ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория высоких энергий

О.И. Ярковой

Р-883

О СТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Дубна 1962 год

О.И. Ярковой

Р-883

О СТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в ЖЭТФ

1. Решение кинетического уравнения

Пусть поле обладает аксиальной симметрией. Лагранжиан частицы в цилиндрических координатах $(r,\ \theta,\ z)$ имеет вид:

$$L = -mc^2\sqrt{1-1/c^2\,(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+\dot z^2)} + e/c\ (\dot r A_r + r\,\dot\theta A_\theta + \dot z A_z) - e\phi . \qquad (1)$$

Обобщенные импульсы тогда суть

$$\begin{aligned} P_r &= p_r + e/c\ A_r\ , \\ M_\theta &= p_\theta\, r + e/c\ r A_\theta\ , \\ P_z &= p_z + e/c\ A_z\ , \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\vec p = (p_r\,, p_\theta\,, p_z)$ – обычный релятивистский импульс и гамильтониан

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2[(P_r - e/c\ A_r)^2 + 1/r^2(M_\theta - e/c\ rA_\theta)^2 + (P_z - e/c\ A_z)^2]} + e\phi . \qquad (3)$$

Из уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dP_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r}\ , \\ \frac{dM_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0\ , \\ \frac{dP_z}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned} \qquad (4)$$

легко находятся два интеграла движения H и M_θ. Общее решение кинетического уравнения без учета столкновений

$$\{\ fH\ \} = 0, \qquad (5)$$

где f – функция распределения, есть произвольная функция от интегралов движения, интегрируемая по импульсам. Самосогласованное поле определяется нелинейной системой уравнений

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= -4\pi\rho \\ rot\,rot\,\vec A &= +\frac{4\pi}{c}\ \vec j\ , \end{aligned} \qquad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= e\int f\,dV_p = \rho(\vec r,\ \phi,\ \vec A,\ \dots)\ , \\ \vec j &= e\int \vec v\, f\, dV_p = \vec j\,(\vec r,\ \phi,\ \vec A,\ \dots)\ , \end{aligned} \qquad (7)$$

dV_p – элемент объема в пространстве импульсов.

Важный класс решений (5) составляют функции, зависящие только от двух известных нам интегралов движения. Будем считать также, что $\vec{A}$ имеет лишь азимутальную компоненту[x)].

2. Состояния с фиксированными энергией и обобщенным моментом

В этом случае

$$f = \frac{c^2 \kappa}{8\pi^2 e^2} \delta(H - H_0)\, \delta(M_\theta - M_0), \qquad (8)$$

где $\frac{c^2\kappa}{8\pi^2 e^2}$ – нормировочная константа.

Вычислим плотность заряда и тока для (8). Элемент фазового объема имеет вид:

$$d\Omega = dM_\theta\, dP_r\, dP_r\, dr\, dz\, d\theta = 1/r\, dM_\theta dP_r\, dP_z dV, \qquad (9)$$

где dV – элемент объема в обычном пространстве. Отсюда, согласно (3),

$$\rho = \frac{c^2 \kappa}{8\pi^2 e} \int \delta(H - H_0)\delta(M_\theta - M_0) \frac{dM_\theta\, dP_r\, dP_z}{r} =$$

$$= \frac{c^2 \kappa}{4\pi e r} \int_0^\infty \delta(H - H_0) p_t dp_t = \frac{\kappa}{4\pi e r} \int\limits_{e\phi + \sqrt{m^2c^4 + \frac{c^2}{r^2}(M_0 - e/c\, r A_\theta)^2}}^{\infty} \delta(H - H_0)[H - e\phi]\, dH = \qquad (10)$$

$$= \frac{\kappa}{4\pi e r}(H_0 - e\phi)\,\sigma[(H_0 - e\phi)^2 - m^2c^4 - c^2/r^2(M_0 - e/c\, r A_\theta)^2],$$

где

$$\sigma[x] = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

---

x) Последнее предположение несущественно, поскольку оно не меняет не только пути решения, но и результата. Для указанного класса решений всегда $\vec{j} = (0, j_\theta, 0)$ и, как нетрудно видеть, в случае аксиальной симметрии можно добавить лишь вектор-потенциал, отвечающий магнитному полю вида $\vec{H}_1 = (0, \frac{const}{r}, 0)$, а такое поле, меняя траектории частиц, не меняет ρ и $\vec{j}$ для нашего класса решений, что легко проверить. Причину можно видеть в том, что для $\vec{H}_1$ вклад в лоренцову силу дает лишь хаотическая компонента скорости.

При выводе (10) использовался переход к полярной системе координат на плоскости (p_r, p_z).

Далее $\vec{j} = (0, j_\theta, 0)$. Аналогично (10)

$$j_\theta = \frac{c^2\kappa}{8\pi^3 e} \int (M_\theta/r - e/c\, A_\theta) \frac{c^2}{H - e\phi} \delta(H - H_0)\delta(M_\theta - M_0) \frac{dM_\theta\, dP_r\, dP_z}{r} =$$

$$= \frac{c^2\kappa}{4\pi e r} \int\limits_{e\phi + \sqrt{m^2c^4 + c^2/r^2(M_0 - e/c\, rA_\theta)^2}}^{\infty} (M_0/r - e/c\, A_\theta)\, \delta(H - H_0)\, dH = \qquad (11)$$

$$= \frac{\kappa\, c^2}{4\pi e r} (M_0/r - e/c\, A_\theta)\, \sigma[(H_0 - e\phi)^2 - m^2c^4 - c^2\, (M_0/r - e/c\, A_\theta)^2]\,.$$

Отсюда система (6) в области $\bar{S}$, которую мы будем считать свободной от внешних зарядов и токов, примет вид

$$1/r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{\kappa}{e r}(H_0 - e\phi)\,\sigma, \qquad (12)$$

$$1/r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right) - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} = -\frac{\kappa c}{e r}(M_0/r - e/c\, A_\theta)\sigma\,.$$

Уравнения для самосогласованного поля могут быть представлены в другом виде, более удобном для некоторых частных случаев. С этой целью имеет смысл записать поле ϕ и A_θ как сумму собственного поля системы ϕ_c и $A_{\theta c}$ и внешнего поля ϕ_e и $A_{\theta e}$, удовлетворяющего однородным уравнением Максвелла в $\bar{S}$:

$$\phi = \phi_c + \phi_e \qquad (13)$$

$$A_\theta = A_{\theta c} + A_{\theta e}.$$

В случае аксиальной симметрии

$$\phi_c = \int G_\phi(r, r', z, z')\, \rho(r', z')\, r'\, dr'\, dz', \qquad (14)$$

$$A_{\theta c} = 1/c \int G_A(r, r', z, z')\, j_\theta(r', z')\, r'\, dr'\, dz',$$

где

$$G_\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta + (z - z')^2}}, \qquad (15)$$

$$G_A = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r'\cos\theta + (z - z')^2}}.$$

Заметим теперь, что

$$H_0 - e\phi = E$$
$$M_0/r - e/c\ A_\theta = p_\theta \quad , \qquad (16)$$

где E и P_θ соответственно релятивистская энергия $(E = mc^2\gamma)$ и азимутальная компонента релятивистского импульса. Обозначим через S область на плоскости (r, z), занимаемую частицами системы (естественно, считается $S \subset \bar{S}$). Тогда, согласно (10) и (11), S определяется условием

$$E^2 - p_\theta^2 c^2 \geqslant m^2 c^4. \qquad (17)$$

Таким образом мы приходим к системе интегральных уравнений самосогласованного поля:

$$E = -\frac{\kappa}{4\pi} \int_S G_\phi E\ dr'\,dz' + H_0 - e\phi_e$$
$$P_\theta = -\frac{\kappa}{4\pi} \int_S G_A\, p_\theta\ dr'\,dz' + M_0/r - e/c\ A_{\theta e}. \qquad (18)$$

Уравнения (18) привлекательны тем, что внешние поля в них входят явным образом. Однако ввиду нелинейности системы (18) ее решение в общем случае с заданными ϕ_e и $A_{\theta e}$ сопряженно с весьма серьезными трудностями, тогда как уравнения поля в форме (12) предоставляют существенные возможности для построения их общего решения. Действительно, система (12) внутри S может быть записана в виде

$$1/r\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial E}{\partial r}\right) - \frac{\kappa}{r} E + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = 0$$
$$1/r\ \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial p_\theta}{\partial r}\right) - \left(\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2}\right) p_\theta + \frac{\partial^2 p_\theta}{\partial z^2} = 0\ . \qquad (19)$$

Возьмем какое-либо частное решение линейных уравнений (19). Используя (14), найдем границу области S для этого решения. Далее, для физической состоятельности решения требуется, чтобы ϕ_e и $A_{\theta e}$ удовлетворяли однородным уравнениям Максвелла в некоторой области $\bar{S}$ такой, что $S \subset \bar{S}$ и границы S $\bar{S}$ не имеют общих точек. Как видно из предыдущего, это эквивалентно условию, чтобы ϕ и A_θ удовлетворяли однородным уравнениям Максвелла в $\bar{S} - S$. Поскольку требуется непрерывность напряженностей в $\bar{S}$, то на границе S должна выполняться непрерывность ϕ и A_θ и их нормальных производных. Таким образом возникает необычная для физических задач ситуация - задача Коши для уравнений эллиптического типа. Хотя вопрос о существовании и единственности решения в этом случае полностью не решен, такого рода экзотика не ведет еще к непреодолимым трудностям.

Действительно, согласно теореме об обобщенной задаче Коши (см. /1/) для существования решения, отвечающего условию физической состоятельности, достаточно аналитичности взятого нами решения системы (19) в некоторой окрестности границы S (отметим, что коэффициенты в уравнениях Максвелла и уравнение границы (14) аналитичны). Это решение единственно в классе дважды дифференцируемых функций. Нужное внешнее поле определяется тогда непосредственно по (13) и (14). Таким образом мы имеем уже некий класс решений (отметим кстати, что на этом пути нигде не встречается технически более сложной задачи, чем краевая задача для однородного уравнения). К сожалению, из-за отсутствия соответствующих теорем в математике нельзя указать всю совокупность решений (19), допускающих продление поля за границу области S по (12).

Сделаем еще одно замечание. Обычно считается, что физические рассмотрения не должны приводить к задаче Коши для уравнений эллиптического типа ввиду ее некорректности (см. /1/). Это разумно, если задание граничных условий связано с какими-либо измерениями, всегда имеющими определенную погрешность. В нашем случае это не так. Действительно, пусть взято какое-то допускающее продление поля за границу S решение (19). Согласно нашему подходу оно полностью определяет состояние системы. Но такое решение точно, и, следовательно, точно решение задачи Коши, определяющее точное же распределение внешних зарядов и токов. Последние вместе с функцией распределения и составляют ту совокупность внешних данных, которая определяет состояние системы при его практическом воспроизведении. Непрерывная зависимость решения от этих внешних данных может быть показана из интегральных соотношений и не связана с вопросом корректности задачи Коши в том смысле, как это определено в /1/.

В качестве примера аналитических E и p_θ рассмотрим простой случай, когда E и p_θ разлагаются в окрестности некоторой точки $(r_0, 0)$, включающей в себя S, в настолько быстро сходящийся ряд Тейлора, что уже членами порядка выше второго можно пренебречь (для рассмотрения внутри области S, но не для решения задачи Коши). Тогда, согласно (19),

$$E = mc^2 \gamma_0 \left[1 + \mu/r_0 (r-r) + \tfrac{1}{2} \frac{\kappa r_0 - \alpha - \mu}{r_0^2} (r - r_0)^2 + \tfrac{1}{2} \alpha/r_0^2 z^2\right] \tag{20}$$

$$p_\theta = mc\, \nu_0 \left[1 + \mu_1/r_0 (r - r) + \tfrac{1}{2} \frac{\kappa r_0 + 1 - \beta - \mu_1}{r_0^2} (r - r)^2 + \tfrac{1}{2} \beta/r_0^2 z^2\right].$$

Смысл констант в (20) не нуждается в пояснении. Определим границу S опять-таки пренебрегая членами порядка выше второго. Из (14) имеем

$$\frac{(r - r_0)^2}{d^2} + \frac{z^2}{\ell^2} = 1, \tag{21}$$

где

$$d^2 = \frac{\epsilon_0^2 r_0^2}{\nu_0^2 \left[1 - (\beta - \alpha) + \alpha \frac{\epsilon_0^2 + 1}{\nu_0^2} - \alpha r_0 \frac{\epsilon_0^2 + 1}{\nu_0^2} + \mu \frac{\gamma_0^2}{\nu_0^2} \frac{\epsilon_0^2 + 1}{\nu_0^2}\right]} > 0,$$

$$\ell^2 = \frac{\epsilon_0^2 r_0^2}{\nu_0^2 \left[(\beta - \alpha) - \alpha \frac{\epsilon_0^2 + 1}{\nu_0^2}\right]} > 0, \tag{22}$$

$$\epsilon_0^2 = \gamma_0^2 - \nu_0^2 - 1,$$

$2d$ и 2ℓ – соответственно толщина и длина нашей системы, а точка r_0 выбрана так, что $\gamma_0^2 \mu = \nu_0^2 \mu_1$. Выполнение неравенств (22) необходимо для получения замкнутой кривой на плоскости (r, z). Что же касается тех предположений, в которых получено решение, то, как нетрудно убедиться, при разумных значениях коэффициентов разложения в (20) все они сводятся к двум условиям: $\frac{\epsilon_0}{\nu} \ll 1$ $(\epsilon_0 \gg 1)$ (т.е. к тому, что скорость вращения имеет ультрарелятивистское значение) и

$$\kappa d\, d/r_0 \approx \kappa d\, \epsilon_0/\nu_0 \ll 1. \tag{23}$$

Интересно оценить число частиц в системе, при котором еще справедливо наше решение. Согласно (10) и (20), полное число частиц

$$N = 2\pi/e \int \rho r\, dz = \frac{\kappa}{2\ell^2} \int_s mc^2 \gamma_0\, dr\, dz = \pi/2\, \frac{\gamma_0}{r_0} \kappa d \ell, \tag{24}$$

где r_e – классический радиус электрона, и соответственно, число частиц на единицу длины вдали от концов системы $\left(\frac{z^2}{\ell^2} \ll 1\right)$

$$n = \frac{\kappa d y_0}{r_e} \quad . \qquad (25)$$

Таким образом, согласно (23), речь идет о значительных плотностях, требуемых, например, от E – слоя в "Астроне" ($n > \gamma_0 / r_e$ см[2]), где собственные поля системы отнюдь не малы по сравнению с внешними.

Что касается задачи с заданными внешними полями, то здесь можно указать некоторые частные случаи, когда может быть получено решение.

1. "<u>Ускорительное" приближение</u> – случай, когда собственной силой Лоренца можно пренебречь по сравнению с внешней. Интегральные операторы в (18) малы. Соответствующие оценки допустимого числа частиц нетрудно провести по (17).

2. <u>Система близкая к тороидальной</u> – область S мало отличается от круга. Тогда собственные поля могут быть разложены в ряд Тейлора и уравнения (17) и (18) легко решаются, когда ряд сходится достаточно быстро. Дефокусирующая собственная лоренцова сила сравнима с фокусирующей внешней.

3. <u>Бесконечно длинный Е– слой.</u> (Рассмотрение такого варианта считается некоторыми зарубежными авторами полезным для теории "Астрона" (см.[3]). Задача однородна по z. Уравнения (19) до крайности упрощаются:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE}{dr}\right) - \frac{\kappa}{r}E = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dP_\theta}{dr}\right) - \left(\frac{\kappa}{r} + \frac{1}{r^2}\right)P_\theta = 0 \; . \qquad (26)$$

Требование отсутствия внешнего электростатического поля сводится к условию обращения в нуль напряженности электрического поля на внутренней границе Е– слоя ($r = r_-$)

$$E_r(r_-) = -\frac{d\phi}{dr}\Big|_{r=r_-} = \frac{1}{e}\frac{dE}{dr}\Big|_{r=r_-} = 0 \; . \qquad (27)$$

Поскольку решения (26) выражаются через табулированные функции, задача сводится к системе двух обыкновенных уравнений (27) и (17). Для случая, когда E и p_θ разлагаются в быстро сходящиеся ряды Тейлора, достаточно в (20) положить $\alpha = \beta = 0$. Полагая

$$\mu = \frac{\kappa\, d}{1 + d/r_0},$$

удовлетворим (27). Отыскание необходимого внешнего магнитного поля тривиально.

Автор благодарен В.И. Векслеру за постоянный интерес к задаче, Р. Денчеву, И. Недялкову и товарищам по работе за обсуждения.

Литература

1. И.Г.Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. ГИТТЛ, Москва, 1953.
2. Н.Кристофилос. Термоядерный реактор "Астрон". Труды второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Избранные доклады иностранных ученых т.1, стр. 597 Москва, 1959.
3. L.Tonks. Phys. Rev. v. 114 (1959) 637.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 января 1962 года.