'0\ell_2'0}(-1)^{J_2'-M_2'} C^{J'M'}_{J_1'M_1'J_2'-M_2'}\times$$

$$\times\left[(2S_1'+1)(2S_2'+1)(2q_c+1)(2q_d+1)\right]^{1/2} X(i_0q_ci_c;S_1'q'S_2';i_dq_di_d)\times$$

$$\times\left[(2\ell_1'+1)(2\ell_2'+1)(2J_1'+1)(2J_2'+1)(2q'+1)\right]^{1/2} X(S_1'q'S_2';J_1'J'J_2';\ell_1'L'\ell_2')\times$$

$$\times\, i^{-\ell_1'-\ell_2'}(S_1'\ell_1'J_1'M_1'E_1'\alpha'|\rho'|S_2'\ell_2'J_2'M_2'E_2'\alpha') \qquad (2.4)$$

Сумма $\sum$ берется по $S_1', S_2', \ell_1', \ell_2'; \mathcal{J}_1', \mathcal{J}_2', q', L', \mathcal{J}'$ и по $\nu', m_L', M_1', M_2', M'$. $N' = 2\sqrt{2}\,\pi h[{}^{R}/\underline{V}]^{1/2} p_c^{-1} \cdot (p_c/E)$ /см. прилож. П/.

Формулы /2.1/ и /2.4/ записаны в системе координат центра инерции, направления осей z, y, x пока выбирались произвольно. Для потока частиц самым очевидным выделенным направлением в пространстве является направление этого потока $\vec{n}$. Введем c. тензоры $\rho'(\vec{n}_c, p_c, \alpha'; q_c\tau_c q_d\tau_d)$ с индексами τ, отнесенными к $\vec{n}_c$ как оси квантования. Их выражение через старые c. тензоры имеет вид[4/]:

$$\rho'(\vec{n}_c, p_c, \alpha'; q_c\tau_c q_d\tau_d) = \sum_{\nu_c, \nu_d} \mathcal{D}^{q_c}_{\tau_c\nu_c}(-\pi, \vartheta_c, \pi-\varphi_c) \times$$

$$\times\, \mathcal{D}^{q_d}_{\tau_d\nu_d}(-\pi, \vartheta_c, \pi-\varphi_c) \cdot \rho'(\vec{n}_c, p_c, \alpha'; q_c\nu_c q_d\nu_d) \qquad /2.5/$$

4/ Индексы ν /или τ / у c. тензоров являются „контравариантными" /индексы представления/. Поэтому $\rho(q\nu)$ преобразуются при трехмерных вращениях как $Y^*_{q\nu}(\theta,\phi) = (q\nu/\theta\phi)$. Формула /2.5/ получается просто комплексным сопряжением формулы преобразования сферических функций, которую мы записываем в виде:

$$Y_{qn}(\vec{n}') = \sum_m Y_{qm}(\vec{n})\mathcal{D}^q_{m,n}(g^{-1})$$

если преобразование единичного вектора при вращении g записывается как $\vec{n}' = \hat{g}\vec{n}$. Если вращение g трактуется как поворот системы координат /правой/, то его можно задать углами Эйлера φ /вращение вокруг оси z /, ϑ /вращение вокруг оси y' / и φ_2 /вокруг оси z' /. Все вращения по часовой стрелке.

$\pi-\varphi_c, \vartheta_c, -\pi$ — эйлеровские углы [4] поворота g_c осей zyx такого, чтобы ось z совпала с ортом $\vec{n}_c$, а ось y стала бы перпендикулярной к старому направлению оси z и к $\vec{n}_c$, причем поворот, обратный $g_c = \{-\pi, \vartheta_c, \pi-\varphi_c\}$ записывается как $g_c^{-1} = \{\varphi_c, \vartheta_c, 0\}$. Отметим, что сферические углы попрежнему отсчитываются от старых осей zyx, вводится только новая ось квантования для спиновых индексов.

Вставляя в /2.5/ вместо $\rho'(\vec{n}_c, p_c, \alpha'; q_c \nu_c q_d \nu_d)$ его выражение /2.4/, мы прежде всего можем выполнить суммирование по ν_c и ν_d:

$$\sum_{\nu_c, \nu_d} \mathcal{D}^{q_c}_{\tau_c \nu_c}(g)\, \mathcal{D}^{q_d}_{\tau_d, \nu_d}(g)\, C^{q'\nu'}_{q_c \nu_c q_d \nu_d} = \mathcal{D}^{q'}_{\tau_c+\tau_d, \nu'}(g)\, C^{q'\tau_c+\tau_d}_{q_c \tau_c q_d \tau_d} \qquad /2,6/$$

Введем обозначение $\tau' = \tau_c + \tau_d$. Пользуясь этой же формулой /2.6/[1], мы можем выполнить сумму по ν' и m_L' от $Y_{L'm_L'}(\vec{n}_c)\cdot \mathcal{D}^{q'}_{\tau',\nu'}(-\pi, \vartheta_c, \pi-\varphi_c)(q'L'\nu'm_L'/q'L'\mathcal{J}'M')$ если воспользуемся соотношением $Y_{\ell n}(\vartheta, \pi-\varphi) = [2\ell+1/4\pi]^{1/2} \mathcal{D}^{\ell}_{0,n}(\varphi_2, \vartheta, \varphi_1)$. Окончательный результат:

Подчеркнем, что обычно угол Эйлера ϑ определяется как вращение вокруг оси x'; но только при нашем определении написанная выше формула будет правильной, $\mathcal{D}^{\ell}_{m,n}(\varphi_2, \vartheta, \varphi_1) = \exp(-im\varphi_2)\, i^{n-m} P^{\ell}_{mn}(\cos\vartheta) \exp(-in\varphi_1)$ функции P^{ℓ}_{mn} вычислены в [1]. Там же см. определение сферических функций.

$$\rho'(\vec{n}_c, p_c, \alpha'; q_c\tau_c q_d\tau_d) = N_1' \cdot N_2'(4\pi)^{-1}\left[(2i_c+1)(2i_d+1)\right]^{1/2} \times$$
$$\times \sum \mathcal{D}^{J'}_{\tau', M'}(-\pi, \vartheta_c, \pi-\varphi_c) \cdot C^{q'\tau'}_{q_c\tau_c q_d\tau_d} (-1)^{q'+\tau'}(-1)^{J_2'-M_2'} \cdot C^{J'M'}_{J_1'M_1' J_2' -M_2'} \times$$
$$\times\left[(2q_c+1)(2q_d+1)\right]^{1/2} \cdot X(i_c q_c i_c; S_1' q' S_2'; i_d q_d i_d) \times \qquad /2.7/$$
$$\times G^*_{\tau'}(J_1' \ell_1' S_1'; J' q'; J_2' \ell_2' S_2')(S_1' \ell_1' J_1' M_1' E_1' \alpha' / \rho' / S_2' \ell_2' J_2' M_2' E_2' \alpha')$$

где коэффициент $G_{\tau'}$ определен в [2], формула /3.3/; сумма берется по $S_1', S_2', \ell_1', \ell_2', q', J_1', J_2', J'$ и по M_1', M_2', M' .

Аналогично получаются выражения $(S_1\ell_1 J_1 M_1 E_1 \alpha_1 / \rho / S_2 \ell_2 J_2 M_2 E_2 \alpha_2)$ через $\rho_{\alpha_1,\alpha_2}(\vec{n}_a, p_a; q_a\nu_a q_B\nu_B)$ или $\rho_{\alpha_1,\alpha_2}(\vec{n}_a, p_a; q_a\tau_a q_B\tau_B)$. Мы их назовем соответственно формулами /2.8/ и /2.9/. Отвлекаясь от замены обозначений, заметим, что соответствующие функции преобразования получаются просто комплексным сопряжением функций преобразования в /2.4/ и /2.7/ /т.е. комплексным сопряжением всех коэффициентов перед $(S_1' \ell_1' J_1' M_1' E_1' \alpha' / \rho' / S_2' \ell_2' J_2' M_2' E_2' \alpha')$ в /2.4/ и в /2.7/ и заменой $[(2i_c+1)(2i_d+1)]^{1/2}$ на $[(2i_a+1)(2i_B+1)]^{-1/2}$ /см. /$\underline{1}$.3/ и /$\underline{1}$.4/ /.

Объединение /2.4/, /1.5/ и /2.8/ дает первую конечную формулу /назовем ее формулой /2.10/ /: все спиновые индексы и сферические углы относятся к произвольно выбранной системе осей zyx. Поскольку

$J_1=J_1; J_2'=J_2; M_1'=M_1; M_2'=M_2$, то сумма по M_1 и M_2 легко выполняется: $\sum_{M_1M_2}(J_1J_2M_1-M_2|J_1J_2J'M')(J_1J_2M_1-M_2|J_1J_2JM)=\delta_{J'J}\delta_{M'M}$ и поэтому также и $J'=J, M'=M$. Кроме того, $(p_c|E_1)(E_1|p_a)=$ $=(p_c|E_2)(E_2|p_a)=(p_c;p_a)$, где символ $(p_c;p_a)$ выражает закон сохранения энергии в импульсном представлении. Все преобразования этим исчерпываются, и формулу /2.10/ легко написать в окончательном виде, но она очень громоздка.

Объединение /2.7/, /1.5/ и /2.9/ дает вторую конечную формулу - /2.11/. Если в формуле /8/ в [3] заменить $\lambda_a^2/4$ на нормировочный множитель $N/(4\pi)^2$ /см. приложение П/ и $\mathcal{D}^J_{x,x'}(\varphi_\lambda,\vartheta_\lambda,0)$ на

$$\sum_M \mathcal{D}^J_{\tau'M}(-\pi,\vartheta_c,\pi-\varphi_c)\,\mathcal{D}^{J*}_{\tau M}(-\pi,\vartheta_a,\pi-\varphi_a)=\mathcal{D}^J_{\tau',\tau}(g_c g_a^{-1}) \qquad /2.12/$$

/это диктуется изменением определения c. тензоров: ср. формулы /5/ в [3] и /П.3/ /, то объединение формул /7/, /8/ и /9/ в [3] и будет формулой /2.11/.

Из /2.12/, как можно показать, следует, что c. тензоры конечного состояния зависят в сущности от параметров вращения $g_c g_a^{-1}$ системы осей $z_a y_a x_a$, выделяемых начальным состоянием /ось $z_a // \vec{n_a}$, направление оси y_a может задаваться спиновым состоянием; например, она может быть направлена по компоненте вектора поляризации, перпендикулярной $\vec{n_a}$ / к системе осей $z_c y_c x_c$ /ось $z_c // \vec{n_c}$, ось $y_c // [\vec{n_a}\times\vec{n_c}]$ /. Таким образом, все величины в /2.11/ могут быть определены относительно нескольких физических направлений реакции $a+b \to c+d$ так что для /2.11/ можно и не вводить какой-либо вспомогательной системы координат. В обычно принимаемой системе координат, совпадающей с системой осей $z_a y_a x_a$ $g_c g_a^{-1} = \{-\pi, \vartheta, \pi-\varphi\}$, где ϑ, φ - сферические углы орта $\vec{n}_c$ в такой системе координат.

Если спиновое состояние падающего пучка a и частиц мишени b полностью неполяризовано или обладает осевой симметрией $(\rho(q_a \tau_a q_b \tau_b) = \rho(q_a 0 q_b 0) \cdot \delta_{\tau_a 0} \cdot \delta_{\tau_b 0})$ то от суммы по τ в /2.11/ остается только $\mathcal{D}^{\mathcal{J}}_{\tau' 0}(-\pi, \vartheta, \pi-\varphi) = P^{\mathcal{J}}_{\tau' 0}(\cos\vartheta)$/ и c. тензоры конечного состояния /в том числе и угловое распределение $\rho'(\vec{n}_c, p_c, \alpha'; 0,0,0,0)$/ не зависят от φ. Это естественно, так как в этом случае выбор оси y_a совершенно произволен, а от такого выбора физически ничего не может зависеть.

Процедурой, аналогичной изложенной для формулы /2.11/, может быть получена общая формула для реакции типа $a \to c+d$:

$$\rho'(\vec{n}_c, p_c, \alpha'; q_c \tau_c q_d \tau_d) = \mathcal{N}_0^2 (4\pi)^{-1} [(2i_c+1)(2i_d+1)]^{1/2} (2S+1)^{-1/2} \times$$
$$\times \sum (-1)^{q'+\tau'} C^{q'\tau'}_{q_c \tau_c q_d \tau_d} [(2q_c+1)(2q_d+1)]^{1/2} \cdot X(i_c q_c i_c; S_1 q S_2; i_d q_d i_d) \times$$
$$\times G_{\tau'}(S l_1 S_1; q \quad q'; S l_2 S_2') \cdot (S_1 l_1 \alpha' | R^{SE} | \alpha_1) \cdot (S_2 l_2 \alpha' | R^{SE} | \alpha_2)^* \times \qquad /2.13/$$
$$\times \mathcal{D}^{q}_{\tau' V}(-\pi, \vartheta_c, \pi-\varphi_c) \cdot \rho_{\alpha_1 \alpha_2}(qV)$$

Сумма берется по $q', \tau', S_1', S_2', \ell_1', \ell_2', q, V$. $N_0 = 2\pi h [R/V]^{1/2} p_c^{-1} (p_c/E)$. $\rho(q\, V)$ - c. тензоры частицы a , S - ее спин, E - ее полная энергия.

Символ (p_c/E) равен единице, если p_c есть корень уравнения $\sqrt{p_c^2 c^2 + \mathcal{H}_c^2 c^4} + \sqrt{p_c^2 c^2 + \mathcal{H}_d^2 c^4} = E = \mathcal{H}_a \cdot c^2$ и нулю, если p_c этому уравнению не удовлетворяет /см. приложение П/.

Разберем случай тождественности частиц a и b / и/или c и d /. Пусть переменными полного набора ξ_1 / и ξ_2 / в определении матрицы плотности /1.2/ являются импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ частиц и их проекции спина m_1 и m_2 . Тогда необходимо, чтобы

$$(\xi_1|\rho|\vec{p}_1, \vec{p}_2, m_1, m_2) = (-1)^{2\ell} (\xi_1|\rho|\vec{p}_2, \vec{p}_1, m_2, m_1) \qquad /2.14/$$

т.е. элементы матрицы плотности с фиксированным ξ_1 должны или менять знак, если тождественные частицы имеют полуцелый спин, или совсем не меняться для частиц Бозе, в зависимости от того, приписываем ли мы "первой" частице a импульс $\vec{p}_1$ и проекцию спина m_1, а "второй" - импульс $\vec{p}_2$ и проекцию m_2, или приписываем "первой" частице $\vec{p}_2$ и m_2 , а "второй" $\vec{p}_1, m_1$. То же самое и независимо должно иметь место по индексам ξ_1 при фиксированных ξ_2 . Введя вместо $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ полный импульс $\vec{P}$ и импульс в системе центра инерции $\vec{p}$

/2.14/ можно переписать в виде: $(\xi_1|\rho|\vec{P},\vec{p},m_1m_2)=$
$=(-1)^{2i}(\xi_1|\rho|\vec{P},-\vec{p};m_2m_1)$. Учитывая, что $(\xi_1|\rho|-\vec{p},i,i,m_2m_1)=$
$=(\xi_1|\rho|\ell_\mu iism)(\ell_\mu p|\pi-\vartheta,\varphi+\pi,p)(iism|iim_2m_1)=$
$(\xi_1|\rho|\ell_\mu p iism)(-1)^\ell(\ell_\mu p|\vartheta,\varphi,p)(-1)^{s-2i}(iism|iim_1m_2)$
/индекс $\vec{P}$ опущен/, получаем, что симметризованный по правым индексам элемент матрицы плотности /удовлетворяющий /2.14/ имеет вид:

$$(\xi_1|\rho|\vec{p},m_1,m)_{симм}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[(\xi_1|\rho|\vec{p},m_1,m_2)+(-1)^{2i}(\xi_1|\rho|-\vec{p},m_2,m_1)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1|\rho|\ell_\mu psm)\left[1+(-1)^{\ell+s}\right](\ell_\mu p|\vartheta,\varphi,p)(iism|iim_1m_2) \qquad /2.15/$$

Поэтому, если частицы a и b тождественные, то в формулах /2.10/, /2.11/ надо помимо приравнивания соответствующих индексов / $i_a=i_b=i$ и т.д./ под знак суммы вставить еще множитель $\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{\ell_1+s_1}\right]\left[1+(-1)^{\ell_2+s_2}\right]$
Аналогичный множитель /со штрихами над ℓ и S / вставляется в /2.4/, /2,7/, /2.11/ и т.д., если c и d тождественные.

§ 3. Конечное состояние реакции типа $a+b \to c+d$ описывается, вообще говоря, $(2i_c+1)+(2i_d+1)$ c. тензорами /см. приложение 1/. Однако оказывается, что удачный выбор оси квантования в случае полностью неполяризованного начального состояния сильно уменьшит число c. тензоров конечного состояния, для вычисления которых необходимо знать матричные элементы /1.4/.

Обычно ось z системы координат, в которой записывается формула типа /2.10/ направляют по $\vec{n}_a$. Направим ее перпендикулярно плоскости реакции, т.е. по вектору $[\vec{n}_a \times \vec{n}_c]$. Т.е. для каждого случая реакции выбирается своя ось z. Ось X при этом направим по $\vec{n}_a$, так что направление падающего пучка всегда будет описываться одинаково: $\vartheta_a = \pi/2,\ \varphi_a = 0$ 5/. Угол φ_c при этом является углом между направлением импульса $\vec{p}_c$ и направлением падающего пучка. Для дальнейшего нам нужны следующие сомножители в общем члене сумм $\sum$ формулы /2.10/ в выбранной системе координат:

$$C^{JM}_{q'v'L'm'_L} \cdot C^{JM}_{qvLm_L} \cdot C^{L'0}_{\ell'_1 0 \ell'_2 0} \cdot C^{L0}_{\ell_1 0 \ell_2 0} \cdot Y_{L'm'_L}(\pi/2, \varphi_c) \cdot Y^*_{L,m_L}(\pi/2, 0) \qquad /3.1/$$

5/ Однако c. тензоры спинового состояния пучка и мишени, вообще говоря будут разными для разных осей z. Их можно выражать через c. тензоры, отнесенные, например, к $\vec{n}_a$, как оси квантования, по формулам § 2 /типа /2.5/ /.

Из свойств коэффициентов $(\ell_1'\ell_2'00|\ell_1'\ell_2'L'0)$ и $(\ell_1\ell_200|\ell_1\ell_2L0)$ и из закона сохранения пространственной четности системы следует, что $\ell_1'+\ell_2'+L'$; $\ell_1+\ell_2+L$ и $\ell_1'+\ell_2'+\ell_1+\ell_2$ соответственно должны быть четными числами. Поэтому и $L'+L$ четно. Этот факт является некоторым правилом отбора, не зависящим от выбора системы координат.

Функции $Y_{\ell\mu}(\pi/2, \varphi)$ в силу свойств присоединенных полиномов Лежандра первого рода не равны нулю только при $\ell+\mu$ четных. Поэтому в /2.10/ не равны нулю только члены с четными $L'+m_L'$, $L+m_L$ и, следовательно, четными $L'+L+m_L+m_L'$, и, наконец, четными m_L+m_L'. По свойствам первых двух коэффициентов Клебша-Гордана в /3.1/ имеем $\nu'+m_L'=\nu+m_L$, откуда $\nu'-\nu=m_L-m_L'$. Так как ν', ν, m_L и m_L' – целые числа, то полученное правило отбора можно выразить так: "$\nu'+\nu$ должно быть четным числом, если ось квантования выбрана перпендикулярной к плоскости реакции. В важном частном случае полностью неполяризованных падающего пучка и мишени /во всех системах координат все $\rho(\vec{n}_a, p_a; q_a \nu_a q_b \nu_b)$ равны нулю, кроме $\rho(\vec{n}_a, p_a; 0,0,0,0)$ / это правило утверждает, что только $\rho'(\vec{n}_c, p_c; q_c \nu_c q_d \nu_d)$ с четными $\nu_c+\nu_d$ не обращаются в нуль.

В частности, равенство нулю $\rho'(\vec{n}_c, p_c; 1,\pm1,0,0)$ и $\rho'(\vec{n}_c, p_c; 0,0,1\pm1)$ обозначает, что вектор поляризации для каждой из частиц c и d должен быть перпендикулярен плоскости реакции, если падающий пучок и мишень неполяризованы[1].

Если в формуле /2.11/ начальное состояние считать полностью неполяризованным и выбрать обычную систему координат /ось $z \parallel \vec{n}_a$ /, то можно получить еще одно правило отбора. В этом случае $\rho'(\vec{n},p;q_c\tau_c00)$ /или $\rho'(\vec{n},p;00q_d\tau_d)$ / зависит от τ_c через посредство следующих множителей в общем члене суммы /см. /8/ в[3] с заменой $\mathcal{D}^J_{x,x'}(\varphi_\lambda,\vartheta_\lambda,0)$ на $\mathcal{D}^J_{\tau_c,0}(-\pi,\vartheta,\pi-\varphi)$ — см. §2): $(-1)^{\tau_c} G_{\tau_c}(J_1\ell_1'S_1';J\,q_c;J_2\ell_2'S_2')\cdot\mathcal{D}^{J}_{\tau_c,0}(-\pi,\vartheta,\pi-\varphi)$, или, принимая во внимание выражение /3.3/ в[2] для G_{τ_c} и формулу $\mathcal{D}^J_{\tau_c0}(\varphi_2,\vartheta,\varphi_1)=[4\pi/2J+1]^{1/2}(-1)^{\tau}\cdot Y_{J\tau}(\vartheta,\pi-\varphi_2)$, множителей $(q_c\,\mathcal{K}_c-\tau_c/q_c\,\mathcal{J}L'0)\cdot Y_{\mathcal{J}\tau_c}(\vartheta,0)$. Аналогично $\rho'(\vec{n}_c,p_c;q_c,-\tau_c,0,0)$ зависит от $-\tau_c$ через посредство множителей $(q_c\,J-\tau_c\tau_c/q_c JL'0)\,Y_{J,-\tau_c}(\vartheta,0)$. Из закона сохранения пространственной четности системы и ввиду наличия коэффициентов $(\ell_1'\ell_2'00/\ell_1'\ell_2'L0),(\ell_1\ell_2 00/\ell_1\ell_2 L0)$, $(0J00/0JL0)$ в G_{τ_c} и G_0^* имеем: $\ell_1+\ell_2+\ell_1'+\ell_2'$, $\ell_1'+\ell_2'+L'$; $\ell_1+\ell_2+J$ - четные числа. Отсюда следует, что $J+L'$ /и, конечно, $J-L'$ / тоже должно быть четным числом. Поэтому $/q_c J-\tau_c\tau_c/q_c JL'0$ $/ = /-1/^{q_c+J-L'}\cdot$ $(q_c\,\mathcal{J}\tau_c-\tau_c/q_c\,\mathcal{J}L'0)=(-1)^{q_c}(q_c\,\mathcal{J}\tau_c-\tau_c/q_c\,\mathcal{J}L'0)$

Принимая во внимание, что $Y_{J,-\tau_c}(\vartheta,0)=(-1)^{\tau_c}Y_{J\tau_c}(\vartheta,0)$ получаем $\rho'(\vec{n},p;q_c,-\tau_c,0,0)=(-1)^{q_c+\tau_c}\rho'(\vec{n},p;q_c\tau_c,0,0)$

Учитывая еще свойство эрмитовости $c.$ тензоров[6], окончательно заключаем, что если начальное состояние полностью неполяризовано, все $\rho'(\vec{n},p;q_c,\tau_c,0,0)$ с четными q_c действительны, а с нечетными чисто мнимы[7]. Этот факт почти также упрощает задачу нахождения спинового состояния системы $c+d$, что и предыдущее правило отбора. В частности, если частица c нестабильна, то изложенные правила отбора позволяют несколько упростить описание начального состояния реакции ее распада без всяких гипотез о механизме ее рождения.

Аналогичные правила отбора можно получить и для реакции типа $a \to c+d$ /направляя ось z соответственно перпендикулярно $\vec{n}_c$ и параллельно $\vec{n}_c$ и считая частицы a полностью неполяризованными/.

§ 4. Получим некоторые следствия, вытекающие из формулы /2.13/ для реакции $a \to c+d$ в частном случае $i_c = 1/2$, $i_d = 0$, важным примером которого является распад Λ^0 - частицы: $\Lambda^0 \to p+\pi^-$. Во-первых, при $i_d=0$ $X(i_c q_c i_c; S_1' q' S_2'; 0 q_d 0) = (2i_c+1)^{-1}(2q_c+1)^{-1/2} \cdot \delta_{q_d 0} \cdot \delta_{q_c q'} \delta_{S_1' i_c} \delta_{S_2' i_c}$. Затем при $i_c = 1/2$ из триад $G_\tau(s\ell_1' \tfrac{1}{2}; q q_c; s\ell_2' \tfrac{1}{2})$

6/ Легко убедиться с помощью /1.3/, что свойству эрмитовости матрицы плотности $(m_1|\rho|m_2)^* = (m_2|\rho|m_1)$ соответствует такое свойство $c.$ тензоров: $\rho^*(q,\nu) = (-1)^\nu \rho(q,-\nu)$.

7/ Существует некоторое обобщение этого правила отбора: вклад в $\rho'(\vec{n},p;q\tau 00)$ от каждого $c.$ тензора $\rho(\vec{n}_a p_a; q_a 0 q_\beta 0)$ действителен, если $q+q_a+q_\beta$ четно и чисто мним, если $q+q_a+q_\beta$ нечетно.

в /2.13/ имеем $\ell_1'=S\pm\frac{1}{2}$, $\ell_2'=S\pm\frac{1}{2}$ т.е. ℓ_1' и ℓ_2' могут отличаться только на единицу. Элементы R - матрицы в /2.13/ не равны нулю только для переходов с сохранением пространственной четности, поэтому ℓ_1' и ℓ_2' должны иметь одинаковую четность. Получаем, что $\ell_1'=\ell_2'=\ell'=S+\frac{1}{2}$ или $\ell_1'=\ell_2'=\ell'=S-\frac{1}{2}$ в зависимости от неизвестной четности частицы a и четностей c и d. В дальнейшем предполагается, что по переменным α состояние ансамбля частиц a чистое / т.е. $\rho_{\alpha_1\alpha_2}(qV)=\rho(\alpha;qV)\cdot\delta_{\alpha\alpha_1}\cdot\delta_{\alpha\alpha_2}$ /.

В /2.13/ остается тогда всего один отличный от нуля элемент R - матрицы, и если нет других альтернативных путей распада a, то из условия унитарности S - матрицы следует, что

$$(\tfrac{1}{2}0\tfrac{1}{2}\ell'\alpha'|R^{SE}|\alpha)(\tfrac{1}{2}0\tfrac{1}{2}\ell'\alpha'|R^{SE}|\alpha)^*=1 \qquad /4.1/$$

Если есть другие схемы распада $/a\to c'+d'/$, то вместо единицы в правую часть равенства /4.1/ надо подставить полную вероятность w распада a по схеме $a\to c+d(0<w<1)$

Если теперь еще $\rho'(\vec{n}_c,p_c,\alpha';q_c\tau_c\,00)$ проинтегрировать /с весом $V/(2\pi\hbar)^3$ - см. приложение П/ по интервалу импульсов $/\vec{p}_c,\vec{p}_c+\Delta\vec{p}/$, содержащему импульсы $\vec{p}_c$, обращающие (p_c/E) в единицу, и обозначить полученные величины через $T_{\tau_c}^{q_c}(\vartheta,\varphi)\Delta\Omega$ /индекс α' опущен/, то из

/2.13/ получаем:

$$T_{\tau_c}^{q_c}(\vartheta,\varphi)=\frac{w(2S+1)^{-1/2}}{4\sqrt{2}\,\pi}\sum_{qV}(-1)^{q_c+\tau_c}\cdot G_{\tau_c}(S\ell'1/2,q\,q_c;S\ell'1/2)\times$$
$$\times\mathcal{D}^{q}_{\tau_c,V}(-\pi,\vartheta,\pi-\varphi)\cdot\rho(\alpha;qV)\,. \qquad /4.2/$$

При перестановке верхней и нижней строчек аргументов коэффициента $G_{\tau_c}(S\ell'1/2;q\,q_c;S\ell'1/2)$ перед G_{τ_c}, должен появиться множитель $/-1/^{2S+1+q+q_c}$ /см.[2] стр. 38/. Но так как эти строчки одинаковы, то G_{τ_c} при этом никак не меняется, и $2S+1+q+q_c$ должно быть четным числом. Так как спин частицы a полуцелый, то $2S+1$ четное число и поэтому $q+q_c$ должно быть четным. Угловое распределение продуктов распада $T_0^0(\vartheta,\varphi)$ определяется только четными тензорными моментами начального состояния частицы a, а поляризация протонов распада /т.е. c тензоры T_0', $T_{\pm1}'$ / только нечетными. Измеряя угловое распределение и поляризацию частиц c мы получаем сведения непосредственно о $\rho(q,V)$, спине и четности частицы a и, наоборот, если эти последние известны, мы можем предсказать все c. тензоры $T_{\tau_c}^{q_c}(\vartheta,\varphi)$.

Интегрируя угловое распределение $T_0^0(\vartheta,\varphi)$ по ϑ или по φ, мы можем получить общие формулы для непосредственно измеряемых в эксперименте распределений /например, интегрируя по ϑ, получаем распределение по углу между плоскостью рождения Λ^0 и плоскостью ее распада/[16].

В заключение следует указать, что значительная часть изложенного материала разработана автором совместно с Балдиным А.М. /см.[3]/, которому приносится также благодарность за обсуждение и некоторых других вопросов данной работы. Автор благодарит также члена-корреспондента АН СССР Маркова М.А. за постоянный интерес к работе, и Заставенко Л.Г. за обсуждение ряда вопросов, связанных с теорией представлений группы вращений.

Приложение 1.

Квантово-механическое состояние можно описывать не только волновыми функциями и матрицами плотности, но и заданием средних значений полного набора коммутирующих операторов[12]. В частности, мы так будем описывать спиновое состояние частицы /и системы частиц/. Заметим, что и в эксперименте измеряются не вероятности тех или иных значений проекций спинов, а среднее значение оператора вектора спина , например, /так называемая поляризация частицы/.

Пусть $\hat{A}$ есть оператор в отношении спиновых переменных частицы со спином i ; состояние этой частицы описывается матрицей плотности $/m_1\xi_1/\rho/m_2\xi_2$ /, где m_1 и m_2 - магнитные квантовые числа, ξ - все другие переменные представления. Можно найти среднее значение $\hat{A}$ в этом состоянии, если известны матричные элементы $\hat{A}$ в том представлении, в котором записана матрица плотности

$$\bar{A}=\sum_{m_1,m_2,\xi_1\xi_2}(m_2\xi_2|\hat{A}|m_1\xi_1)(m_1\xi_1/\rho/m_2\xi_2)\equiv Sp(A\cdot\rho) \qquad /1.3/$$

Образуем из проекций оператора вектора спина $\hat{s}_x,\hat{s}_y,\hat{s}_z$ тензор ранга q , преобразующийся при трехмерных вращениях по неприводимому представлению веса q , и обозначим его компоненты через $\hat{A}^{q\nu}$. Заметим, что по построению этот оператор является „контравариантным" тензором, как и $\hat{\vec{\sigma}}$, т.е. при вращениях он преобразуется как $Y^{*}_{q\nu}(\vec{n})$, а не как $Y_{q\nu}(\vec{n})$. Например, $\hat{A}^{1\nu}$ являются просто циклическими /или каноническими[11] / проекциями $\vec{\sigma}$ и преобразуются как вектор $\vec{n}$, т.е. как $Y^{*}_{1\nu}(\vec{n}) \equiv (1\nu/\vec{n})$. Зависимость матричных элементов $\hat{A}^{q\nu}$ от m_2 и m_1 , согласно измененной соответствующим образом / ν - „контравариантный" индекс!/ теореме Вигнера-Эккарта[8] имеет вид:

$$(m_2\xi_2|\hat{A}^{q\nu}|m_1\xi_1)=\sqrt{2i+1}\,(i\xi_1\|\hat{A}^{q}\|i\xi_1)(\xi_1|\xi_2)(-1)^{i-m_2}(iim_1-m_2|iiq\nu) \qquad /1.2/$$

/если спиновые переменные и переменные ξ разделяются, то $(i\xi_1\|\hat{A}^{q}\|i\xi_1)$ не зависит от ξ_1 /. Подставляя /1.2/ в /1.1/ , видим, что для нахождения $\overline{A^{q\nu}}$ надо непосредственно знать не матрицу плотности, а величину

$$\rho_{\xi_1\xi_2}(q,\nu)=\sqrt{2i+1}\sum_{m_1,m_2}(-1)^{i-m_2}(iim_1-m_2|iiq\nu)(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2) \qquad /1.3/$$

пропорциональную $\overline{A^{q\nu}}$ /см. также[12]/. Из /1.3/ следует, что величины $\rho(q,\nu)$ $q=0,1..2i,\ \nu=-q,-q+1,..+q$ могут характеризовать спиновое состояние частицы с таким же успехом, как и матрица плотности. Обратное преобразование от q, ν представления в $m_1 m_2$ представление имеет вид:

$$(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2)=(2i+1)^{-1/2}\cdot\sum_{q,\nu}(-1)^{-i+m_2}(i\,i\,m_1 -m_2|i\,i\,q\,\nu)\rho_{\xi_1\xi_2}(q\nu) \quad /1.4/$$

По переменным ξ $\rho_{\xi_1\xi_2}(q,\nu)$ является такой же матрицей плотности, что и $(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2)$. По происхождению $\rho_{\xi_1\xi_2}(q\nu)$ можно назвать средними или статистическими средними от неприводимых тензорных спиновых операторов. Поэтому назовем их статистическими тензорами /сокращенно c. тензорами/, присоединяясь к [13] /стр. 735/.

Если нас интересует только распределение вероятностей того, что частица имеет определенные значения переменных ξ /например, угловое распределение частиц/ в состоянии, характеризуемом $(m_1\xi_1|\rho|m_2\xi_2)$, то оно будет описываться диагональными элементами матрицы плотности $[\sum_m (m\xi_1|\rho|m\xi_2)]$. Преобразование /1.3/ выбрано так, чтобы $\sum_m (m\xi_1|\rho|m\xi_2)=\rho_{\xi_1\xi_2}(0,0)$, а пучок неполяризованных частиц описывался бы c. тензорами $\rho_{\xi_1\xi_2}(0,0)\delta_{q0}\delta_{\nu 0}$.

Употребляемые в § 2 c. тензоры начального состояния $\rho(q_a\nu_a q_b\nu_b)$ являются просто попарными произведениями c. тензоров $\rho(q_a\nu_a)$ и $\rho(q_b\nu_b)$, характеризующих по отдельности спиновые состояния частиц a и b.

Частицы c и d после реакции разделяются пространственно и, следовательно, не взаимодействуют. Можно показать, что так же, как волновая функция системы двух невзаимодействующих частиц разделяется на произведение волновых функций каждой из частиц, так и матрица плотности и C. тензоры тоже обладают аналогичным свойством

$$\rho(q_c V_c q_d V_d) = \rho(q_c V_c 00)\cdot\rho(00 q_d V_d)/\rho(0,0,0,0) \qquad /1.5/$$

причем $\rho(q_c V_c 00)$ являются с. тензорами частицы c, а $\rho(0,0,q_d V_d)$ - с. тензорами частицы d. Этих с.тензоров достаточно для полной характеристики конечного спинового состояния системы после реакции, если c и d не образуют связанной системы.

Заметим, что введенные в[3] "тензорные моменты" $T_v^q = \sqrt{2i+1}\sum(-1)^{-i-m_1}(ii-m_1m_2/iiqv)(m_1/\rho/m_2)$ /в формуле /5/ в[3] опечатка/ связаны с определенными формулой /1.3/ $\rho(q,v)$ таким образом $T_v^q = (-1)^{q+v}\rho(q,-v) = (-1)^q\cdot\rho^*(q,v)$.

Приложение П.

Все волновые функции /и матрицу плотности/ нашей задачи мы будем нормировать так, чтобы система в ρ - состоянии с вероятностью 1 все время находилась в объеме V /трехмерный шар радиуса R /, что в х-представлении запишется таким образом:

$$\int\limits_V (x/\eta)^{*}\cdot(x/\eta)\,d^3x = 1 \qquad /П.1/$$

Нормировки волновых функций η - состояния в других представлениях должны соответствовать этой нормировке.

Нормированная согласно /П.1/ волновая функция $(\theta\phi r/\ell m/\vec{K})$ /$\vec{K}$ - волновой вектор/ имеет вид $g_{\ell k}(r)\,Y_{\ell m}(\theta,\phi)$, где $g_{\ell k}(r)$ определено формулой /9/ в[14]. Далее, согласно соотношению $(\vartheta\varphi K/\ell\mu K)=(\vartheta\varphi K/\theta\phi r)(\theta\phi r/\ell\mu K)$ /подразумевается интегрирование по θ,ϕ,r ; ϑ,φ - сферические углы $\vec{K}$ / мы можем получить правильно нормированную волновую функцию или функцию преобразования $(\vartheta\varphi K/\ell\mu K)$. /Заметим, что $(\vartheta\varphi K/\theta\phi r)$ равно выражению /13/ в[14], помноженному на $V^{-1/2}$ /. Из этих соображений получаем:

$$(\vartheta\varphi p/\ell\mu E) = \frac{2\pi\hbar\sqrt{2R}}{\sqrt{V}}\cdot\frac{i^{-\ell}}{p}\cdot Y_{\ell\mu}(\vartheta,\varphi)\cdot(p/E) \qquad /П.2/$$

где (p/E) определяется аналогично $(\vec{p}/\vec{p}\,')$ /см. ниже/. Наличие множителя $i^{-\ell}$ обеспечивает инвариантность действия оператора обращения времени на волновые функции с определенными ℓ и μ относительно сложения моментов количества движения[15] /т.е. запись результата действия этого оператора имеет такой же вид для $\Psi_{\ell\mu}$, как и для $\Psi_{\ell_1\mu_1}$ и $\Psi_{\ell_2\mu_2}$, если $\vec{\ell}=\vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2$ /.

Заметим, что

$$(l\mu E|\vartheta\varphi p)=(\vartheta\varphi p|l\mu E)^{*}=(-1)^{-l+\mu}(\vartheta\varphi p|l,-\mu,E) \qquad /\text{П.3}/$$

Аналогично можно установить, что $(\vec{p}|\vec{p}\,')$ имеет вид /17/ в [14], /т.е. при $\vec{p}=\vec{p}\,'$ $(\vec{p}|\vec{p}\,')=1$, а при $\vec{p}\neq\vec{p}\,'$ $(\vec{p}|\vec{p}\,')=0$ /. Если потребовать, чтобы, согласно формализму Дирака [5] $(\vec{p}\,''|\vec{p})(\vec{p}|\vec{p}\,')$ равнялось $(\vec{p}\,''|\vec{p}\,')$, то оказывается, что нормировка /П.1/ требует подразумеваемое в $(\vec{p}\,''|\vec{p})(\vec{p}|\vec{p}\,')$ интегрирование по $\vec{p}$ производить с весовым множителем $V/(2\pi)^3$ /что эквивалентно некоторому суммированию/. Согласно Дираку /см. [5] § 24/ этот множитель должен быть введен в каждую формулу, в которой производится интегрирование по импульсам.

В связи с нормировкой /П.1/ встает задача получения из $\rho'(\vec{n}_c,p_c;q_cV_c\,q_dV_d)$ величин, которые могут быть непосредственно сравнены с результатами эксперимента по изучению реакции $a+b\to c+d$. Каков смысл $\rho'(p_c';q_cV_c\,q_dV_d)$? Имеется физическая система, состоящая вначале /в момент времени -Т, где $T=R/v$, а v - модуль относительной скорости частиц a и b : $v=|V_a|+|V_b|$ / из частиц a и b, находящихся в объеме V; состояние ее описывается величинами $\rho(\vec{p}_a;q_aV_a\,q_bV_b)(\vec{p}_a\,'|\vec{p}_a)(\vec{p}_a\,''|\vec{p}_a)$. Тогда $\rho'(\vec{p}_c;0,0,0,0)$ есть вероятность появления в объеме V к моменту времени $+T$ частиц c и d с импульсом $\vec{p}_c$. Остальные ρ' с $q_c, q_d, V_c, V_d \neq 0$ являются величинами, пропорциональными средним значениям соответствующих спиновых операторов /см. приложение 1/ в ансамбле частиц с таким импульсом.

Для сравнения с экспериментом надо прежде всего знать, сколько будет появляться за 1 сек. частиц c и d, имеющих импульсы в интервале $(\vec{p}_c, \vec{p}_c+\Delta\vec{p})$, если заданы постоянный поток падающих частиц и плотность частиц мишени /а не число частиц a и b в каком-либо объеме/. Для этого надо сначала $\rho'(\vec{p}_c; 0,0,0,0)$ разделить на $2T$ и проинтегрировать /с весом $V/(2\pi h)^3$ / по интервалу $(\vec{p}_c, \vec{p}_c+\Delta\vec{p})$. Если полученную величину умножить еще на V/v /перенормировка на поток/, то получим дифференциальное поперечное сечение реакции $\Delta\sigma(\vec{n}_c)$:

$$\Delta\sigma(\vec{n}_c) = h^2/4p_a^2 \cdot (4\pi)^2/N \cdot \rho(\vec{n}_c, p_c'; 0,0,0,0)\Delta\Omega \qquad /\text{П}.4/$$

$N = (2\pi h)^4(p_c, p_a)^2(2R)^2[V^2 p_a^2 \cdot p_c^2]^{-1}$, p_c' – тот модуль импульса $\vec{p}_c$, который диктуется законом сохранения энергии. Предполагается, что в интервале $(\vec{p}_c, \vec{p}_c+\Delta\vec{p})$ есть импульсы с модулем p_c'. $\Delta\Omega$ – телесный угол этого интервала.

Можно было бы получить нормированные на поток величины $\rho_n(\vec{n}_c, p_c'; q_c V_c q_d V_d)$, связанные с $\rho(\vec{n}_c\, p_c; q_c V_c q_d V_d)$

точно так же, как $\Delta\sigma(\vec{n}_c)$ связано с $\rho(\vec{n}_c, p_c; 0,0,0,0)$. Они представляли бы собой средние значения некоторых спиновых операторов в ансамбле частиц с импульсами в интервале $(\vec{p}_c, \vec{p}_c + \Delta\vec{p})$. Однако полученные таким образом средние значения зависели бы не только от характера спинового состояния, но и от числа частиц в таком ансамбле. Поэтому характеристикой именно спинового состояния является среднее значение оператора $\hat{A}^{q\nu}$ /для частицы c, например/, рассчитанное на одну частицу:

$$\overline{A^{q\nu}(\vec{p}_c)} = (i_c \| \hat{A}^q \| i_c) \cdot \rho_n(\vec{n}_c, p_c; q, \nu, 0, 0) / \Delta\sigma(\vec{n}_c) =$$

$$= (i_c \| \hat{A}^q \| i_c) \cdot \rho(\vec{n}_c, p_c; q, \nu, 0, 0) / \rho(\vec{n}_c, p_c; 0,0,0,0) \qquad /\text{П.}5/$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Simon A. and Welton T.A. Phys. Rev 90, p. 1036 /1953/

[2] Симон А. Сб. "Проблемы современной физики" 1955 № 6, стр. 21

Phys. Rev. 92, p. 1050 /1953/ и Phys. Rev 93, p. 1435 /1954/ (errata)

[3] Балдин А.М. и Широков М.И. ЖЭТФ, 30, вып. 4, стр. 784 /1956/

[4] Möller C. Det. Kgl. Danske V.S. M.-f 1945, v 23, № 1, § 3.

[5] П.А.М. Дирак "Основы квантовой механики", изд. 2 Л-1937-М.

[6] Lippman B.A. and Schwinger J. Phys. Rev, 79, p.473 /1950/

[7] Блохинцев Д.И. "Основы квантовой механики". Москва 1949, § 44.

[8] Racah G. Phys Rev, 62, p. 438 /1942/

[9] Biedenharn L.C., Blatt J.M., Rose Rev. Mod Phys 24, № 4, p.249 (1952) /1952/

[10] Arima A., Horie H., Tanabe Y. Progr Theor Phys 11, p. 143 /1954/

[11] Гельфанд И.М. и Шапиро З.Я. УМН, т. УП, вып.1 /47/, стр. 3 /1952/

[12] Fano U. Phys. Rev. 90, p.577 /1953/

[13] Biedenharn L.C. and Rose M.E. Rev. Mod. Phys., 25, p.735 /1953/

[14] Hamilton J. Proc. Camb. Phil. Soc., 52, p.1, p.97 /1956/

[15] Huby R. Proc. Phys. Soc., 67A, № 420, p.1103 (1954) /1954/

[16] Широков М.И., ЖЭТФ, ~~в печати~~. т. 31 вып. 4, стр. (1956)