

1-09
889

+



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

А.А. Логунров, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников

P - 889

ПОВЕРХНОСТЬ ОСОБЫХ ТОЧЕК
ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА

Дубна 1962

А.А. Логунов, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников

P-889

ПОВЕРХНОСТЬ ОСОБЫХ ТОЧЕК
ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА

1365/3 48.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

В в е д е н и е

1. В последние годы большое количество работ было посвящено исследованию аналитических свойств интегралов Фейнмана в теории возмущений. В работах ^{/1-5/} внимание было сосредоточено в основном на изучении свойств интегралов Фейнмана при евклидовых значениях внешних импульсов. Это оказалось достаточным для получения обычных дисперсионных соотношений, но не позволило доказать справедливость двойных спектральных представлений Мандельштама ^{/6/}. Установленная в ^{/7/} аналитичность амплитуды рассеяния мезона на мезоне /в любом порядке теории возмущений/ в некоторой комплексной области также не решает этой задачи. В работах ^{/8,9/} было показано, что уравнения, полученные Ландау ^{/3/} для особых точек в евклидовой области, определяют и комплексные особенности диаграммы Фейнмана.

В настоящей работе на основе этих уравнений получены ^{/§ 2/} параметрические уравнения поверхности собственных особенностей данной диаграммы. В ^{§ 3} полученные уравнения проиллюстрированы двумя примерами. В качестве первого примера рассмотрена изученная ранее ^{/10,18-20/} четырехугольная диаграмма. Затем исследуется диаграмма упругого рассеяния, изображенная ребрами и вершинами тетраэдра /иногда называемая распечатанным конвертом /, в случае одинаковых масс на всех линиях диаграммы /внутренних и внешних/. Попутно ^{/ § 1/} получена квадратичная форма произвольной диаграммы, выраженная через матрицу инцидентности. В дополнении Б рассмотрена диаграмма собственной энергии, которая является простейшим примером расходящейся диаграммы. На этом примере проиллюстрировано появление т.н. "нефизических особенностей" на втором римановом листе рассматриваемой функции.

§ 1. Квадратичная форма диаграммы Фейнмана

2. Рассмотрим произвольную диаграмму Фейнмана с n узлами и l внутренними линиями. Все линии диаграммы ориентируем, причем внешние линии направим к соответствующим узлам, а направления на внутренних линиях зададим произвольно. Структуру такой диаграммы можно полностью охарактеризовать некоторой матрицей E из n строк и l столбцов. Для этого за-

нумеруем в отдельности узлы и внутренние линии диаграммы. Элемент $\epsilon_{i\nu}$ матрицы E определяется следующим образом:

$$\epsilon_{i\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если линия } \nu \text{ выходит из узла } i, & /1.1/ \\ -1, & \text{если линия } \nu \text{ входит в узел } i, \\ 0, & \text{если узел } i \text{ не принадлежит линии } \nu. \end{cases}$$

Такая матрица называется матрицей инцидентности.^{x/}

Пусть k_ν - импульсы на внутренних линиях, p_i - внешние импульсы диаграммы; импульс p_i тождественно равен нулю, если в узел i не входит внешняя линия. Закон сохранения импульса в узлах диаграммы имеет вид^{xx/}

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} \epsilon_{i\nu} k_\nu = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad /1.2/$$

Для совместности системы уравнений /1.2/ необходимо выполнение закона сохранения внешних импульсов

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0. \quad /1.3/$$

Это следует из того, что в каждом столбце матрицы E только два элемента отличны от нуля, причем один из них равен 1, а другой - -1 и, следовательно, сумма элементов в каждом столбце равна нулю.

В качестве примера приведем матрицу инцидентности для двух диаграмм рассеяния, рассмотренных в § 3. Для четырехугольной диаграммы, показанной на рис. 1 /п. 6/, матрица E_1 имеет вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для диаграммы в форме тетраэдра /п. 7, рис. 2/ матрица инцидентности равна

^{x/} Матрица инцидентности введена Пуанкаре^{/11/} в 1901 г. о топологических свойствах графов и о роли матрицы инцидентности см. /12,13,14/.

^{xx/} См. также /15,23/. Формула /1.2/ является частным случаем общего выражения для Δ -границы одномерной цепи /см. /12/ глава 7/.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. При изучении аналитических свойств вклада в S -матрицу от диаграммы Фейнмана достаточно рассмотреть случай, когда каждой внутренней линии диаграммы соответствует скалярный множитель $(k_\nu^2 - m_\nu^2 + i\epsilon)^{-1}$.

В этом случае вклад от диаграммы / с точностью до числового множителя / равен $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} I_\epsilon$, где

$$I_\epsilon = \frac{i^{l-n+1}}{(4\pi)^{2n} \pi^2} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^l \frac{da_\nu}{a_\nu^2} \exp \left\{ -i \sum_{\nu=1}^l a_\nu (m_\nu^2 - i\epsilon) \right\} \times \\ \times \int \dots \int \prod_{j=1}^n d^4x_j \exp \left\{ -i/4 \sum_{\nu=1}^l \frac{1}{a_\nu} \left(\sum_{j=1}^n \epsilon_{j\nu} x_j \right)^2 + i \sum_{j=1}^n p_j x_j \right\}. \quad /1.4/$$

Интеграл /1.4/ по a , вообще говоря, расходится. Однако существует класс диаграмм, для которых этот интеграл сходится /таковы, например, диаграммы, в каждом узле которых сходятся три линии и в которых, кроме того, нет собственно энергетических петель. Рассмотрим сначала связную диаграмму из этого класса. Интеграл /1.4/ можно преобразовать к виду

$$I_\epsilon = \delta \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \cdot T_\epsilon(p),$$

где

$$T_\epsilon(p) = \frac{i^{l-n+1}}{(4\pi)^{2n-1}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^l \frac{da_\nu}{a_\nu^2} \exp \left\{ -i \sum_{\nu=1}^l a_\nu (m_\nu^2 - i\epsilon) \right\} \times \\ \times \int \dots \int \prod_{j=1}^{n-1} d^4x_j \exp \left\{ -i/4 \sum_{j,k=1}^{n-1} d_{jk} x_j x_k + i \sum_{j=1}^{n-1} p_j x_j \right\}; \quad /1.5/$$

$$d_{jk} = \sum_{\nu=1}^{\ell} \frac{\epsilon_{j\nu} \epsilon_{k\nu}}{a_{\nu}} \quad /1.6/$$

/Мы предполагаем, что в узел n входит исчезающий тождественно внешний импульс $p_n \neq 0$ /. Так как диаграмма связна, определитель $d(a)$ матрицы $(d_{jk})(j, k=1, \dots, n-1)$ не равен нулю. Выполняя интегрирование по x_1, \dots, x_{n-1} , получим

$$T_{\epsilon}(p) = (-1)^{n-1} i^{\ell} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \prod_{\nu=1}^{\ell} \frac{da_{\nu}}{a_{\nu}^2} \frac{1}{d^2(a)} \exp \left\{ i \sum_{j,k=1}^{n-1} \tilde{d}_{jk} p_j p_k - i \sum_{\nu=1}^{\ell} a_{\nu} (m_{\nu}^2 - i\epsilon) \right\}, \quad /1.7/$$

где (\tilde{d}_{jk}) - матрица обратная к $(d_{jk})(j, k=1, \dots, n-1)$.

Из /1.7/ видно, что функция $T_{\epsilon}(p)$ зависит лишь от скалярных произведений внешних импульсов $p_j p_k$. Выражение /1.7/ было получено нами из /1.4/ лишь для псевдоевклидовых импульсов p , но непосредственно из формулы /1.7/ видно, что правая часть этой формулы определена при любых p с вещественными скалярными произведениями.

Чтобы выделить δ -функцию из интеграла /1.4/, мы проинтегрировали по x_p и этим нарушили симметрию подынтегрального выражения относительно x -ов. Заметим однако, что определитель $d(a)$ остался бы тем же самым, если мы проинтегрировали по любой переменной x_j /вместо x_n /. Это следует из симметрии правой части легко проверяемого равенства:

$$d(a) \equiv \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1\ n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1\ 1} & \dots & d_{n-1\ n-1} \end{vmatrix} = 1/n \lim_{\lambda \rightarrow 0} 1/\lambda \begin{vmatrix} d_{11} + \lambda & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} + \lambda & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} + \lambda \end{vmatrix}$$

/для получения этого равенства достаточно воспользоваться тем, что в силу свойств матрицы инцидентности $\sum_{j=1}^n d_{ij} = 0$ при каждом $i=1, \dots, n$

Пусть a_1, \dots, a_ℓ — произвольные положительные числа. Обозначим переменные интегрирования в /1.7/ через a'_ν и сделаем замену переменных

$$a'_\nu = \lambda a_\nu, \quad \nu = 1, \dots, \ell,$$

причем новые переменные a_ν подчиним условию

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu = 1.$$

После интегрирования по λ от 0 до ∞ получаем:

$$T_\ell(p) =$$

$$= (2n - \ell - 3)! \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\delta(1 - \sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu)}{d^2(a) [Q(a, p) + i\epsilon \sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu]^{2n - \ell - 2}} \prod_{\nu=1}^{\ell} \frac{da_\nu}{a_\nu^2}, \quad /1.8/$$

где

$$Q(a, p) = A(a, p) - M^2(a),$$

$$A(a, p) = -\frac{1}{d(a)} \begin{vmatrix} 0 & p_1 & \dots & p_{n-1} \\ p_1 & d_{11} & \dots & d_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1} & d_{n-11} & \dots & d_{n-1n-1} \end{vmatrix}, \quad M^2(a) = \sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu m_\nu^2. \quad /1.9/$$

Из вывода видно, что выражение /1.8/ не зависит от выбора положительных чисел a_ν /и они могут быть выбраны, в частности, все равными единице/. Эта независимость может быть доказана и непосредственно из /1.8/ и связана со следующей группой преобразований, оставляющих инвариантным интеграл /1.8/. Пусть a_ν и $a'_\nu (\nu = 1, \dots, \ell)$ произвольные положительные числа и пусть

$$a'_\nu = \left\{ \sum_{s=1}^{\ell} a'_s a_s \right\}^{-1} \sum_{s=1}^{\ell} a'_s a_s a_\nu. \quad /1.10/$$

Нетрудно видеть, что преобразование, обратное к /1.10/, имеет такой же вид:

$$a_{\nu} = \left\{ \sum_{s=1}^{\ell} a_s a'_s \right\}^{-1} \sum_{s=1}^{\ell} a'_s a'_s a'_{\nu} \quad /1.11/$$

и что последовательное применение преобразований типа /1.10/ / с разными a_{ν} / снова является преобразованием такого же типа; следовательно, преобразования типа /1.10/ действительно образуют группу. Якобиан преобразования /1.10/ равен /см. Дополнение А/

$$\frac{\partial a'_{\mu}}{\partial a_{\nu}} = \left\{ \frac{\sum_{s=1}^{\ell} a_s a_s}{\sum_{s=1}^{\ell} a'_s a_s} \right\}^{\ell} \quad /1.12/$$

Имея в виду, что знаменатель в интегральном выражении для $T(p)$ является однородной функцией от a степени ℓ , из /1.12/ получаем, что интеграл

$$\frac{T(p)}{(2n - \ell - 2)!} = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\delta(1 - \sum_{\nu=1}^{\ell} a_{\nu} a_{\nu})}{d^2(a) [Q(a, p) + i0]^{2n - \ell - 2}} \prod_{\nu=1}^{\ell} \frac{da_{\nu}}{a_{\nu}^2} \quad /1.13/$$

инвариантен относительно преобразования /1.11/.

Отметим, что преобразования /1.10/ и /1.11/ имеют смысл лишь при условии, что знаменатели $\sum_{s=1}^{\ell} a'_s a_s$ и $\sum_{s=1}^{\ell} a_s a'_s$ не равны нулю; это известно так, если /как в нашем случае/ все a_{ν} и a'_{ν} неотрицательны и не обращаются одновременно в нуль. Однако требование необращения в нуль знаменателя преобразования /1.10/ становится нетривиальным, если мы изменим контур интегрирования /по a / и введем в рассмотрение комплексные a /см. далее п. 4 § 2/.

§ 2. Особые точки диаграммы

4. Особые точки функции $T(p)$ определяются формой $Q(a, p)$. Этой же формой определяются и особые точки регуляризованного выражения вклада от диаграммы в случае, когда интеграл /1.7/ расходится /см. /15/; в Дополнении Б рассмотрен пример простейшей расходящейся диаграммы - диаграммы собственной энергии/. Формула /1.9/ дает явное выражение квадратичной формы $Q(a, p)$ любой диаграммы Фейнмана.

Из /1.13/ следует, что если $Q(a, p) \neq 0$ при всех неотрицательных a , не равных одновременно нулю, то функция $T(p)$ аналитична в точке p . Чтобы исследовать аналитические свойства функции $T(p)$ в точках, в которых уравнение $Q(a, p) = 0$ имеет решение при некоторых a из области интегрирования, можно деформировать контур интегрирования в /1.13/ в комплексной области значений a ^{x/}. При переходе к комплексным a , связь между a_ν , задаваемая δ -функцией в /1.13/ сохраняется.

В работе /8/, на основании леммы, сформулированной в приложении А работы /18/, показано, что необходимые условия существования особенности в евклидовой области, полученные Ландау /3/, остаются необходимыми условиями существования и произвольной комплексной особенности главной ветви функции $T(p)$.

Согласно этим условиям, для того, чтобы интеграл /1.13/ как функция от p имел особенность в точке p_0 , необходимо, чтобы система ^l уравнений относительно a

$$a_1 \frac{\partial Q(a, p_0)}{\partial a_1} = 0, \dots, a_l \frac{\partial Q(a, p_0)}{\partial a_l} = 0. \quad /2.1/$$

^{x/} Метод аналитического продолжения интегралов, зависящих от параметра, при помощи деформирования контура интегрирования является классическим в теории аналитических функций. В аналогичной задаче для функций двух переменных этим приемом пользовался Адамар /16/ еще в конце прошлого века. Применительно к интегралам, соответствующим диаграммам Фейнмана, этот метод аналитического продолжения использовался в /17,8,9,18/.

имела решение, удовлетворяющее условию

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} a_{\nu} a_{\nu} = 1 . \quad /2.2/$$

Точку p_0 назовем особой точкой диаграммы. Совокупность таких точек p_0 зависит от выбора положительных чисел a_1, \dots, a_{ℓ} . Эту совокупность обозначим $S(a) = S(a_1, \dots, a_{\ell})$. Особой поверхностью диаграммы назовем теоретико-множественную сумму

$$S = \bigcup_{a_{\nu} > 0} S(a_1, \dots, a_{\ell}) . \quad /2.3/$$

В силу однородности системы /2.1/, особая поверхность S состоит из таких точек p_0 , для которых эта система имеет нетривиальное решение.

Отметим, что понятие особой поверхности диаграммы несколько условно. Поверхность S не содержит всех особых точек многозначной функции $T(p)$ /на полной римановой поверхности этой функции/. Дополнительные особенности возникают за счет возможного обращения в нуль определителя $d(a)$, входящего в знаменатель подынтегрального выражения в /1.13/, когда рассматриваются не только положительные a . Эти особенности однако никогда не лежат на главном римановом листе /на т.н. "физическом" листе/ функции $T(p)$, определенной при вещественных p формулой /1.13/, поэтому мы не будем принимать их во внимание^{x/}. С другой стороны, поверхность S не состоит из одних только "физических" особенностей. Как увидим на ряде примеров /§ 3/, она всегда содержит и особенности, не лежащие на главном римановом листе функции $T(p)$. Особые точки интеграла /1.13/ при вещественных скалярных произведениях внешних импульсов принадлежат той части поверхности S , которая соответствует решениям / a_1, \dots, a_{ℓ} / системы /2.1/ с неотрицательными a .

^{x/} Наличие таких "нефизических" особенностей, которые к тому же не зависят от масс на внутренних линиях, проиллюстрировано в /9/ на примере вершинной части. См. также дополнение Б настоящей работы, где это показано на еще более простом примере собственно-энергетической части.

Если среди решений системы /2.1/ имеется такое, что ни одно из a_ν не равно нулю, то точку p_ρ будем называть собственной особой точкой диаграммы. В этом случае существует решение системы

$$\frac{\partial Q(a, p)}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial Q(a, p_\rho)}{\partial a_\ell} = 0, \quad (a_1 \neq 0, \dots, a_\ell \neq 0) \dots \quad /2.4/$$

Если в форме $Q(a, p)$ некоторое a_ν равно нулю, то как было показано в /24/ теорема 2, эта форма соответствует диаграмме, полученной из исходной стягиванием линии ν в точку. При этом внешний импульс в этой точке равен сумме внешних импульсов, приложенных на концах линии ν . Нетрудно видеть, что задача о нахождении всех особых точек диаграммы сводится к отысканию собственных особенностей данной диаграммы и всех диаграмм, полученных из нее стягиванием тех или иных линий в точку.

5. Рассмотрим множество всех собственных особых точек диаграммы /это множество может быть и пустым/. Введем однородную квадратичную функцию от p

$$\tilde{L}^2(a, p) = M^{-2}(a) A(a, p), \quad /2.5/$$

где $A(a, p)$ и $M^2(a)$ определены формулой /1.9/. Нетрудно показать, что система уравнений /2.4/ эквивалентна системе

$$\tilde{L}^2(a, p_\rho) = 1, \quad /2.6/$$

$$\frac{\partial \tilde{L}^2(a, p_\rho)}{\partial a_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, \ell. \quad /2.7/$$

Уравнение /2.6/ задает параметрическое семейство в пространстве внешних импульсов p . Условия /2.7/ означают, что требуется найти огибающую этого семейства. Для этого мы рассмотрим поверхность, сопряженную с /2.8/

или, что то же самое, квадратичную форму, обратную к /2.5/ /т.е. задаваемую обратной матрицей/. Согласно /1.6/ и /1.9/ эта форма имеет вид

$$L^2(a, x) = M^2(a) \sum_{\nu=1}^{\ell} \frac{1}{a_{\nu}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i\nu} x_i \right)^2. \quad /2.8/$$

Из того, что квадратичные формы $L^2(a, x)$ и $\tilde{L}^2(a, p)$ обратны друг другу^{x/}, легко получить, что

$$\tilde{L}^2(a, \frac{1}{2} \frac{\partial L^2(a, x)}{\partial x}) = L^2(a, x) \quad /2.9/$$

($\frac{1}{2} \frac{\partial L^2(a, x)}{\partial x}$, как и p -вектор с $4(n-1)$ составляющими $\frac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial x_{i\rho}}$, $i=1, 2, \dots, n-1, \rho=0, 1, 2, 3$).
Определим вектор p формулой

$$p = \frac{1}{2} \frac{\partial L^2(a, x)}{\partial x} = L(a, x) \frac{\partial L(a, x)}{\partial x}. \quad /2.10/$$

Так как формы L^2 и \tilde{L}^2 взаимно обратны, то при p , определяемом формулой /2.10/,
формулой /2.10/,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{L}^2(a, p)}{\partial p} = x. \quad /2.11/$$

Уравнения /2.10/, при фиксированных a , можно рассматривать как параметрические уравнения поверхности /2.8/, если x лежит на поверхности

$$L^2(a, x) = 1, \quad /2.12/$$

сопряженной к /2.6/

^{x/}Обратим внимание на аналогию между сопряженными однородными функциями L и \tilde{L} и лагранжевой и гамильтоновой функциями в классической механике /см. /21/ гл. X, § 54-55/.

Дифференцируя по a тождество /2.9/, учитывая /2.11/ и используя то, что функция $\frac{\partial}{\partial a_\nu} L^2(a, x)$ является однородной квадратичной формой от x , получаем

$$\frac{\partial}{\partial a_\nu} L^2(a, x) + \frac{\partial}{\partial a_\nu} \tilde{L}^2(a, \frac{1}{2} \frac{\partial L^2(a, x)}{\partial x}) = 0, \quad /2.13/$$

$$\nu = 1, \dots, \ell.$$

Из /2.13/ следует, что для того, чтобы имело место /2.7/ при p , определяемом формулой /2.10/, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial L^2(a, x)}{\partial a_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, \ell. \quad /2.14/$$

Таким образом, мы доказали, что поверхность, сопряженная к огибающей семейства поверхностей /2.6/, является огибающей семейства сопряженных поверхностей /2.12/.

Из /2.14/, используя /2.8/, /1.9/ и /1.12/, можно получить явные выражения для a_ν . Действительно, из /2.14/ получаем

$$a_\nu^2 = \left(\sum_{s=1}^{\ell} a_s m_s^2 \right)^2 \frac{1}{m_\nu^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i\nu} x_i \right)^2.$$

Используя нормировку /2.2/ и полагая

$$R_\nu = \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i\nu} x_i, \quad /2.15/$$

получаем

$$a_\nu = \left\{ \sum_{s=1}^{\ell} a_s \frac{|R_s|}{m_s} \right\}^{-1} \frac{|R_\nu|}{m_\nu}. \quad /2.16/$$

Формулы для a_ν приобретают особенно простой вид, если положить $a_\nu = m_\nu^2$. В этом случае, используя /2.12/, из /2.16/ получаем

$$a_\nu = \frac{|R_\nu|}{m_\nu} \quad /2.16a/$$

Если x_i принимают любые комплексные значения, то каждая функция

$$|R_\nu| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_{i\nu} x_i\right)^2}, \quad \nu = 1, \dots, \ell \quad /2.17/$$

двузначна. Если x_i вещественны, то для "физических" собственных особенностей $|R_\nu|$ положительны.

Подставляя значение a /2.16/ в /2.8/ получаем, что независимо от выбора положительных чисел a_ν , экстремальное значение функции равно $L(a, x)$

$$L(x) = \text{ext}_a L(a, x) = \sum_{\nu=1}^{\ell} m_\nu |R_\nu| \quad /2.18/$$

Таким образом, огибающая семейства поверхностей /2.12/ определяется уравнением

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} m_\nu |R_\nu| = 1 \quad /2.19/$$

Подставляя у /2.19/ экстремальные значения a /2.16/ и учитывая /2.18/ и /2.19/, получаем

$$p_i = \frac{\partial L(x)}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{\ell} \epsilon_{i\nu} m_\nu \frac{R_\nu}{|R_\nu|}, \quad /2.20/$$

где векторы R_ν определены формулой /2.15/.

Смысл проведенных преобразований состоит в замене системы уравнений /2.6/ и /2.7/ эквивалентной ей системой уравнений /2.10/, /2.12/ и /2.14/, которая обладает тем преимуществом, что позволяет элементарно исключить переменные a из уравнений /2.14/ и после подстановки в /2.10/ получить /2.20/.

Уравнения /2.20/ представляют собой параметрические уравнения поверхности собственных особенностей диаграммы. Так как уравнения /2.20/ однородные нулевой степени относительно x , то переменные x можно считать независимыми, не связанными условием /2.18/.

Заметим, что уравнения /2.20/ совпадут с законом сохранения импульса в узлах диаграммы /1.2/, если считать, что импульс на линии ν на поверхности особых точек имеет вид

$$k_\nu = m_\nu \frac{R_\nu}{|R_\nu|}. \quad /2.21/$$

Если a_ν задаются формулой /2.16/, то векторы k_ν , определенные формулой /2.21/, удовлетворяют условию экстремума^{/3,4/}

$$\left\{ \sum_{s=1}^{\ell} a_s \frac{|R_s|}{m_s} \right\} \sum_{\nu \in C} \epsilon_\nu a_\nu k_\nu = \sum_{\nu \in C} \epsilon_\nu R_\nu = 0. \quad /2.22/$$

Здесь C — произвольный замкнутый контур диаграммы с заданным направлением обхода, $\epsilon_\nu = 1$, если направление обхода контура C совпадает с направлением линии ν и $\epsilon_\nu = -1$ — в противном случае^{x/}.

Из /2.21/, в частности, получаются исходные уравнения /2.4/, в форме, которую придал им Ландау^{/3/}

$$k_\nu^2 = m_\nu^2. \quad /2.23/$$

Параметрические уравнения поверхности собственных особенностей /2.20/ дают также геометрический способ для нахождения особенностей диаграммы при помощи так называемых дуальных диаграмм^{/10,3/}. Все "длины" /2.17/ отлич-

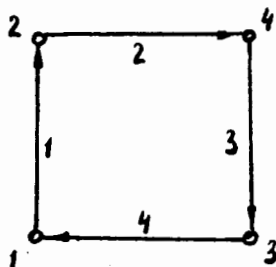
^{x/} Доказательство соотношения /2.22/ может быть получено при помощи т.н. второй матрицы инцидентности /связывающей контуры и линии диаграммы/. См., например, /14/ п. /3.3/ с. 93/. В случае, когда a_ν задаются формулой /2.16а/ /т.е., когда $a = \frac{m_\nu^2}{R_\nu} / R_\nu = a_\nu k_\nu$. Эти векторы систематически используются в /22/. Записывая уравнения /2.1/, /2.3/ и /5.1/ работы /22/ с помощью матрицы инцидентности и исключая переменные β_{ik} , мы получаем другой вывод параметрических уравнений /2.20/.

ны от нуля, поскольку мы имеем дело с собственными особенностями. Если в узел i_0 не входит внешняя линия, то $p_{i_0} = 0$ и /2.20/ автоматически дает некоторую связь между параметрами x_j /а именно, производные от $L(x)$ по составляющим вектора x_{i_0} равны нулю/. Требование, чтобы внешние импульсы лежали на поверхности масс, т.е. чтобы $p_i^2 = M_i^2$, также приводит к некоторой дополнительной связи на параметры x , которую легко получить из /2.20/.

§ 3. Примеры применения параметрических уравнений поверхности особых точек

6. Рассмотрим два характерных примера применения общей теории, развитой в предыдущем параграфе, к нахождению собственных особенностей двух диаграмм упругого рассеяния. Мы вовсе не стремимся при этом к наибольшей общности, а наоборот намеренно выбираем простые примеры, чтобы яснее проиллюстрировать метод.

Начнем с хорошо разобранным примера четырехугольной диаграммы рассеяния /18-20/, причем ограничимся для простоты случаем равных масс /см. рис. 1/



Р и с. 1.

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = m^2 = 1. \quad /3.1/$$

Матрица инцидентности этой диаграммы выписана в п. 2. Уравнения /2.20/ для собственных особенностей диаграммы имеют вид

$$p_1 = \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} + \frac{x_1 - x_3}{|x_1 - x_3|},$$

$$p_2 = \frac{x_2 - x_1}{|x_1 - x_2|} + \frac{x_2}{|x_2|},$$

/3.2/

$$p_3 = \frac{x_3}{|x_3|} + \frac{x_3 - x_1}{|x_1 - x_3|}, \quad p_4 = -\frac{x_2}{|x_2|} - \frac{x_3}{|x_3|}.$$

Каждой линии диаграммы соответствует вектор R_ν по формуле /2.15/, или, подробнее,

$$\begin{aligned} R_1 &= x_1 - x_2, & R_2 &= x_2, \\ R_3 &= -x_3, & R_4 &= x_3 - x_1. \end{aligned} \quad /3.3/$$

Равенство /2.22/ в этом случае приобретает вид

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0; \quad /3.4/$$

условия /3.1/ для векторов R_ν означают:

$$\frac{R_1 R_2}{|R_1| |R_2|} = \frac{R_2 R_3}{|R_2| |R_3|} = \frac{R_3 R_4}{|R_3| |R_4|} = \frac{R_4 R_1}{|R_4| |R_1|} = \frac{1}{2}. \quad /3.5/$$

Когда квадраты внешних импульсов фиксированы, в диаграмме с четырьмя внешними линиями остаются два независимых инварианта, которые мы выберем, следуя Мандельштаму^{/6/}, следующим образом:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2; \quad /3.6/$$

при этом

$$\frac{R_1 R_3}{|R_1| |R_3|} = \frac{2-t}{2}, \quad \frac{R_2 R_4}{|R_2| |R_4|} = \frac{2-s}{2}. \quad /3.7/$$

Умножая скалярно равенство /3.4/ последовательно на R_1 , R_2 , R_3 и R_4 и пользуясь тем, что по предположению $|R_\nu| \neq 0$ /так как мы ищем собственные особенности диаграммы/, мы приходим к системе уравнений

$$|R_1| + \frac{1}{2} |R_2| + \frac{2-t}{2} |R_3| + \frac{1}{2} |R_4| = 0,$$

$$\frac{1}{2} |R_1| + |R_2| + \frac{1}{2} |R_3| + \frac{2-s}{2} |R_4| = 0,$$

$$\frac{2-t}{2} |R_1| + \frac{1}{2} |R_2| + |R_3| + \frac{1}{2} |R_4| = 0,$$

/3.8/

$$\frac{1}{2} |R_1| + \frac{2-s}{2} |R_2| + \frac{1}{2} |R_3| + |R_4| = 0.$$

К этой системе можно добавить уравнение /2.19/:

$$|R_1| + |R_2| + |R_3| + |R_4| = 1.$$

/3.9/

Вычитая из первого уравнения /3.8/ третье и из второго - четвертое и учитывая /3.9/, получаем

$$|R_1| = |R_3| = \lambda, \quad |R_2| = |R_4| = \frac{1}{2} - \lambda.$$

/3.10/

При помощи /3.10/ из первых двух уравнений /3.8/ получаем следующие параметрические уравнения особой поверхности в инвариантных переменных:

$$\frac{1}{2}(t-4) = \frac{\frac{1}{2} - \lambda}{\lambda}, \quad \frac{1}{2}(s-4) = \frac{\lambda}{\frac{1}{2} - \lambda}.$$

/3.11/

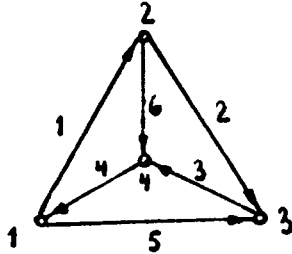
Из /3.11/ следует, что

$$(s-4)(t-4) = 4,$$

/3.12/

что означает обращение в нуль определителя системы /3.8/ и обеспечивает совместность этой системы. Следует отметить, что если одно из чисел s , t и ℓ вещественно, то вещественны и остальные 2 числа. На физическом листе при вещественных s и t , a_ν положительны, а так как в силу /2.16a/ $a_\nu = |R_\nu|$, то из /3.10/ следует, что $0 < \lambda < \frac{1}{2}$.

7. В качестве второго примера рассмотрим диаграмму в форме тетраэдра - так называемый "распечатанный конверт" /см. /29/, где обсуждается значение этой диаграммы/ с равными массами на всех линиях /рис. 2/. Матрица инцидентности этой диаграммы E_2 приведена в п. 2. Заметим, что этот пример



Р и с. 2.

значительно сложнее, чем предыдущий и до сих пор не был полностью разобран в литературе. В данном случае векторы R_ν /см. /2.15// выражаются через переменные x_j следующим образом

$$\begin{aligned} R_1 &= x_1 - x_2, & R_2 &= x_2 - x_3, & R_3 &= x_3, \\ R_4 &= -x_1, & R_5 &= x_1 - x_3, & R_6 &= x_2. \end{aligned} \quad /3.13/$$

Аналогично /3.10/ можно показать, что

$$\begin{aligned} |R_1| &= |R_3| = \lambda_1, & |R_2| &= |R_4| = \lambda_2, \\ |R_5| &= |R_6| = \lambda_3, \end{aligned} \quad /3.14/$$

причем, в силу /2.19/

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{2}. \quad /3.15/$$

Так как квадраты внешних импульсов по предположению равны между собой, то векторы $p_1 + p_2$, $p_2 + p_3$ и $p_1 + p_3$ ортогональны друг другу. Это позволяет ввести ортогональный базис $x/$ в линейной оболочке этих векторов, в котором

$x/$ В таком базисе скалярное произведение двух векторов x и y имеет вид $x y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, причем составляющие x_j и y_j являются, вообще говоря, комплексными числами.

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{\lambda_2} (R_2 - R_4) + \frac{1}{\lambda_3} (R_5 + R_6) = (\sqrt{s}, 0, 0)$$

$$p_2 + p_3 = \frac{1}{\lambda_1} (R_3 - R_1) + \frac{1}{\lambda_3} (R_5 - R_6) = (0, \sqrt{u}, 0)$$

$$p_1 + p_3 = \frac{1}{\lambda_1} (R_1 + R_3) - \frac{1}{\lambda_2} (R_2 + R_4) = (0, 0, \sqrt{t}),$$

$$s + t + u = 4.$$

/3.16/

В этом базисе векторы R_1, R_2, R_3 имеют вид:

$$R_1 = x_1 - x_2 = (0, -\sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda_2^2)}, \sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda_2^2)}),$$

$$R_2 = x_2 - x_3 = (\sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2)}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2)}),$$

$$R_3 = x_3 = (0, \sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda_2^2)}, \sqrt{\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda_2^2)}).$$

/3.17/

Векторы R_4, R_5, R_6 выражаются через них следующим образом

$$R_4 = -R_1 - R_2 - R_3, \quad R_5 = R_1 + R_2, \quad R_6 = R_2 + R_3.$$

Подставляя эти выражения для R_i в /3.16/, мы получаем следующие выражения для мандельштамовских переменных s, u, t :

$$\frac{1}{2} s = \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 \lambda_3^2} (\lambda_2 + \lambda_3)^2,$$

$$\frac{1}{2} u = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_3^2} (\lambda_1 + \lambda_3)^2,$$

/3.18/

$$\frac{1}{2} t = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} (\lambda_1 + \lambda_2)^2.$$

Далее мы должны исключить два из трех параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, пользуясь /3.15/ и условием $s + t + u = 4$, которое в переменных λ_j имеет вид

$$4(\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3.$$

/3.19/

Из /3.15/ и /3.19/ можно исключить переменные λ_2 и λ_3 :

$$2\lambda_2 = \frac{1}{2} - \lambda_1 + \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1(\frac{1}{4} - \lambda_1)}}{\frac{1}{2} - \lambda_1},$$

/ 3.20/

$$2\lambda_3 = \frac{1}{2} - \lambda_1 - \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1(\frac{1}{4} - \lambda_1)}}{\frac{1}{2} - \lambda_1}.$$

Подставляя /3.20/ в /3.18/ и полагая $\lambda_1 = \lambda$, получаем следующие параметрические уравнения для собственных особенностей диаграммы, изображенной на рис. 2:

$$\frac{1}{2}s = \left(\frac{\frac{1}{2} - \lambda}{\frac{1}{4} - \lambda} \right)^3, \quad \frac{1}{2}u = \left\{ \frac{\lambda + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sqrt{(\frac{1}{2} - \lambda)(1 - 2\lambda - 4\lambda^2)}}{2(\lambda - \frac{1}{4})} \right\}^3,$$

/3.21/

$$\frac{1}{2}t = \left\{ \frac{\lambda - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sqrt{(\frac{1}{2} - \lambda)(1 - 2\lambda - 4\lambda^2)}}{2(\lambda - \frac{1}{4})} \right\}^3.$$

Особая поверхность для тетраэдра обладает очевидной симметрией относительно перестановки s , u и t /в силу возможности переставить в /3.18/ λ_1 , λ_2 и λ_3 /. Однако из /3.15/, /3.19/ и /3.21/ можно увидеть другую, менее тривиальную, симметрию этой поверхности. Чтобы выявить эту симметрию введем новые переменные:

$$\xi_1 = \sqrt[3]{\frac{s}{16}}, \quad \xi_2 = \sqrt[3]{\frac{u}{16}}, \quad \xi_3 = \sqrt[3]{\frac{t}{16}};$$

/3.22/

$$\mu_1 = 2\lambda_1, \quad \mu_2 = 2\lambda_2, \quad \mu_3 = 2\lambda_3.$$

Тогда, в силу /3.15/ и /3.19/

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \quad \mu_1^3 + \mu_2^3 + \mu_3^3 = \frac{1}{4}$$

/3.23/

в то время как из /3.21/ и из условия $s + t + u = 4$ следуют тождественные с /3.23/ уравнения для ξ_i :

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \quad \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = \frac{1}{4}.$$

/3.24/

Это показывает, что /в силу /3.21// преобразование

$$\xi_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_2 + \mu_3 - \mu_1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_1^2 + \mu_3^2 - \mu_2^2}{\mu_1(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)},$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2}{\mu_1(\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)}, \quad /3.25/$$

оставляет на месте поверхность /3.24/. Заметим еще, что двукратное применение преобразования /3.25/ приводит к тождественному преобразованию.

На физическом листе, если λ , s , u и t вещественны, то $0 < \lambda < \frac{1}{4}$.

Отсюда видно, что преобразования /3.25/ выводят точку с физической ветви особой поверхности.

Уравнения /3.24/ в переменных s , u и t имеют вид:

$$\sqrt[3]{\frac{s}{16}} + \sqrt[3]{\frac{u}{16}} + \sqrt[3]{\frac{t}{16}} = 1, \quad s + u + t = 4, \quad /3.26/$$

Не все ветви особой поверхности /3.26/ лежат на физическом листе. При $s > 0$ на физическом листе в силу /3.21/ $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, и особые точки существуют лишь при $s > 16$. Преобразования /3.25/ переводят "нефизическую" ветвь в "физическую" и обратно. В силу симметрии особой поверхности относительно переменных s , u и t аналогичные утверждения справедливы и для переменных u и t . Эти утверждения необходимы для вывода представления Мандельштама /6/ для рассматриваемой диаграммы.

Д о п о л н е н и я

А. Вычисление якобиана преобразования /1.10/

Якобиан преобразования /1.10/ может быть записан в виде

$$I = \left| \frac{\partial a'_\mu}{\partial a_\nu} \right| = \begin{vmatrix} A - \Delta_1 a_1 & -\Delta_1 a_2 & \dots & -\Delta_1 a_\ell \\ -\Delta_2 a_1 & A - \Delta_2 a_2 & & -\Delta_2 a_\ell \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Delta_\ell a_1 & -\Delta_\ell a_2 & \dots & A - \Delta_\ell a_\ell \end{vmatrix} \quad /A.1/$$

где

$$A = \left(\sum_{s=1}^{\ell} a'_s a_s \right)^{-1} \sum_{s=1}^{\ell} a_s a_s, \quad /A.2/$$

$$\Delta_{\mu} = \left(\sum_{s=1}^{\ell} a'_s a_s \right)^{-1} \sum_{s=1}^{\ell} (a'_s a_s - a'_s a_{\mu}) a_s. \quad /A.3/$$

Пользуясь известной формулой для определителя блочной матрицы:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| |A - BD^{-1}C|,$$

при $A_{ij} = A \delta_{ij}$, $(B) = (a_{\nu})$, $(C) = (\Delta_{\mu})$, $D = 1$
получаем

$$I = \begin{vmatrix} AO \dots & O a_1 \\ OA \dots & O a_2 \\ \dots & \dots \\ OO & A a_{\ell} \\ \Delta_1 \Delta_2 & \Delta_{\ell} \end{vmatrix} = A^{\ell} - A^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^{\ell} a_{\mu} \Delta_{\mu}. \quad /A.4/$$

Однако из /A.3/ видно, что

$$\sum_{\mu=1}^{\ell} a_{\mu} \Delta_{\mu} = 0,$$

и, следовательно,

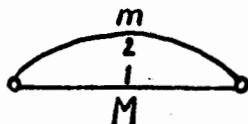
$$I = A^{\ell}, \quad /A.5/$$

что в силу /A.2/ совпадает с формулой /1.12/.

Б. Пример с диаграммой собственной энергии

Простейшая диаграмма собственно-энергетической части (рис. 3) может служить в качестве хорошей иллюстрации к двум

вопросам, затронутым в основном тексте работы. Во-первых, на примере этой диаграммы видно, что особенности регуляризованного выражения в случае расходящихся интегралов Фейнмана действительно определяются теми же уравнениями /2.20/, выведенными на основе рассмотрения одной лишь квадратичной формы диаграммы $Q(a, p)$.



Р и с. 3.

Во-вторых, эта диаграмма иллюстрирует обстоятельство, упоминавшееся в § 2 и в § 3, согласно которому "физические" особенности соответствуют положительным a , а "нефизические" — параметрам Фейнмана с разными знаками. При этом в случае собственно-энергетической части рассматривается функции одной /комплексной/ переменной p^2 , и понятиям о "физических" и "нефизических" особенностях легко придать четкий математический смысл.

Для рассматриваемой диаграммы интеграл /1.7/

$$F_{\epsilon}(p^2) = T_{\epsilon}(p) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp \{ i [Q(a', p^2) + i\epsilon(a'_1 + a'_2)] \} \frac{da'_1 da'_2}{(a'_1 + a'_2)^2}, \quad /Б.1/$$

где

$$Q(a', p^2) = \frac{a'_1 a'_2}{a'_1 + a'_2} p^2 - a'_1 M^2 - a'_2 m^2, \quad /Б.2/$$

расходится на нижнем пределе интегрирования по a' . Мы будем понимать интеграл /Б.1/ в регуляризованном смысле. Перейдем к новым переменным a и λ по формуле

$$a_1' = \lambda a_1, \quad a_2' = \lambda a_2 = \lambda \left(\frac{1 - a_1 a_1}{a_2} \right),$$

$$(0 < \lambda < \infty, \quad 0 \leq a_1, \quad 0 \leq a_2). \quad /Б.3/$$

Регуляризованное выражение интеграла /Б.1/, нормированное условием

$$F_\epsilon(M^2) = 0, \quad \text{имеет следующий вид /ср. /15/}$$

$$F_\epsilon(p^2) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{da_1 da_2}{(a_1 + a_2)^2} \delta(1 - a_1 a_1 - a_2 a_2) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\epsilon \lambda (a_1 + a_2)} \quad \times \quad /Б.4/$$

$$\{ \exp [i\lambda Q(a, p^2)] - \exp [i\lambda Q(a, M^2)] \}.$$

При вещественных p^2 , переходя к пределу $\epsilon \rightarrow +0$ и полагая

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_1 = a, \quad a_2 = 1 - a, \quad \text{получаем}$$

$$F(p^2) = D(p^2) + i A(p^2), \quad /Б.5/$$

где

$$D(p^2) = \int_0^1 \ln \left| \frac{Q(a, M^2)}{Q(a, p^2)} \right| da, \quad /Б.6/$$

$$A(p^2) = \pi \int_0^1 \theta [Q(a, p^2)] da, \quad /Б.7/$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что выражение для мнимой части $A(p^2)$ не зависит от нормировки регуляризованного выражения, что естественно, так как мнимая часть не содержит расходимостей.

При вещественных $z = p^2$ из /Б.7/ получаем

$$A(z) = \frac{\pi}{z} \sqrt{[z - (M+m)^2][z - (M-m)^2]} \theta [z - (M+m)^2]. \quad /Б.8/$$

/отметим, что выражение

$$\frac{1}{2\sqrt{z}} \sqrt{[z - (M+m)^2][z - (M-m)^2]} \quad /Б.9/$$

равно модулям трехмерных импульсов на линиях диаграммы $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|$
в системе центра масс $\vec{p} = 0$ /; из /Б.6/ находим

$$D(z) = 2 \frac{m}{M^2} \sqrt{4M^2 - m^2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2M-m}{2M+m}} + \quad /Б.10/$$

$$+ \frac{M^2 - m^2}{M^2} \frac{z - M^2}{z} \ln \frac{M}{m} + \phi(z),$$

где вид функции $\phi(z)$ зависит от того, в каком интервале находится z :

$$\phi(z) = \frac{1}{z} \sqrt{(a^2 - z)(b^2 - z)} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{\frac{b^2 - z}{a^2 - z}}}{1 - \sqrt{\frac{b^2 - z}{a^2 - z}}} \right\} \quad \text{при } z \leq b^2$$

$$\phi(z) = \frac{2}{z} \sqrt{(a^2 - z)(z - b^2)} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z - b^2}{a^2 - z}} \quad \text{при } b^2 \leq z < a^2$$

$$\phi(z) = \frac{1}{z} \sqrt{(z - a^2)(z - b^2)} \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{\frac{z - a^2}{z - b^2}}}{1 - \sqrt{\frac{z - a^2}{z - b^2}}} \right\} \quad \text{при } a^2 \leq z, \quad /Б.11/$$

$$(a = M + m, \quad b = M - m).$$

Несмотря на то, что функция $\phi(z)$ задается различными выражениями слева и справа от точки $z = b^2 (= (M-m)^2)$, она аналитична в окрестности этой точки и может быть записана формулой

$$\phi(z) = 2 \frac{b^2 - z}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{b^2 - z}{a^2 - z} \right) \quad /Б.12/$$

справедливой при $-\infty < z < \frac{a^2 + b^2}{2} = M^2 + m^2$. "Физический лист" есть комплексная плоскость z с разрезом по вещественной оси от $a^2 = (M+m)^2$ до ∞ , на которой функция

$$F(z) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} F(z + i\epsilon)$$

при вещественных z принимает значения /Б.8-11/. Аналитические свойства функции $F(z)$ на физическом листе отражаются в дисперсионном соотношении, справедливом при любом комплексном z , не лежащем на линии разреза:

$$F(z) = \frac{z - M^2}{\pi} \int \frac{A(x)}{x - M^2} \frac{dx}{x - z}, \quad /Б.13/$$

$(M+m)^2$

где $A(x)$ задается формулой /Б.8/. Справедливость /Б.13/ можно проверить непосредственно для вещественных $z < (M+m)^2$. На физическом листе функция $F(z)$ имеет две особые точки типа ветвления: $z = (M+m)^2 = a^2$ и $z = \infty$. Поэтому эту функцию можно аналитически продолжить, пересекая сверху вниз линию разреза при $z > a^2$. При этом мы перейдем на второй риманов лист функции $F(z)$. Продолжая таким образом функцию $F(z)$ до точек $z < b^2$, мы придем к выражению, которое отличается от /Б.10/ лишь тем, что функция $\phi(z)$ задается уже не первым равенством /Б.11/, а комплексным выражением

$$\phi_{(2)}(z) = \frac{1}{z} \sqrt{(a^2 - z)(b^2 - z)} \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{a^2 - z} + \sqrt{b^2 - z}}{\sqrt{a^2 - z} - \sqrt{b^2 - z}} \right) - 2\pi i \right\}$$

при $z < b^2$,

так что на втором римановом листе при $z < b^2$

$$F_{(2)}(z) = D(z) - 2\pi \frac{i}{z} \sqrt{(a^2 - z)(b^2 - z)} \quad /Б.14/$$

и, следовательно, имеет дополнительные особенности /по сравнению со значениями на главном листе/ в точках

$$z = b^2 = (M - m)^2 \quad \text{и} \quad z = 0 \dots \quad /Б.15/$$

Уравнение особой поверхности S /2.20/ для рассматриваемой диаграммы приобретает вид

$$p = (M \pm m) x/|x|,$$

т.е.

$$z = p^2 = (M \pm m)^2.$$

Знак $+$ при этом, согласно общему замечанию, приведенному после формулы /2.17/, соответствует особенности на физическом листе.

Нефизическая особенность при $z = 0$ соответствует обращению в нуль определителя $a_1 a_2 d(a) = a_1 + a_2$. Это легче всего видеть в выражении для производной:

$$\frac{dF}{dz} = - \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{a_1 a_2 \delta(1 - a_1 a_1 - a_2 a_2) da_1 da_2}{(a_1 + a_2)^3 \left[\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} z - a_1 M^2 - a_2 m^2 + i0 \right]}$$

Л и т е р а т у р а

1. Y.Nambu. Nuovo Cimento 6, 1064 (1957); 9, 610 (1958).
2. K.Symanzik. Prog. Theor. Phys. 20, 690 (1958).
3. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 37, 62, /1959/.
4. А.А. Логунов, А.Н. Тавхелидзе, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников. ДАН СССР, 135, 801, /1960/.
5. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников. Вопросы теории мажорирования диаграмм Фейнмана. Препринт ОИЯИ Д-578, /1960/. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников. Обобщение теоремы Симанзика о мажорировании диаграмм Фейнмана. ЖЭТФ, /в печати/.
6. S.Mandelstam. Phys. Rev. 112, 1344 (1958)*

* Русский перевод этой статьи имеется в сборнике "Новый метод в теории сильных взаимодействий. Двойные дисперсионные представления". М. 1960.

7. T.T.Wu, Phys. Rev. 123, 678 (1961).
8. J.C.Polkinghorne and G.R.Screaton. Nuovo Cimento 15, 289 (1960); 15, 925 (1960).
9. R.E.Cutkosky, J. Math. Phys. 1, 429 (1960).
10. R.Karplus, Ch. Sommerfield and E.Wichman, Phys. Rev. 114, 376 (1959).
11. H.Poincaré. Proceedings of the London Mathematical Society 32, 277 (1901).
12. П.С. Александров. Комбинаторная топология. М-Л. 1947.
13. D.Konig. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
14. Л.Д. Кудрявцев. УМН, 3, 80 /1948/.
15. N.N.Bogoliubow und O.S.Parasiuk, Acta Mathematica 97, 227 (1957).
О.С. Парасюк. Украинский математический журнал. 12, 287 (1960).
16. J.Hadamard. Acta Mathematica 22, 55 (1899).
17. R.J.Eden. Proc. Roy. Soc. A 210, 388 (1952).
18. J.Tarski. J. Math. Phys. 1, 149 (1960).
19. S.Mandelstam. Phys. Rev. 115, 1741* (1959).
20. В.С. Владимиров. Украинский математический журнал 12, 132, /1960/.
21. П.К. Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М-Л. 1947.
22. А.З. Паташинский, А.П. Рудик и В.В. Судаков. ЖЭТФ, 40, 298 /1961/.
23. J.D.Bjorken. Spectral Representation of Green's Functions in Perturbation Theory.
Stanford University.
/Препринт/.
24. N.Nakanishi. Prog. Theor. Phys. 22, 128 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
9 января 1962 года.

* Русский перевод этой статьи имеется в сборнике "Новый метод в теории сильных взаимодействий. Двойные дисперсионные представления". М. 1960.