ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Ким Зе Пхен

P - 891

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЧУ-ЛОУ ДЛЯ ПРОЦЕССА $\pi + N \to 2\pi + N$

Дубна 1962 год

Ким Зе Пхен

Р - 891

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЧУ-ЛОУ ДЛЯ ПРОЦЕССА $\pi + N \to 2\pi + N$

В квантовой теории и теории дисперсионных соотношений часто встречаются сингулярные интегральные уравнения.

В статье Целлнера /1/ выведено уравнение типа Чу-Лоу для процесса

$$\pi + N \longrightarrow n\pi + N.$$

Целлнер предложил нам решить это уравнение для случая $n=2$, т.е. для процесса

$$\pi + N \longrightarrow 2\pi + N.$$

В этом случае уравнение задается в виде

$$D(E'',E';E) = \lambda^+ f^3 \frac{1}{E}\left(\frac{1}{E'} + \frac{1}{E''}\right) + \lambda^- f^3 \frac{1}{E}\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E''}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\Bigg[\frac{1}{E} P\int_1^\infty d\varepsilon\cdot\varepsilon \Bigg(\frac{K^{11}(\varepsilon)\, D(\nu''\varepsilon; \nu'\varepsilon; \varepsilon) + K^{12}(\varepsilon)\, A(\nu''\varepsilon, \nu'\varepsilon; \varepsilon)}{\varepsilon - E} -$$

$$- \frac{K^{21}(\varepsilon)\, D(\nu''\varepsilon, \nu'\varepsilon; \varepsilon) - K^{22}(\varepsilon)\, A(\nu''\varepsilon, \nu'\varepsilon; \varepsilon)}{\varepsilon + E}\Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{E'} P\int_1^\infty d\varepsilon\cdot\varepsilon \Bigg(\frac{K^{31}(\varepsilon)\, D(\frac{\nu''}{\nu'}\varepsilon, \varepsilon; \frac{1}{\nu'}\varepsilon) + K^{32}(\varepsilon)\, A(\frac{\nu''}{\nu'}\varepsilon, \varepsilon; \frac{1}{\nu'}\varepsilon)}{\varepsilon - E'} -$$

$$- \frac{K^{41}(\varepsilon)\, D(\frac{\nu''}{\nu'}\varepsilon, \varepsilon; \frac{1}{\nu'}\varepsilon) - K^{42}(\varepsilon)\, A(\frac{\nu''}{\nu'}\varepsilon, \varepsilon; \frac{1}{\nu'}\varepsilon)}{\varepsilon + E'}\Bigg) +$$

$$+ \frac{1}{E''} P\int_1^\infty d\varepsilon\cdot\varepsilon \Bigg(\frac{K^{51}(\varepsilon)\, D(\varepsilon, \frac{\nu'}{\nu''}\varepsilon; \frac{1}{\nu''}\varepsilon) + K^{52}(\varepsilon)\, A(\varepsilon, \frac{\nu'}{\nu''}\varepsilon; \frac{1}{\nu''}\varepsilon)}{\varepsilon - E''} -$$

$$- \frac{K^{61}(\varepsilon)\, D(\varepsilon, \frac{\nu'}{\nu''}\varepsilon; \frac{1}{\nu''}\varepsilon) - K^{62}(\varepsilon)\, A(\varepsilon, \frac{\nu'}{\nu''}\varepsilon; \frac{1}{\nu''}\varepsilon)}{\varepsilon + E''}\Bigg)\Bigg],$$

$$A(E'',E';E) = \left(K^{11}(E) + K^{31}(\nu'E) + K^{51}(\nu''E)\right) D(E'',E';E) +$$

$$+ \left(K^{12}(E) + K^{32}(\nu'E) + K^{52}(\nu''E)\right) A(E'',E';E). \qquad (1)$$

$$1 \leq E < +\infty ,$$

где D и A – искомые векторы

$$D \equiv (D_1, D_2, \cdots, D_{10}),$$
$$A \equiv (A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{10}),$$

$K^{\alpha\beta}(\varepsilon)$ – заданные матрицы, такие, что $K^{\alpha\beta}(\varepsilon)=0$ при $\varepsilon < 1$; λ^+; λ^- – заданные числовые векторы, f^3 – заданная константа, $y'+y''=1$, y', y'' – параметры, $E'=y'E$, $E''=y''E$.

Матрицы $K^{\alpha\beta}(\varepsilon)$ $(\alpha=1,2,\cdots,6 ; \beta=1,2)$ имеют следующий вид

$$K^{\alpha\beta}(\varepsilon) = (\varepsilon^2-1)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2-1}{P^2}\right) \frac{1}{\varepsilon} K^{*\alpha\beta}(\varepsilon), \tag{2}$$

где P – константа, а $K^{*\alpha\beta}(\varepsilon)$ – ограниченные гладкие матрицы.

В данном случае $\frac{1}{\varepsilon} K^{*\alpha\beta}(\varepsilon)$ являются линейными комбинациями решений, которые дает Зальцман в работе /2/.

Изучим поведение решений системы уравнений (1). Матрицы $K^{11}(E)+K^{31}(y'E)+K^{51}(y''E)$ и $K^{12}(E)+K^{32}(y'E)+K^{52}(y''E)$, входящие в выражение $A(E'',E';E)$, принадлежат к классу Гельдера H с показателем $1+\frac{1}{2}$, то есть первая производная принадлежит классу Гельдера $H(\frac{1}{2})$. Из теоремы Привалова /3/ ясно, что решения D могут иметь показатель Гельдера до $1+\frac{1}{2}$.

Из физических соображений ясно, что нужно искать непрерывные решения.

Ищем решения в классе Гельдера $H(1+\frac{1}{2})$.

Теперь рассмотрим поведение решения вблизи концов интервала $[1, \infty)$.

Имеют место утверждения: вблизи $E=1$ D и A не могут быть представлены в виде

$$A_i(E) = \frac{A_i^*(E)}{(E-1)^{m_i}}, \quad D_i(E) = \frac{D_i^*(E)}{(E-1)^{n_i}},$$

где $A_i(E) \equiv A_i(E'', E'; E)$, $D_i(E) \equiv D_i(E'', E'; E)$,

$A_i^*(E)$ и $D_i^*(E)$ ограничены вблизи $E = 1$.

Допустим противное, а именно, что

$$A_i(E) = \frac{A_i^*(E)}{(E-1)^{m_i}} , \quad D_i(E) = \frac{D_i^*(E)}{(E-1)^{n_i}} , \tag{3}$$

$$\left(A_i(E) \equiv A_i(E'', E'; E) , \quad D(E) \equiv D(E'', E'; E) \right),$$

где $A_i^*(E)$, $D_i^*(E)$, ограниченные вблизи $E = 1$, $m_i \geq 0$, $n_i \geq 0$, причем

$$\sum (n_i^2 + m_i^2) \neq 0 .$$

Подставляя (3) в уравнение (1) и учитывая (2) и поведение интеграла типа Коши вблизи концов [3] , получим:

из первого выражения (см. стр. 3)

$$\max_i (n_i) \leq \max_i (m_i) - \frac{3}{2} ,$$

из второго выражения (см. стр. 3)

$$\max_i (m_i) \leq \max_i (n_i) - \frac{3}{2} .$$

Получилось противоречие. Поэтому должно быть

$$n_i = m_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, 10) .$$

При $E = +\infty$ D и A не могут иметь конечный порядок бесконечности.

Допустим противное

$$A_i(E) = E^{m_i} A_i^*(E) ,$$
$$D_i(E) = E^{n_i} D_i^*(E) , \tag{4}$$

где $A_i^*(E)$, $D_i^*(E)$, ограниченные при $E = +\infty$, $m_i \geq 0$, $n_i \geq 0$, причем

$$\sum_i (m_i^2 + n_i^2) \neq 0 , \quad (i = 1, 2, \dots, 10) .$$

Подставляя (4) в правые части (1), получим

$$D(E) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{E^2}\right) \tag{5}$$
$$A(E) = \exp\left(-\frac{\nu^2 E^2 - 1}{p^2} + \delta E^2\right) \cdot A^*(E) ,$$

где $\delta : 0<\delta$ сколь угодно малое и $\nu = \min(\nu', \nu'')$, $A^*(E)$ вектор, ограниченный при $E \to +\infty$.

Видим, что соотношение (5) противоречит (4).

Поэтому можно предположить, что D и A ограничены везде на

$$[1, +\infty).$$

Тогда получим

$$D(E) = \frac{1}{E^2} D^*(E) ,$$
$$A(E) = (E^2-1)^{3/2} \exp\left(-\frac{\nu^2 E}{P^2}\right) \frac{1}{E^3} A^*(E) , \qquad (6)$$

где $D^*(E)$, $A^*(E)$ ограниченные на $[1, +\infty)$ векторы.

Имея в виду соотношение

$$\frac{1}{E'} \int_1^\infty \frac{\varepsilon K(\varepsilon)\, \varphi(\frac{1}{\nu'}\varepsilon)}{\varepsilon \pm E'} d\varepsilon = \frac{1}{E} \int_{\frac{1}{\nu'}}^\infty \frac{\varepsilon K(\nu'\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon \pm E} d\varepsilon ,$$

систему уравнений (1) можно записать в виде

$$D(E) = \frac{\lambda}{E^2} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{E}\int_1^\infty d\varepsilon \cdot \varepsilon \left\{ \frac{A(\varepsilon)}{\varepsilon - E} - \frac{k^{21}(\varepsilon) D(\varepsilon)}{\varepsilon + E} + \right.$$
$$\left. + \frac{k^{22}(\varepsilon) A(\varepsilon)}{\varepsilon + E} \right\} , \qquad (7)$$

$$A(E) = k^{11}(E) D(E) + k^{12}(E) A(E) ,$$

где

$$D(E) \equiv D(E'', E'; E) ,$$
$$A(E) \equiv A(E'', E'; E) ,$$
$$k^{11}(E) = K^{11}(E) + K^{31}(\nu' E) + K^{31}(\nu'' E) ,$$

$$k^{12}(E) = K^{12}(E) + K^{32}(\nu' E) + K^{52}(\nu'' E),$$

$$k^{21}(E) = K^{21}(E) + K^{41}(\nu' E) + K^{61}(\nu'' E),$$

$$k^{22}(E) = K^{22}(E) + K^{42}(\nu' E) + K^{\text{[illegible]}}(\nu'' E),$$

$$K^{\alpha\beta}(E) = 0 \quad \text{при} \quad E < 1,$$

$$\lambda = f^3 \left[\lambda^+ \left(\frac{1}{\nu'} + \frac{1}{\nu''} \right) + \lambda^- \left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu''} \right) \right].$$

Интеграл в (7) понимается в смысле главного значения по Коши.

Делая замену переменного E по формуле $t = \frac{1}{E}$ и некоторые другие преобразования, получим

$$u(t) = \lambda - \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\tau \left\{ \frac{v(\tau)}{\tau - t} + \frac{N_1(\tau) u(\tau) - N_2(\tau) v(\tau)}{\tau + t} \right\}, \qquad (8)$$

$$v(t) = S_1(t) u(t) + S_2(t) v(t).$$

где

$$u(t) \equiv \frac{1}{t^2} D\left(\frac{1}{t}\right) \equiv E^2 D(E),$$

$$v(t) \equiv \frac{1}{t^2} A\left(\frac{1}{t}\right) \equiv E^2 A(E),$$

$$S_1(t) \equiv k^{11}\left(\frac{1}{t}\right) \equiv k^{11}(E),$$

$$S_2(t) \equiv k^{12}\left(\frac{1}{t}\right) \equiv k^{12}(E),$$

$$N_1(t) \equiv k^{21}\left(\frac{1}{t}\right) \equiv k^{21}(E),$$

$$N_2(t) \equiv k^{22}\left(\frac{1}{t}\right) \equiv k^{22}(E),$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

Из (2) и (6) заключаем, что матрицы и решения имеют вид

$$\mathcal{S}_\alpha(t) = (1-t^2)^{3/2}\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{\nu^2}{p^2t^2}\right)\mathcal{S}^*_\alpha(t),$$

$$\mathcal{N}_\alpha(t) = (1-t^2)^{3/2}\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{\nu^2}{p^2t^2}\right)\mathcal{N}^*_\alpha(t),$$

где $S^*_\alpha(t)$, $\mathcal{N}^*_\alpha(t)$ ограничены, $\mathcal{S}_\alpha(0) = \mathcal{N}_\alpha(0) = 0$, $(\alpha = 1, 2)$ $u(t)$ ограниченный всюду на $[0,1]$ вектор,

$$v(t) = (1-t^2)^{3/2}\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{\nu^2}{p^2t^2}\right)v^*(t),$$

где $v^*(t)$ ограниченный всюду на $[0,1]$ вектор. $u(t)$ и $v(t)$ ищем в классе $H(1+\frac{1}{2})$.

Регуляризация уравнений

§ 1. В частном случае, если $\det \| \mathcal{J} - \mathcal{S}_2(t) \| \neq 0$ всюду на $[0,1]$ (где $\mathcal{J}$ – единичная матрица), то система уравнений (8) приводится к обычной системе сингулярных интегральных уравнений:

$$u(t) = \lambda - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathcal{S}(\tau)u(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathcal{N}(\tau)u(\tau)}{\tau + t}d\tau, \tag{9}$$

где

$$\mathcal{S}(\tau) = (\mathcal{J} - \mathcal{S}_2(\tau))^{-1} S_1(\tau),$$

$$\mathcal{N}(\tau) = \mathcal{N}_1(\tau) - \mathcal{N}_2(\tau)(\mathcal{J} - S_2(\tau))^{-1} S_1(\tau).$$

Следуя способу Н.И. Мусхелишвили /3/, регуляризуем (9). Обозначим

$$Ku \equiv u(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\tau)u(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathcal{N}(\tau)u(\tau)}{\tau + t}d\tau = \lambda. \tag{10}$$

Регуляризующим оператором берем оператор

$$M\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\tau)\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{11}$$

Регуляризуя слева и справа, получим фредгольмовы уравнения

$$MKu = M\lambda \,, \tag{12}$$

$$KM\varphi = \lambda \,. \tag{13}$$

Оператор $M\varphi$ переводит класс $H(1+\frac{1}{2})$ на $(0,1)$ в класс $H(1+\frac{1}{2})$ на $(0,1)$.

Исходя из связи между решениями особого и регуляризованного уравнений (см., например,[5]), делаем следующие выводы:

1. Если $M\varphi = 0$ не имеет нетривиальных решений в классе $H(1+\frac{1}{2})$ на $(0,1)$, то уравнение (9) эквивалентно уравнению (12).

2. Если $M\varphi = 0$ имеет нетривиальные решения в классе $H(1+\frac{1}{2})$ на (0,1), то уравнение (12) может включить дополнительные решения.

3. Если $M\varphi = f$ разрешимо для любых f, то уравнение (13) эквивалентно исходному уравнению (9).

Во всех случаях, решая (12), можно выделить решения исходного уравнения по формуле $M\varphi = u$,

где φ – решение (13), u – решение (9).

Уравнения (12), (13) имеют вид:

$$\begin{aligned} MKu \equiv (J + S(t)S(t))u(t) &- \frac{1}{\pi}\int_0^1 \Big[\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau-\sigma)}d\sigma\Big] S(\tau)u(\tau)\,d\tau + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{N(\tau)u(\tau)}{\tau+t}d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \Big[\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau+\sigma)}d\sigma\Big] N(\tau)u(\tau)\,d\tau = \\ &= \lambda - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\tau)\lambda}{\tau-t}d\tau , \end{aligned} \tag{12'}$$

$$\underline{\underline{K}}M\varphi \equiv (\mathcal{I} + S(t)S(t))\,\varphi(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left[\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau-\sigma)}\,d\sigma\right] \times$$
$$\times\, S(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{N(\tau)\,\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau - \tag{13'}$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left[\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{N(\sigma)}{(\sigma+t)(\tau-\sigma)}\,d\sigma\right] S(\tau)\,\varphi(\tau) = \lambda \,.$$

Ядра в уравнениях (12) и (13) ограниченные и непрерывные.

Проверим только ядра первого интеграла из (12):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau-\sigma)}\,d\sigma = \frac{-1}{\tau-t}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\sigma)}{\sigma-\tau}\,d\sigma - \right. \tag{14}$$
$$\left. - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma\right\} ,$$

где

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\sigma)}{\sigma-t}\,d\sigma \quad \in H\left(1+\frac{1}{2}\right) .$$

Поэтому (14) ограниченная непрерывная матрица.

§ 2. Если $\det \| \mathcal{I} - S_2(t) \| = 0$ при $t = c_j$ $(j=1,2,\dots,m)$, то предыдущее рассуждение не применимо.

Регуляризуем другим путем. Систему уравнений (8) можно записать в виде:

$$u(t) = \lambda - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau-t}\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{w(\tau)}{\tau+t}\,d\tau ,$$

$$v(t) = S_1(t)\,u(t) + S_2(t)\,v(t) ,$$

$$w(t) = N_1(t)\,u(t) - N_2(t)\,v(t),$$

где $w(t)$ – вектор.

Подставляя выражение $u(t)$ во второе и третье выражение (15), получим

$$
\begin{aligned}
v(t) &= S_1(t)\lambda - \frac{S_1(t)}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{S_1(t)}{\pi}\int_0^1 \frac{w(\tau)}{\tau + t}\,d\tau + S_2(t)v(t), \\
w(t) &= \mathcal{N}_1(t)\bar{\lambda} - \frac{\mathcal{N}_1(t)}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{\mathcal{N}_1(t)}{\pi}\int_0^1 \frac{w(\tau)}{\tau + t}\,d\tau - \\
&\quad - \mathcal{N}_2(t)v(t) .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Систему уравнений (16) перепишем в виде

$$
K\varphi \equiv A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{C(t)}{\pi}\int_0^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau + t}\,d\tau = f(t), \tag{17}
$$

где

$$
\varphi(t) \equiv (v_1, v_2, \ldots, v_{10}, w_1, w_2, \ldots, w_{10}),
$$

$$
f(t) \equiv (\; S_1(t)\lambda \;,\; \mathcal{N}_1(t)\lambda \;),
$$

$$
A(t) \equiv \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{J} - S_2(t) & 0 \\ \hline \mathcal{N}_2(t) & \mathcal{J} \end{array}\right),
$$

$$
B(t) \equiv \left(\begin{array}{c|c} 0 & S_1(t) \\ \hline 0 & \mathcal{N}_1(t) \end{array}\right),
$$

$$\mathcal{C}(t) \equiv \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathcal{S}_1(t) \\ \hline 0 & \mathcal{N}_1(t) \end{array}\right)$$

Обозначим $A+B \equiv \mathcal{S}$, $A-B \equiv T$. Тогда получим

$$\mathcal{S} \equiv \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{J} - \mathcal{S}_2(t) + \mathcal{S}_1(t) & 0 \\ \hline \mathcal{N}_1(t) + \mathcal{N}_2(t) & \mathcal{J} \end{array}\right),$$

$$T \equiv \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{J} - \mathcal{S}_2(t) - \mathcal{S}_1(t) & 0 \\ \hline -\mathcal{N}_1(t) + \mathcal{N}_2(t) & \mathcal{J} \end{array}\right),$$

$$\det \| \mathcal{S} \| = \det \| \mathcal{J} - \mathcal{S}_2(t) + \mathcal{S}_1(t) \|,$$

$$\det \| T \| = \det \| \mathcal{J} - \mathcal{S}_2(t) - \mathcal{S}_1(t) \|.$$

Если $\det\|S\|\neq 0$, $\det\|T\|\neq 0$ на [0,1], то следуя способу Мусхелишвили[4], можно брать регуляризатор $M\psi$ в виде

$$M\psi\equiv\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+T^{-1}(t)]\psi(t)+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-T^{-1}(t)]\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau. \tag{18}$$

Уравнения

$$MK\varphi=Mf, \tag{19}$$

$$KM\psi=f \tag{20}$$

являются Фредгольмовыми.

Дальнейшее рассуждение то же самое, что и в § 1. Перепишем уравнения (19) и (20) в развернутом виде

$$\begin{aligned}MK\varphi\equiv{}&\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+T^{-1}(t)]A(t)\varphi(t)+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-T^{-1}(t)]\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{A(\tau)\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\\&+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+T^{-1}(t)]\frac{B(t)}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\\&+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-T^{-1}(t)]\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{1}{\tau-t}\left\{\frac{B(\tau)}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma-\tau}d\sigma\right\}d\tau+\\&+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+T^{-1}(t)]\frac{C(t)}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}d\tau+\\&+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-T^{-1}(t)]\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{1}{\tau-t}\left\{\frac{C(\tau)}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma+\tau}d\sigma\right\}d\tau=Mf.\end{aligned}$$

Учитывая, что $A(t)=\frac{1}{2}[S(t)+T(t)]$, $B(t)=\frac{1}{2}[S(t)-T(t)]$ и используя формулу Пуанкаре-Бертрана, получим

$$\begin{aligned}MK\varphi\equiv{}&\frac{1}{2}[S^{-1}(t)T(t)+T^{-1}(t)S(t)]\varphi(t)+\\&+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-T^{-1}(t)]\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\frac{A(\tau)-A(t)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau+\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-T^{-1}(t)]\frac{1}{\pi}\int_0^1\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{B(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau-\sigma)}d\sigma\right\}\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+T^{-1}(t)]\frac{C(t)}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau+t}d\tau+ \qquad (19')$$

$$+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-T^{-1}(t)]\frac{1}{\pi}\int_0^1\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{C(\sigma)}{(\sigma-t)(\sigma+\tau)}d\sigma\right\}\varphi(\tau)d\tau=$$

$$=Mf.$$

Аналогично получим

$$KM\psi=\frac{1}{2}[S(t)T^{-1}(t)+T(t)S^{-1}(t)]\varphi(t)+$$

$$+\frac{B(t)}{\pi}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}[S^{-1}(\tau)+T^{-1}(\tau)]-\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+T^{-1}(t)]}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{B(t)}{\pi}\int_0^1\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}[S^{-1}(\sigma)-T^{-1}(\sigma)]}{(\sigma-t)(\tau-\sigma)}d\sigma\right\}\psi(\tau)d\tau+ \qquad (20')$$

$$+\frac{C(t)}{\pi}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}[S^{-1}(\tau)+T^{-1}(\tau)]\psi(\tau)}{\tau+t}d\tau+$$

$$+\frac{C(t)}{\pi}\int_0^1\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\frac{1}{2}[S^{-1}(\sigma)-T^{-1}(\sigma)]}{(\sigma+t)(\tau-\sigma)}d\sigma\right\}\psi(\tau)d\tau=$$

$$=f(t).$$

§ 3. Рассмотрим случай, когда $\det\|J - S_2(t)\| = 0$ и $\det\|T\| = 0$ или $\det\|S\| = 0$ в некоторых точках $0,1$. Имеем $\det\|J - S_2(t)\| = 1$ при $t = 0; 1$. Поэтому число точек, в которых определитель обращается в нуль, может быть только четным.

Вначале рассмотрим уравнение с одной неизвестной функцией $u(t) + iv(t)$:

$$u(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{N_1(\tau)u(\tau) - N_2(\tau)v(\tau)}{\tau + t}\,d\tau = \lambda, \tag{21}$$

$$(1 - S_2(t))v(t) - S_1(t)u(t) = 0,$$

где

$$1 - S_2(c_1) = 1 - S_2(c_2) = 0,$$

$$S_1(c_1) \neq 0, \quad S_1(c_2) \neq 0.$$

порядок нуля равен 1.

Вид $S_\alpha(t)$, $N_\alpha(t)$ тот же самый, что и в (2).

Поскольку мы ищем $u(t)$, $v(t)$ в классе $H(1+\frac{1}{2})$, можно записать:

$$1 - S_2(t) = (t - c_1)(t - c_2)\,d(t),$$

$$u(t) = (t - c_1)(t - c_2)\,\varphi(t), \tag{22}$$

$$v(t) = \frac{S_1(t)}{d(t)}\varphi(t) \equiv S(t)\,\varphi(t),$$

где $\varphi(t) \in H(1+\frac{1}{2})$; кроме точек $t = c_1, c_2$, где $\varphi(t) \in H(\alpha)$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ $d(t) \neq 0$ на $[0,1]$.

Получим

$$(t - c_1)(t - c_2)\varphi(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S(\tau)\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_0^1 \frac{N(\tau)\varphi(\tau)}{\tau + t} = \lambda, \tag{23}$$

где

$$N(\tau) = N_1(\tau) - N_2(\tau)\frac{S_1(\tau)}{d(\tau)},$$

или

$$(t-c_1)(t-c_2)\varphi(t)+\frac{S(t)}{\pi}\int_0^1\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{S(\tau)-S(t)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau+ \tag{23'}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{N(\tau)\varphi(\tau)}{\tau+t}d\tau=\lambda .$$

Уравнение (23) приводит к граничной задаче Гильберта и решается эффективно /3/. Остановимся только на проверке индекса уравнения (23).

В этом случае:

$$G(t)=\frac{(t-c_1)(t-c_2)-i\,S(t)}{(t-c_1)(t-c_2)+i\,S(t)}\quad, \tag{24}$$

и в концах

$$G(0)=1\ ,\quad G(1)=e^{2\pi n i}\ ,$$

где n - целое число.

Поэтому индекс (23') равен $\varkappa=-n$. Дальнейшие рассуждения аналогичны /3/.

Дальше рассмотрим систему.

Допустим:

$$\det\|\mathcal{I}-\underline{S}_2(t)\|=(t-c_1)(t-c_2)\,d(t). \tag{25}$$

Преобразуем искомый вектор так

$$u(t)=(t-c_1)(t-c_2)\varphi(t)+(t-c_2)\mu+(t-c_1)\gamma ,$$

где μ, γ - векторы, удовлетворяющие условиям

$$A(c_1)S_1(c_1)\mu=0\ ,$$
$$A(c_2)S_1(c_2)\gamma=0\ ,$$

$A\equiv(A_{ji})$, A_{ji} - алгебраическое дополнение

$$\det\|\mathcal{I}-S_2(t)\|\ .$$

$$v(t)=\frac{1}{d(t)}\ A(t)S_1(t)\varphi(t)+\frac{A(t)S_1(t)}{(t-c_1)d(t)}\mu+\frac{A(t)S_1(t)}{(t-c_2)d(t)}\gamma . \tag{26}$$

Выражение (26) показывает, что:

1. Всегда найдутся такие μ, γ, которые удовлетворяют (26), и некоторые компоненты их будут произвольными, потому что

$$\det\| A(c_1) S_1(c_1)\| = \det\| A(c_2) S_2(c_2)\| = 0 .$$

2. $v(t)$ – непрерывный всюду на $[0,1]$ вектор

$$v(c_1) = \frac{1}{d(c_1)} A(c_1) S_1(c_1) \varphi(c_1) + \frac{A(c_1) S_1(c_1)}{(c_1-c_2)\, d(c_1)} \gamma +$$

$$+ \lim_{t\to c_1} \frac{A(t) S_1(t)\mu}{(t-c_1)\, d(t)} =$$

$$= \frac{1}{d(c_1)} \left\{ A(c_1) S_1(c_1) \varphi(c_1) + \frac{A(c_1) S_1(c_1)\gamma}{(c_1-c_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt} A(t) S_1(t)\Big|_{t=c_1} \mu \right\} .$$

Аналогично

$$v(c_2) = \frac{1}{d(c_2)} \left\{ A(c_2) S_1(c_2) \left(\varphi(c_2) + \frac{\mu}{c_2-c_1} \right) + \frac{d}{dt} A(t) S_1(t)\Big|_{t=c_2} \gamma \right\},$$

$$\varphi(t) \in H(\alpha) \qquad \left(\frac{1}{2} < \alpha < 1+\frac{1}{2}\right) .$$

Подставив (26) в (8), получим

$$(t-c_1)(t-c_2)\varphi(t) = f(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{B(\tau)\varphi(\tau)}{\tau-t}\, d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{C(\tau)\varphi(\tau)}{\tau+t}\, d\tau, \qquad (27)$$

где

$$f(t) = \lambda - (t-c_2)\mu - (t-c_1)\gamma -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left\{ \frac{A(\tau) S_1(\tau)}{(\tau-c_1)\, d(\tau)} \mu + \frac{A(\tau) S_1(\tau)}{(\tau-c_2)\, d(\tau)} \gamma \right\} \frac{d\tau}{\tau-t} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1 \Big\{ N_1(\tau)\left[(\tau-c_2)\mu+(\tau-c_1)\gamma\right] -$$

$$- N_2(\tau)\,\frac{A(\tau)\,S_1(\tau)}{d(\tau)}\left(\frac{\mu}{\tau-c_1}+\frac{\gamma}{\tau-c_2}\right)\Big\}\frac{d\tau}{\tau+t},$$

$$B(\tau)=\frac{A(\tau)\,S_1(\tau)}{d(\tau)},$$

$$C(\tau)=N_1(\tau)\,(\tau-c_1)\,(\tau-c_2)-N_2(\tau)\,\frac{A(\tau)\,S_1(\tau)}{d(\tau)}.$$

Матричное уравнение (27) есть обычная система сингулярных интегральных уравнений.

Регуляризуем (27).

Обозначая

$$K\varphi\equiv(t-c_1)\,(t-c_2)\,\varphi(t)+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{B(\tau)\,\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{C(\tau)\,\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau=f(t),$$

$$M\psi\equiv(t-c_1)(t-c_2)\,\psi(t)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{B(\tau)\,\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

регуляризуем слева и справа

$$MK\varphi=Mf, \tag{28}$$

$$KM\psi=f, \tag{29}$$

или

$$MK\varphi\equiv\Big((t-c_1)^2(t-c_2)^2+B(t)B(t)\Big)\,\varphi(t)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{(t-c_1)(t-c_2)-(\tau-c_1)(\tau-c_2)}{\tau-t}\,B(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{B(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau-\sigma)}\,d\sigma\right\}B(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{(t-c_1)(t-c_2)}{\pi}\int_0^1 \frac{C(\tau)\varphi(\tau)}{\tau+t}\,d\tau\, -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{B(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau+\sigma)}\,d\sigma\right\}C(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = Mf\,.$$

$$KM\psi \equiv \Big((t-c_1)^2(t-c_2)^2 + B(t)B(t)\Big)\psi(t)\, +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1 (c_1+c_2-t-\tau)\,B(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{C(\tau)(\tau-c_1)(\tau-c_2)\,\psi(\tau)\,d\tau}{\tau+t}\, +$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{B(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau-\sigma)}\,d\sigma\right\}B(\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau\, +$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{C(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau+\sigma)}\,d\sigma\right\}B(\tau)\,\psi(\tau) = f(t)\,. \qquad /29'/$$

Уравнения (28) и (29) – фредгольмовы.

Найдя все решения (28), (29), можно выделить решения исходного уравнения. Рассуждения те же самые, что и в § 1.

Отметим, что в $f(t)$ включаются μ и Γ. Некоторые компоненты μ и Γ являются произвольными. Но нужно брать такие μ и Γ, которые допускают разрешимость (28), (29).

Если уравнения (28), (29) разрешимы для любых правых частей, то решение исходного уравнения не единственно, и для каждого выбора μ и Γ получаем другое решение.

§ 4. В случае, когда

1) $\det \| \mathcal{I} - S_2(t) \| = 0$ в некоторых точках $[0,1]$, и

2) $\det \| T \| = 0$ или $\det \| S \| = 0$ в некоторых точках $[0,1]$, можно брать следующий регуляризатор

$$M\psi \equiv (\mathcal{I} - S^2(t))\psi(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S_1(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \,, \tag{30}$$

Если $\det \| \mathcal{I} - S_2(t) \pm i\, S_1(t) \| \neq 0$ на $[0,1]$, то уравнение (30) является нормальным.

Перепишем уравнение (8) следующим образом:

$$K[u,v] \equiv u(t) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{N_1(\tau)u(\tau) - N_2(\tau)v(\tau)}{\tau + t}\,d\tau = \lambda \,, \tag{31}$$

$$A[u,v] \equiv (\mathcal{I} - S_2(t))v(t) - S_1(t)u(t) = 0 \,.$$

Регуляризуем (31)

$$\begin{aligned} MK[u,v] &= M\lambda \,, \\ A[u,v] &= 0 \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Запишем (32) подробно:

$$\begin{aligned} MK[u,v] \equiv {} & (\mathcal{I} - S_2(t))u(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S_1(\tau)u(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \\ & + (\mathcal{I} - S_2(t))\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{S_1(\tau)}{\tau - t}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{v(\sigma)}{\sigma - \tau}\,d\sigma\right\}d\tau + \end{aligned}$$

$$+ (\mathcal{I} - S_2(t)) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathcal{N}_1(\tau) u(\tau) - \mathcal{N}_2(\tau) v(\tau)}{\tau + t} d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{S_1(\tau)}{\tau - t} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathcal{N}_1(\sigma) u(\sigma) - \mathcal{N}_2(\sigma) v(\sigma)}{\sigma + \tau} d\sigma \right\} d\tau \equiv$$

$$\equiv (\mathcal{I} - S_2(t)) u(t) + S_1(t) v(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{S_2(\tau) - S_2(t)}{\tau - t} v(\tau) d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{S_1(\sigma)}{(\sigma - t)(\tau - \sigma)} d\sigma \right\} v(\tau) d\tau +$$

$$+ (\mathcal{I} - S_2(t)) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathcal{N}_1(\tau) u(\tau) - \mathcal{N}_2(\tau) v(\tau)}{\tau + t} d\tau -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{S_1(\sigma)}{(\sigma - t)(\sigma + \tau)} d\sigma \right\} \left(\mathcal{N}_1(\tau) u(\tau) - \mathcal{N}_2(\tau) v(\tau) \right) d\tau =$$

$$= (\mathcal{I} - S_2(t)) \lambda - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{S_1(\tau) \lambda}{\tau - t} d\tau ,$$

$$A[u, v] \equiv - S_1(t) u(t) + (\mathcal{I} - S_2(t)) v(t) = 0 .$$

Уравнения (32) можно записать в компактном виде

$$\mathcal{N} \varphi \equiv a(t) \varphi(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mathcal{N}(\tau, t) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \tag{33}$$

где

$$\varphi(t) \equiv (u_1, u_2, \ldots, u_{10}, v_1, v_2, \ldots, v_{10}) ,$$

$$a(t) \equiv \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{J} - S_2(t) & S_1(t) \\ \hline -S_1(t) & \mathcal{J} - S_2(t) \end{array} \right),$$

$$\mathcal{N}(\tau,t) \equiv \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \dfrac{(\mathcal{J}-S_2(t))\mathcal{N}_1(\tau)}{\tau+t} - \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{S_1(\sigma)}{(\sigma-t)(\sigma+\tau)}\, d\sigma\, \mathcal{N}_1(\tau) \end{array} & \begin{array}{c} \dfrac{S_2(\tau)-S_2(t)}{\tau-t} - \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{S_1(\sigma)}{(\sigma-t)(\tau-\sigma)}\, d\sigma - \\ -\dfrac{(\mathcal{J}-S_2(t))\mathcal{N}_2(\tau)}{\tau+t} + \\ +\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{S_1(\sigma)}{(\sigma-t)(\sigma+\tau)}\, d\sigma\, \mathcal{N}_2(\tau) \end{array} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

$f(t) \equiv (M\lambda,\ 0, 0, \dots, 0)$ – вектор.

Если $\det \| a(t) \| \neq 0$ на $[0,1]$, то уравнение (33) является обычным уравнением Фредгольма второго рода.

Если уравнение $M\psi = 0$ не имеет нетривиальных решений в классе $H^{(1+\frac{1}{2})}$, то (8) и (33) эквивалентны.

Если уравнение $M\psi = 0$ имеет нетривильаные решения, то решения уравнения (33) являются решениями системы

$$\begin{aligned} K[u,v] &= \lambda + \psi, \\ A[u,v] &= 0, \end{aligned} \tag{34}$$

где ψ такие решения уравнения $M\psi = 0$, которые допускают разрешимость (34).

При $\nu' = \nu'' = \frac{1}{2}$ матрицы $S_1(t)$ и $S_2(t)$ являются квазидиагональными. В этом случае целесообразно регуляризовать не всю систему в целом, а группируя уравнения попарно, регуляризовать каждую пару уравнения отдельно.

На рисунках 1,2,3 приведены графики определителей первых "ящиков" матриц $\mathcal{J} - S_2(t)$, $T(t)$, $S(t)$, соответственно.

Графики определителей остальных "ящиков" этих матриц аналогичны приведенным на рис. 1, 2, 3.

Видим, что в некоторых точках [0,1] определители

$$\det\|\mathcal{J}-S_2(t)\|, \quad \det\|T(t)\|, \quad \det\|S(t)\|$$

обращаются в нуль. Поэтому регуляризация с помощью методов § 1 и § 2 невозможна. В этих случаях следует применять регуляризацию § 3 и § 4.

Если применяем регуляризацию § 3, то уравнения (8) приводятся к уравнениям Фредгольма третьего рода. Если применим регуляризацию § 4, то получаются интегральные уравнения Фредгольма второго рода $(\det\|a(t)\|\neq 0)$.

Работа выполнена под руководством Е.П. Жидкова с помощью Н.Н. Говоруна, Г.И. Макаренко, которым автор выражает глубокую благодарность.

Литература

1. В.Целлнер. ЖЭТФ, т.36, вып. 4, 1959, 1103-1109.
2. *George Salzman. Phys. Rev. 108, N. 6, 1957, 1619-1628.*
3. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. ОГИЗ ГИЗ, 1946.
4. Н.И. Мусхелашвили. Сообщения АН Груз. ССР, т.III, № 10, 1942.
5. Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. Физ.мат. 1958.
6. Н.П.Велуа. Системы сингулярных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 января 1962 года.

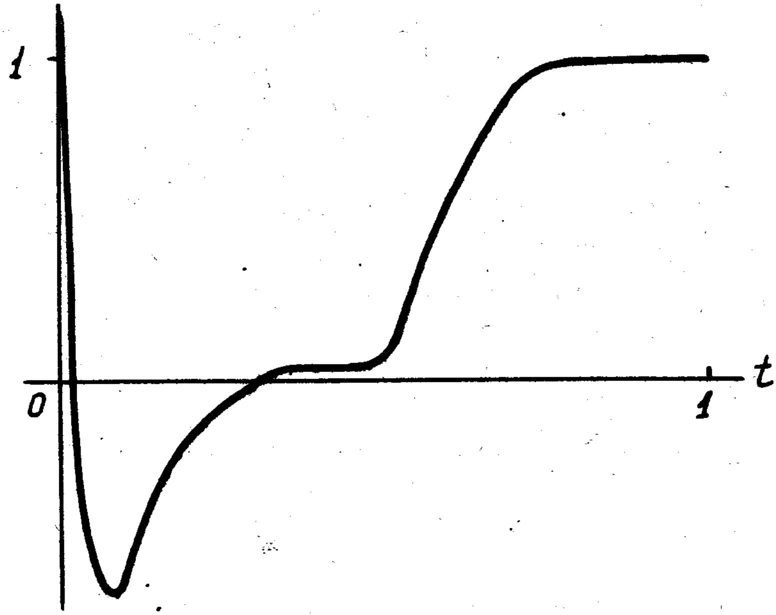

Рис. 1.

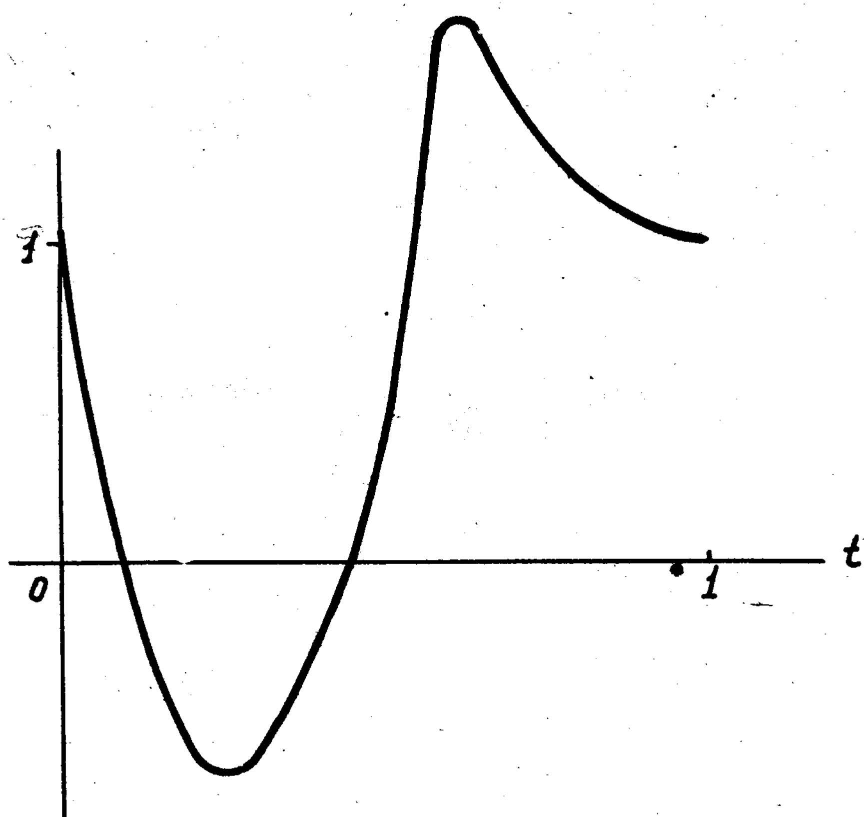

Рис. 2.

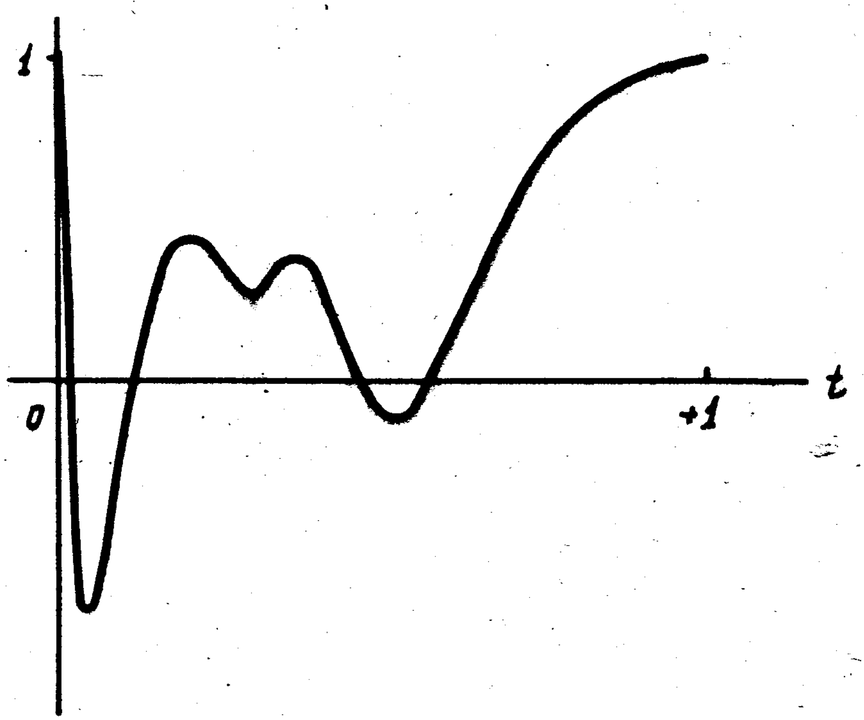

Рис. 3.