ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р. Денчев

Р-890

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ЛОУ

Дубна 1962

Р. Денчев

Р-890

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ЛОУ

Рассмотрим следующую задачу:

Нужно найти функцию $h(z)$, обладающую свойствами:

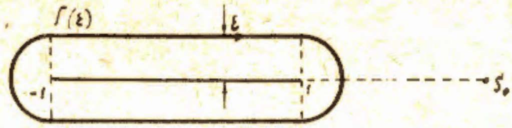
1. $h(z)$ аналитическая во всех точках плоскости, разрезанной вдоль интервала /−1, 1/ за исключением некоторой вещественной точки s_0, $|s_0|>1$, в которой она имеет простой полюс с вычетом $a \leq 0$. В бесконечной точке $h(z)$ регулярна и $h(\infty) = A$, A – вещественно.

2. $h(\bar{z}) = \overline{h(z)}$ для всех z, в которых $h(z)$ определена.

3. Почти всюду на разрезе существуют угловые граничные значения[x/] слева $h^{+}(s)$, суммируемые со степенью p, $p > 1$ и удовлетворяющие почти всюду соотношению

$$Im\, h^{+}(s) = |h^{+}(s)|^{2}. \qquad /1/$$

Найдем явный вид решений этой задачи, пользуясь методом, аналогичным примененному в [/1/]. Пусть $h(z)$ функция, обладающая свойствами 1 –3. Применим теорему Коши к функции $\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}$ и контуру $\Gamma(\varepsilon)$



Р и с. 1.

---

x/ Функция $h(z)$ имеет угловое граничное значение $h^{+}(s), (h^{-}(s))$ слева /справа/ в точке s контура Γ, если существует предел $h(z)$, когда z с соответствующей стороны стремится к s по всем некасательным к Γ путям.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\epsilon)}\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = Res(\infty) + Res(s_0) + Res(z) \qquad /2/$$

$$Res(\infty) = -\,h(\infty) = -\,A$$

$$Res(s_0) = \frac{1}{s_0 - z}\,Res\,h(s_0) = \frac{a}{s_0 - z}$$

$$Res(z) = h(z).$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\epsilon)}\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{h(\sigma + i\epsilon)}{\sigma + i\epsilon - z}\,d\sigma \qquad /3/$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{h(\sigma - i\epsilon)}{\sigma - i\epsilon - z}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1+\gamma_2}\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta .$$

При $\epsilon \to 0$ получаем[x/]

$$\lim \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\epsilon)}\frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{h^{+}(\sigma) - h^{-}(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Im\,h^{+}(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma .$$

При этом мы используем свойство 2, из которого следует, что существует $h^{-}(s)$ и

$$h^{-}(s) = \overline{h^{+}(s)}.$$

Из /2/, получаем

$$h(z) = A - \frac{a}{s_0 - z} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Im\,h^{+}(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma . \qquad /4/$$

Пользуясь формулой /4/, подсчитаем $Im\,h(z)$.

[x/] Предполагаем, что функция $h(z)$ такая, что предельные переходы в /3/ можно сделать.

$$Im\ h(z) = \left(-\frac{a}{|z-a_0|^2} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|h^+(\sigma)|^2}{|\sigma - z|^2}\,d\sigma\right) Im\ z$$

$$= P(z)\ Im\ z. \qquad /5/$$

Так как $a \leq 0$, то $P(z) > 0$ и, следовательно, если $Im\ z \neq 0$, то и $Im\ h(z) \neq 0$, так что $h(z)$ не имеет невещественных нулей.

Введем функцию

$$H(z) = -\frac{1}{h(z)}. \qquad /6/$$

Функция $H(z)$, аналитическая на плоскости с разрезом /-1, 1/, не имеет невещественных полюсов, так как $h(z)$ не имеет невещественных нулей, но может иметь полюсы на вещественной оси. В точке s, $H(z)$ имеет простой нуль. В бесконечной точке $H(z)$ регулярна, если $A \neq 0$ и $H(\infty) = -\frac{1}{A}$. Если $A = 0$, $H(z)$ имеет полюс в бесконечности.

Из 2, следует, что

$$H(\bar{z}) = \overline{H(z)}. \qquad /7/$$

На разрезе существуют угловые граничные значения $H^+(s)$ во всех точках, в которых существует и отлично от нуля $h^+(s)$. Из теоремы единственности для аналитических функций /см. 2/ следует, что множество, где $h^+(s) = 0$, имеет меру нуль, так что $H^+(s)$ существует почти всюду. Из /1/ получаем, что почти всюду

$$Im\ H^+(s) = 1. \qquad /8/$$

Из /5/ и /6/ получаем

$$Im\ H(z) = \frac{Im\ h(z)}{|h(z)|^2} = \frac{P(z)}{|h(z)|^2}\ Im\ z. \qquad /9/$$

Последнее соотношене показывает, что

$$\frac{Im\, H(z)}{Im\ z} > 0, \qquad /10/$$

Из /7/ и /10/ следует, что $H(z)$ является R – функцией x/, и, следовательно, имеет интегральное представление

$$H(z) = \mu z + \nu + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\sigma z}{\sigma - z}\, d\alpha(\sigma), \qquad /11/$$

где μ, ν – вещественные константы, $\mu \geq 0$, $\alpha(\sigma)$ – неубывающая функция ограниченной вариации.

По формуле обращения Стилтьеса – Перрона /см. [3] / имеем

$$\frac{\psi(\sigma+0)+\psi(\sigma-0)}{2} - \frac{\psi(c+0)+\psi(c-0)}{2} = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{\pi} \int_c^{\sigma} Im\, H(\xi + i\eta), \qquad /12/$$

где

$$\psi(\sigma) = \int_0^{\sigma} (1+\tau^2)\, d\alpha(\tau)$$

для любых вещественных c и σ.

Очевидно, $\psi(\sigma)$ не убывает. Из /12/ следует, что $\psi'(\sigma)$ существует почти всюду и

$$\psi'(\sigma) = 1/\pi\ Im\, H^{+}(\sigma). \qquad /13/$$

Вне разреза $Im\ H^{+}(\sigma) = 0$, так как $H(\sigma)$ регулярна и в силу /7/. На разрезе $Im\ H^{+}(\sigma)$ задается формулой /8/. Таким образом, получаем

$$\psi'(\sigma) = \begin{cases} 1/\pi & \text{почти всюду на } /-1,\ 1/ \\ 0 & \text{вне } /-1,\ 1/, \end{cases} \qquad /14/$$

Неубывающую функцию $\psi(\sigma)$ можно разложить /см. [4] / на три слагаемых

---

x/ R -функциями называются функции, регулярные в верхней и нижней полуплоскостях и обладающие свойствами /7/ и /10/. Для них имеется интегральное представление /11/ /см. [3] стр. 117/.

$$\psi(\sigma) = \phi(\sigma) + r(\sigma) + \theta(\sigma), \qquad /15/$$

где $\phi(\sigma)$ вполне непрерывная функция, $r(\sigma)$ –функция скачков и $\theta(\sigma)$ – неубывающая сингулярная функция. [x] При этом

$$\phi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\sigma} \psi'(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0 & \sigma \le -1 \\ 1/\pi\,(\sigma+1) & -1 \le \sigma \le 1 \\ 2/\pi & \sigma \ge 1 \end{cases} \qquad /16/$$

$$r(\sigma) = \sum_k r_k\, \epsilon(\sigma - c_k),$$

где

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad \sigma \le 0 \\ 1 & \text{для} \quad \sigma > 0 \end{cases}$$

$r_k \ge 0$, c_k вещественные.

Очевидно, $\theta(\sigma) = const$ вне $(-1, 1)$.

Подставляя в /11/, получим

$$H(z) = \mu z + \nu + J(z) + R(z) + T(z), \qquad /17/$$

где

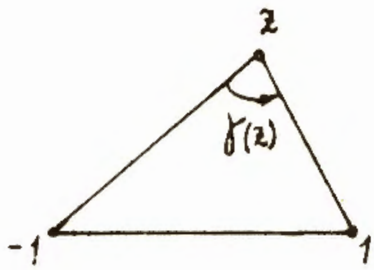
$$J(z) = 1/\pi \int_{-1}^{1} \frac{1+\sigma z}{\sigma - z}\,\frac{d\sigma}{1+\sigma^2} = -1/\pi\,\ln\frac{1-z}{1+z} =$$

$$= -1/\pi\,\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + \frac{i}{\pi}\,\gamma(z) \qquad /18/$$

$\gamma(z)$ – угол, под которым виден отрезок $/-1, 1/$ из точки z

---

[x] Сингулярной функцией называется отличная от постоянной непрерывная функция с конечным изменением, производная которой почти везде равна нулю.



Р и с. 2.

$$R(z) = \sum_k \frac{r_k}{1 + c_k^2} \; \frac{1 + c_k z}{c_k - z} \qquad /19/$$

$$T(z) = \int_{-1}^{1} \frac{1 + \sigma z}{\sigma - z} \; \frac{d\theta(\sigma)}{1 + \sigma^2} \, . \qquad /20/$$

Так как $H(z)$, $I(z)$, $R(z)$, $T(z)$ ограничены на бесконечности, то $\mu = 0$ и окончательно имеем

$$H(z) = \nu + 1/\pi \, \ln \left| \frac{1-s}{1+s} \right| + i\pi \, \gamma(z) + R(z) + T(z) \qquad /21/$$

Покажем, что все точки c_k содержатся в интервале /-1, 1/. Действительно, на вещественной оси для $|s| > 1$ имеем

$$H(s) = \nu + 1/\pi \, \ln \left| \frac{1-s}{1+s} \right| + R(s) + T(s) \qquad /22/$$

В бесконечной точке $H(s)$ непрерывна , так как

$$\lim_{s\to\pm\infty} H(s) = \nu - \Sigma \frac{r_k c_k}{1+c_k^2} - \int_{-1}^{1} \frac{\sigma\, d\theta(\sigma)}{1+\sigma^2}$$

Дальше из /22/ видно, что

$$H(1+0) = -\infty, \quad H(-1-0) = +\infty .$$

Если вне интервала /– 1, 1/ имеется точка c_k, то $H(c_k - 0) = +\infty$, $H(c_k + 0) = -\infty$ и, следовательно, $H(s)$ имеет хотя бы два нуля вне /–1,1/, один – слева от c_k и один – справа от c_k. Но тогда, $h(z)$ должно иметь хотя бы два полюса вне /–1,1/, тогда как $h(z)$ имеет полюс только в точке s_0. Полученное противоречие показывает, что все точки c_k находится в интервале /–1,1/.

Из /6/ и /21/ получаем[x/]

$$h(z) = \frac{-1}{\nu + 1/\pi \ \ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + i/\pi\ \gamma(z) + R(z) + T(z)} . \qquad /23/$$

Из условия $h(\infty) = A$ имеем

$$1/A + \nu - \Sigma \frac{r_k c_k}{1+c_k^2} - \int_{-1}^{1} \frac{\sigma d\theta(\sigma)}{1+\sigma^2} = 0 . \qquad /24/$$

По условию рассматриваемой задачи $h(z)$ имеет полюс в точке s_0 и, следовательно, в этой точке обращается в нуль знаменатель в /23/.

$$\nu + 1/\pi \ \ln\left|\frac{1-s_0}{1+s_0}\right| + \Sigma \frac{r_k}{1+c_k^2}\ \frac{1 + c_k s_0}{c_k - s_0} + \int_{-1}^{1} \frac{1+\sigma s_0}{\sigma - s_0}\ \frac{d\theta(\sigma)}{1+\sigma^2} = 0 . \qquad /25/$$

Подсчитаем вычет $h(z)$ в s_0

$$\operatorname{Res} h(s_0) = \frac{-1}{2/\pi\ \frac{1}{s_0^2 - 1} + \Sigma \frac{r_k}{(c_k - s_0)^2} + \int_{-1}^{1} \frac{d\theta(\sigma)}{(\sigma - s_0)^2}}$$

[x/] При рассмотрении в [1] не учитывается член $T(z)$.

По условию этот вычет равняется a и получаем соотношение

$$1/a + 2/\pi \frac{1}{s_0^2 - 1} + \Sigma \frac{r_k}{(c_k - s_0)^2} + \int_{-1}^{1} \frac{d\theta(\sigma)}{(\sigma - s_0)^2} = 0 . \qquad /26/$$

Итак, мы получили следующий результат:

Если $h(z)$ решение нашей задачи, то она представляется формулой /23/, где $\gamma(z)$, $R(z)$, $T(z)$ определяются из /18/, /19/, /20/; $\theta(\sigma)$ – неубывающая сингулярная функция; ν, r_k, c_k – вещественные константы, удовлетворяющие соотношениям /24/ – /26/ и

$$r_k \geq 0, \quad |c_k| \leq 1 . \qquad /27/$$

Покажем теперь обратно, что все функции, определяемые формулой /23/, с указанными условиями являются решениями нашей задачи.

Рассмотрим функцию $h(z)$, определяемую формулой /23/. Из формулы видно, что $h(z)$ аналитическая всюду на плоскости с разрезом /-1, 1/ и может иметь особенности только в точках, где обращается в нуль знаменатель в /23/. Этот знаменатель совпадает с функцией $H(z)$ из /21/. Имеем

$$\operatorname{Im} H(z) = \frac{\gamma(z)}{\pi} + \left(\Sigma \frac{r_k}{|c_k - z|^2} + \int_{-1}^{1} \frac{d\theta(\sigma)}{|\sigma - z|^2}\right) \operatorname{Im} z .$$

Отсюда видно, что если $\operatorname{Im} z \neq 0$, то, соответственно, и $\operatorname{Im} H(z) \neq 0$, так как $\gamma(z) \operatorname{Im} z > 0$ и таким образом $H(z)$ не имеет невещественных нулей. $\operatorname{Im} H(z) = 0$ только для z вещественного, $|z| > 1$. Таким образом $H(z)$ может обратиться в нуль только для таких значений z. Для них $H(z)$ задается формулой /22/.

Исследуем функцию / 22/. Она непрерывна вне интервала /-1, 1/, так как $|c_k| \leq 1$ и, как мы видели, непрерывна в бесконечной точке. Кроме того, она возрастает вне / -1, 1/, так как возрастают $\ln\left|\frac{1-s}{1+s}\right|$, $T(s)$, $R(s)$. Следовательно, имеется один и только один нуль вне / -1, 1/ и значит $h(z)$ имеет только один полюс. Соотношение /25/ показывает, что этот полюс находится в точке s_0. Вычет в этом полюсе равняется a, как следует из /26/. Из /23/ видно, что $h(z)$ регулярна в бесконечности, а из /24/ следует, $h(\infty) = A$. Таким образом, все требования условия 1 удовлетворены.

Условие 2 проверяется непосредственно.

Существование $h^{+}(s)$ почти всюду на разрезе следует из граничных свойств интеграла типа Коши-Стилтьеса /см/2/ /. При этом

$$\overset{+}{h}(s) = \frac{-1}{\nu + 1/\pi \ \ln \frac{1-s}{1+s} + R(s) + T(s) + i} \qquad /28/$$

Из этой формулы следует /1/.

Таким образом, функция $h(z)$ определяемая формулой /23/, обладает свойствами 1-3 и, значит, является решением нашей задачи.

Окончательно полученный результат можно сформулировать следующим образом:

Все решения рассматриваемой задачи даются формулой /23/ с указанными выше условиями.

Из соотношения /26/ следует, что $a < 0$ и

$$1/a + 2/\pi \ \frac{1}{s_0^2 - 1} \leq 0 \, .$$

Итак, для того, чтобы задача имела решение, необходимо выполнение неравенств

$$-\pi/2 \ (s_0^2 - 1) \leq a < 0 \, . \qquad /29/$$

Если эти неравенства не выполнены, задача не имеет решения. В частности, она не имеет решения при $a = 0$ и $A \neq 0$.

Пусть в /4/ z стремится к вещественной точке s сверху. Тогда, так как почти всюду существует $h^{+}(s)$ и имеет место формула Сохоцкого /см./2/ / получаем, что почти всюду выполняется соотношение

$$u(s) = A - \frac{a}{s_0 - s} + 1/\pi \int \frac{v(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma\,, \qquad /30/$$

где $u(s)$, $v(s)$ – вещественная и мнимая часть $h^+(s)$.

Условие /1/ можно записать в виде

$$v(s) = u^2(s) + v^2(s)\,. \qquad /31/$$

Итак, если $h(z)$ решение краевой задачи, то функции $u(s)$ и $v(s)$ удовлетворяют почти всюду системе уравнений /30/, /31/.

Нетрудно показать и обратное. Если $u(s)$, $v(s)$ – решение системы /30/, /31/, то функция

$$h(z) = A - \frac{a}{s_0 - z} + 1/\pi \int_{-1}^{1} \frac{v(\sigma)}{\sigma - z}\, d\sigma$$

является решением краевой задачи.

Таким образом, краевая задача и система уравнений /30/, /31/ эквивалентны. Тем самым нами найден явный вид всех решений этой системы.

В частности, как мы видели, из /29/ следует, что система уравнений

$$u(s) = A + 1/\pi \int_{-1}^{1} \frac{v(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma$$

$$v(s) = u^2(s) + v^2(s)$$

не имеет решения если $A \neq 0$.

Пусть $h(z)$ решение рассматриваемой задачи. Исследуем функцию $h^+(s) = u(s) + iv(s)$. Из /28/ следует, что

$$u(s) = -\frac{L(s)}{L^2(s)+1} \qquad v(s) = \frac{1}{L^2(s)+1}\,, \qquad /32/$$

где

$$L(s) = \nu + 1/\pi \, \ln \frac{1-s}{1+s} + R(s) + T(s)\,.$$

Прежде всего из /1/ следует, что $h^+(s)$ ограничена. Действительно, если $h^{+}(s) = |h^{+}(s)|\, e^{i\delta(s)}$, то из /1/ получаем

$$|h^{+}(s)| = \sin\delta(s).$$

Обозначим через G_1 множество точек c_k, а через G_2 множество точек, в которых производная сингулярной функции $\theta(\sigma)$ не существует или отлична от нуля.

Пусть $\Delta = (\alpha, \beta)$ интервал, оба конца которого принадлежат $G_1 \cup G_2$, а пересечение Δ $(G_1 \cup G_2)$ пустое.

Тогда, очевидно,

$$L(\alpha+0) = -\infty, \quad L(\beta-0) = +\infty$$

и так как $L(s)$ непрерывна в (α, β), то в этом интервале существует хотя бы одна точка, в которой $L(s)$ обращается в нуль. В этой точке $u(s)$ обращается тоже в нуль, а $v(s)$ – в единицу, как видно из /32/. С другой стороны, очевидно, в точках α и β функции $u(s)$ и $v(s)$ обращаются в нуль. Так как $v(s)$ непрерывна в (α, β), то будут хотя бы две точки, в которых она принимает значение $\frac{1}{2}$. В этих точках $u(s)$ принимает значения $\pm\frac{1}{2}$, как видно из /31/.

Из этих рассуждений следует, что если множество $G_1 \cup G_2$ такое, что существует некоторая точка, в каждой окрестности которой содержится интервал типа интервала (α, β) /т.е.концы которого принадлежат $G_1 \cup G_2$ а внутри него нет точек $G_1 \cup G_2$ /, то функции $u(s)$ и $v(s)$ / а значит и $h^{+}(s)$ / будут разрывными в этой точке. В частности, $h^{+}(s)$ будет разрывна, если G_1 состоит из бесконечного множества изолированных точек, а G_2—замкнутое множество.

Литература

1. L.Castillejo, R.H.Dalitz, F.J.Dyson. Phys.Rev. 101, 1 (1956).
2. И.И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций. Москва, 1950.
3. Н.И. Ахиезер. Классическая проблема моментов, Москва, 1961 г.
4. И.П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, Москва, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 января 1962 г.