ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

М.И. Подгорецкий

Р-869

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Дубна 1962 год

М.И. Подгорецкий

Р-869

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Для простоты мы рассмотрим систему, состояние которой описывается только одним параметром x , удовлетворяющим уравнению движения

$$\frac{dx}{dt} = v(x) . \tag{1}$$

Предположим также, что система испытывает случайные толчки, распределенные во времени по закону Пуассона с интенсивностью n , изменяющие мгновенно параметр x на величину ξ . Дифференциальное распределение толчков по величине ξ характеризуется нормированной на единицу функцией $\phi(\xi)$, которая считается известной.

Из-за воздействия случайных толчков параметр x также становится случайной величиной, описываемой плотностью вероятности $f(x,t)$. Функция $f(x,t)$ удовлетворяет, как известно, кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (vf)}{\partial x} + nf - n\int f(x-\xi, t)\,\phi(\xi)\,d\xi = 0 , \tag{2}$$

для решения которого нужно задать начальное распределение $f(x,0)$.

Возможны различные интерпретации и способы вывода кинетического уравнения; все они основаны на сопоставлении состояния системы в некоторый текущий момент времени t и в следующий за ним момент $t+dt$. Поскольку явления, имеющие место при включении системы, не рассматриваются, полученное таким способом уравнение (2) описывает поведение системы при любых начальных условиях; конкретный вид начальных условий привлекается только на заключительном этапе, после получения общего решения кинетического уравнения.

В случае линейных систем, для которых выполнен принцип суперпозиции, оказывается возможным также несколько иное рассмотрение вопроса. В целях нагляности мы проведем его на конкретном примере ионизационной камеры, для которой время собирания Δ пренебрежимо мало по сравнению с характерным временем цепи камеры $(\Delta \ll RC)$. Уравнение движения имеет и в этом случае вид

$$\frac{dx}{dt} + kx = 0 , \tag{1'}$$

где $k = 1/RC$, а x имеет смысл тока, протекающего по сопротивлению R, включенному в цепь камеры. Толчки вызываются попаданием ионизующих частиц, причем $\xi = Q/RC$, где Q – заряд, выделяющийся внутри камеры. Соответствующее кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - k\frac{\partial(xf)}{\partial x} + nf - n\int f(x-\xi, t)\,\phi(\xi)\,d\xi = 0, \qquad (2')$$

и его свойства хорошо изучены (см., например, /1,2/).

Пусть в начальный момент отклонение $x = 0$, т.е. $f(x,0) = \delta(x)$. Можно показать, что при таких начальных условиях функция $f(x,t)$ удовлетворяет не только уравнению (2'), но также и некоторому другому вспомогательному уравнению. Для получения этого уравнения мы будем интересоваться, как и обычно, величиной тока x_t в некоторый момент t. Рассмотрим бесконечно малый интервал времени dt, прошедший после включения камеры в момент $t = 0$. Если в течение этого интервала не будет ни одного толчка (вероятность такого события равна $1 - ndt$), то к концу dt по-прежнему будет $x = 0$. Процесс в камере однороден во времени, т.е. зависит только от разности времен; поэтому в рассматриваемом случае величина x_t будет совпадать с величиной x_{t-dt}. Предположим теперь, что в интервале dt произошел толчок (вероятность такого события равна ndt). Тогда к моменту t его вклад в отклонение x_t составит ξa, где ξ – величина данного толчка, а существенная для всего дальнейшего изложения функция $a(t)$ имеет смысл отклонения системы в момент t, если $x(0) = 1$ и случайные толчки "выключены". Из (1') следует, что в случае ионизационной камеры

$$a(t) = e^{-kt}. \qquad (3)$$

Из линейности системы следует, что в рассматриваемых условиях

$$x_t = \xi a + x_{t-dt}.$$

Итак, с вероятностью $1 - ndt$, интересующая нас случайная величина $x_t = x_{t-dt}$ и, с вероятностью ndt, $x_t = \xi a(t) + x_{t-dt}$. Отсюда немедленно следует, что

$$f(x,t) = (1 - ndt)\, f(x, t-dt) + ndt\int f(x - a\xi, t-dt)\,\phi(\xi)\,d\xi,$$

что равносильно равенству

$$f(x, t+dt) = (1 - ndt)\, f(x,t) + ndt\int f(x - a\xi, t)\,\phi(\xi)\,d\xi$$

При малых dt, $f(x,t+dt) = f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}\,dt$, откуда после соответствующих сокращений вытекает искомое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -nf + n \int f(x - a\xi, t)\, \phi(\xi)\, d\xi \,. \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет, конечно, общее значение и относится к любым линейным системам; для описания какой-либо конкретной системы нужно только использовать соответствующую ей функцию $a(t)$, характеризующую свойства рассматриваемой системы.

Необходимо снова подчеркнуть, что при выводе уравнения (4) было существенным образом использовано нулевое начальное условие. При другом начальном условии рассматриваемое уравнение приняло бы иной вид[x)]. Таким образом, не может быть речи о сведении уравнения (4) к уравнению (2'); это совершенно различные уравнения с различными общими решениями, имеющими только один совпадающий элемент—частное решение, соответствующее нулевым начальным условиям[xx)].

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим величину $\bar{x}$. Умножая, как обычно, уравнение (2') на x и интегрируя по x, легко получим уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{dt} + k\bar{x} = n\bar{\xi}. \qquad (5)$$

Аналогично из (4) в случае ионизационной камеры следует уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = n\bar{\xi}\, e^{-kt}. \qquad (5')$$

Ясно, что уравнения (5) и (5') нельзя свести друг к другу. Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\bar{x} = \frac{n\bar{\xi}}{k} + c' e^{-kt},$$

а для (5')

---

x) Поскольку рассматриваются только линейные системы, использование нулевых начальных условий не приводит к каким-либо реальным ограничениям общности.

xx) Рассматриваемые уравнения совпадают, если $a = 1$. В этом случае уравнение (4) сохраняет свой вид при любых начальных условиях, причем входящий в него интеграл совпадает с аналогичным интегралом в уравнении (2). Поскольку $v \sim \frac{da}{dt} = 0$, соответствующий член в уравнении (2) также выпадает.

$$\bar{x} = -\frac{n\bar{\xi}}{k}\, e^{-kt} + c''\,.$$

Это различные системы функций, но каждая из них содержит функцию

$$\bar{x} = \frac{n\bar{\xi}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right), \tag{6}$$

являющуюся решением интересующей нас задачи при условии $x(0) = 0$.

§ 2. Существование наряду с обычным кинетическим уравнением также и уравнения (4) позволяет прежде всего провести их сопоставление, что существенно облегчает решение соответствующих статистических задач. В случае ионизационной камеры мы можем, например, вычесть уравнение (4) из (2'), что дает:

$$k\,\frac{d(xf)}{dx} = n\int f(x-a\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi - n\int f(x-\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi\,. \tag{7}$$

Мы видим, что частная производная $\frac{\partial f}{\partial t}$ исчезла, и вся зависимость от времени связана с одним только параметром $a(t)$. Это резко упрощает дальнейшее рассмотрение. В частности, умножая (7) на x^m и интегрируя по x , сразу получаем алгебраическое уравнение, связывающее $\overline{x^m}$ с моментами меньшего порядка:

$$\overline{n(x+a\xi)^m} - \overline{n(x+\xi)^m} + km\,\overline{x^m} = 0\,. \tag{8}$$

Если исходить из одного только уравнения (2'), то для определения моментов приходится пользоваться системой связанных между собой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{x^m}}{dt} = \overline{n(x+\xi)^m} - n\overline{x^m} - km\overline{x^m}\,. \tag{8'}$$

Последовательное решение системы (8') является, конечно, более сложным делом, чем решение системы (8).

Такое упрощение имеет место во многих случаях. Рассмотрим, например, таунсендовскую лавину, развивающуюся при электрическом разряде в газе[x)].

---

x) В данном случае величина a имеет смысл числа электронов, образующихся на пути s от одного исходного электрона. Существенно, что сама a является случайной величиной, но это обстоятельство не препятствует рассмотрению задачи.

Пусть электрон создает при прохождении в газе пути ds один вторичный электрон с вероятностью $a\,ds$, где a зависит только от напряженности поля, т.е. $a = a(s)$. Если образующаяся лавина проходит путь s, то среднее число связанных с ней электронов определяется, очевидно, выражением

$$\overline{N} = \exp\left(\int_0^s a\,ds\right). \tag{9}$$

Что касается величины $\overline{N^2}$, то обычным способом, сопоставляя явления в точках s и $s + ds$ (см., например, /2/), для нее можно получить уравнение

$$\frac{d\overline{N^2}}{ds} = 2a\,\overline{N^2} + a\,\overline{N}. \tag{10}$$

С другой стороны, анализ явлений в начале лавины приводит, как легко убедиться, к уравнению

$$\frac{d\overline{N^2}}{ds} = a\,\overline{N^2} + 2a\,\overline{N}^2, \tag{10'}$$

которое справедливо только для лавины, созданной одним начальным электроном. Сопоставление (10) и (10') сразу дает искомое решение

$$\overline{N^2} = 2\overline{N}^2 - \overline{N}, \tag{11}$$

которое таким образом получается без интеграции по s.

В ряде случаев уравнение (4), рассматриваемое само по себе, оказывается более удобным для использования, чем кинетическое уравнение. Обычно это бывает тогда, когда в начальный момент времени поведение системы оказывается более простым, чем в произвольный текущий момент. Предположим, например, что состояние системы описывается несколькими взаимосвязанными параметрами; если все они в начальный момент равны нулю и если случайные толчки действуют только на один из них, то уравнение (4) может быть существенно проще соответствующего кинетического уравнения.

В качестве первого примера рассмотрим ионизационную камеру с конечным временем собирания Δ. Для полного описания состояния системы необходимо задать не только ток x, но и распределение зарядов внутри рабочего пространства камеры. В связи с этим использование кинетических уравнений наталкивается на существенные технические трудности, и, насколько нам известно, соответствующие уравнения пока что не написаны и не решены.

Между тем, с рассматриваемой нами точки зрения, статистическое поведение системы по-прежнему описывается уравнением (4) при несколько ином виде функции $a(t)$, которая может быть легко вычислена и в этом случае (см., например,[2,3]). Умножая (4) на x либо на x^2 и интегрируя по x , получим уравнения

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = n\bar{\xi}\, a\,, \qquad \frac{d\overline{x^2}}{dt} = n\,\overline{\xi^2}\, a^2 + 2n\,\bar{\xi}\,\bar{x}, \tag{12}$$

решения которых при нулевых начальных условиях имеют вид:

$$\bar{x} = n\bar{\xi}\int_0^t a(\theta)\,d\theta\,, \qquad \overline{x^2} = \bar{x}^2 + n\overline{\xi^2}\int_0^t a^2(\theta)\,d\theta\,. \tag{12'}$$

Обратимся теперь к задаче о многократном кулоновском рассеянии при прохождении быстрой заряженной частицы через вещество, считая, как обычно, углы рассеяния достаточно малыми. Для простоты мы будем рассматривать проекцию траектории частицы на какую-либо плоскость, параллельную первоначальному направлению движения. Состояние системы характеризуется двумя параметрами - углом θ и боковым отклонением x , величина толчков ξ соответствует изменению угла в акте элементарного рассеяния, интенсивность толчков n определяется плотностью среды и эффективным сечением рассеяния. Если путь, пройденный частицей, обозначить через t , то кинетическое уравнение имеет вид:

$$\theta\frac{\partial f}{\partial x} + nf - n\int f(x,\theta-\xi,t)\,\phi(\xi)\,d\xi = -\frac{\partial f}{\partial t}\,, \qquad f = f(x,\theta,t)\,. \tag{13}$$

В уравнении (13) переменные x и θ "перемешаны", поскольку от величины θ зависит скорость изменения параметра x . Для получения каких-либо характеристик распределения по x мы должны, как известно, сначала рассмотреть распределение по θ . Так, например, для вычисления $\overline{x^2}$ мы должны вычислить $\overline{\theta^2}$, затем $\overline{\theta x}$ и только тогда можно получить выражение для $\overline{x^2}$.

Что касается подхода, излагаемого в настоящей заметке, то он, как легко видеть, по-прежнему приводит к уравнению (4), в котором $a(t) = t$. Существенно, что в полученное уравнение отклонение x входит само по себе и может рассматриваться безотносительно к углу θ , который является просто некоторым параметром. Первые два момента определяются, как и раньше, соотношениями (12'). Из соображений симметрии ясно, что $\bar{x}=0$, а для величины $\overline{x^2}$ немедленно получаем известное выражение $\overline{x^2} = n\overline{\xi^2}\, t^3/3$.

В рассмотренном примере случайные толчки влияли на параметр θ , который, в свою очередь, определял скорость изменения интересующего нас параметра x . Можно было бы указать много задач такого рода (брауновское движение, ионизационная камера, в цепь которой включена самоиндукция и т.д.). Во всех этих случаях предлагаемая нами методика позволяет более быстро получать окончательные результаты.

§ 3. Рассмотрим теперь газовую лавину, частицы которой могут диффундировать в поперечном направлении. Предположим, что родоначальником лавины является один электрон. Вероятность размножения на пути ds по-прежнему примем равной $\alpha\, ds$, число электронов на глубине s обозначим через N_s, боковое отклонение i-го электрона от первоначального направления $-x_s^{(i)}$. Предположим также, что каждый электрон испытывает толчки, изменяющие его боковое отклонение на величину ξ ; среднее число толчков на единице пути обозначим через β x). Для простоты величины α и β, а также закон распределения толчков ξ мы будем считать не зависящими от s .

Введем случайную величину

$$y_s = \sum_{1}^{N_s} x_s^{(i)} \qquad (14)$$

и попытаемся проанализировать ее свойства в точке, отстоящей на $s+ds$ от места зарождения лавины. Если на начальном интервале ds не будут иметь места ни акт размножения, ни боковой толчок, то величина y_{s+ds} будет равна y_s . Вероятность такого события составляет, очевидно, $1-\alpha ds-\beta ds$. Если в интервале ds произойдет акт размножения (вероятность αds), то на дальнейшем пути s будут развиваться две независимые лавины, родоначальники которых не имели бокового отклонения. Можно сказать, что в этом случае

$$y_{s+ds} = y_s + y_s' \quad ,$$

причем случайные величины y_s и y_s' не только независимы, но имеют также одинаковые распределения. Возможно, наконец, что в интервале ds произойдет толчок, смещающий первоначальный электрон вбок на величину ξ (вероят-

x) Для простоты мы считаем, что диффузия вызывается скачками координаты, а не скорости. Такая замена законна, если за интересующее нас время происходит достаточно много скачков.

ность такого события равна βds). Тогда мы будем иметь дело с лавиной, развивающейся как и обычная, но смещенной также на величину ξ . Интересующую нас величину y_s мы будем обозначать в этом случае символом y_s^{ξ}.

Итак, поведение величины y_{s+ds} характеризуется следующей символической таблицей:

$$y_{s+ds} = \begin{cases} y_s & \text{с вероятностью } 1-\alpha ds-\beta ds \\ y_s + y_s' & \text{с вероятностью } \alpha ds \\ y_s^{\xi} & \text{с вероятностью } \beta ds\,. \end{cases} \qquad (15)$$

Мы будем считать, что функция распределения толчков $\phi(\xi)$ является четной, т.е. $\bar{\xi}=0$. В этом случае диффузия происходит симметрично и выполнено равенство

$$\bar{y}_s = 0\,. \qquad (16)$$

Для вычисления $\overline{y_s^2}$ обратимся к таблице (15), из которой следует, что

$$\overline{y^2_{s+ds}} = (1-\alpha ds-\beta ds)\,\overline{y_s^2} + \alpha ds\,\overline{(y_s+y_s')^2} + \beta ds\,\overline{(y_s^{\xi}\;)^2}\,,$$
$$\frac{d\overline{y^2}}{dt} = -\alpha\,\overline{y^2} - \beta\,\overline{y^2} + \alpha\,\overline{(y+y')^2} + \beta\,\overline{(y^{\xi}\;)^2}\,. \qquad (17)$$

Из независимости y и y' вытекают равенства

$$\overline{(y+y')^2} = \overline{y^2} + \overline{y'^2} + 2\bar{y}\,\bar{y}' = 2\overline{y^2} + 2\bar{y}^2 = 2\overline{y^2}\,.$$

В соответствии с определением величины y_s^{ξ} имеем:

$$y_s^{\xi} = \sum_1^{N_s}(x_s^{(i)}+\xi) = y+\xi N_s\,,$$

$$\overline{(y_s^{\xi}\,)^2} = \overline{y_s^2} + 2\xi\,\overline{y_s N_s} + \overline{\xi^2}\,\overline{N_s^2}\,.$$

Поскольку, из симметрии задачи следует, что

$$\overline{y_s N_s} = 0,$$

то для $\overline{(y_s^{\xi}\ )^2}$ окончательно получаем

$$\overline{(y_s^{\xi}\ )^2} = \overline{y_s^2} + \overline{\xi^2}\,\overline{N_s^2}\,.$$

Используя полученные результаты, преобразуем (17) к виду

$$\frac{d\overline{y^2}}{ds} = \alpha\overline{y^2} + \beta\,\overline{\xi^2}\,\overline{N^2}, \tag{17'}$$

причем величина $\overline{N^2}$ определяется в соответствии с (9) и (11). Решение уравнения (17') при нулевом начальном условии дает

$$\overline{y^2} = \frac{2\beta\overline{\xi^2}}{\alpha} e^{\alpha t}(e^{\alpha t} - 1) - \beta\,\overline{\xi^2}\,t\,e^{\alpha t}\,. \tag{18}$$

Введем теперь функцию распределения боковых отклонений $f(x, s)$, одинаковую для всех электронов на глубине s. Из (14) сразу следует равенство

$$D_y = \bar{N}\,D_x + D_N\,\bar{x}^2. \tag{19}$$

Поскольку, в интересующем нас случае $\bar{x} = \bar{y} = 0$, то соотношение (19) переходит в

$$\overline{y^2} = \bar{N}\,\overline{x^2}, \tag{19'}$$

откуда может быть вычислена и величина $\overline{x^2}$. При этом получается:

$$\overline{x^2} = \frac{2\beta\overline{\xi^2}}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha s} - \frac{\alpha s}{2}\right)\bar{N}\,. \tag{20}$$

Если бы вторичная ионизация отсутствовала, то средний квадрат отклонения первичной частицы после прохождения пути s составлял бы $\beta\overline{\xi^2}s$, т.е. был бы существенно меньше величины $\overline{x^2}$.

Нам кажется, что исследовать рассмотренную задачу с помощью обычных кинетических уравнений было бы значительно сложнее. Можно думать, что это относится ко всем более или менее сложным лавинным процессам[x)].

---

x) Как нам стало известно, Н.М.Герасимова успешно применила описываемый метод для вычисления флуктуаций числа частиц в электронно- фотонной лавине. Автор благодарит Н.М.Герасимову за сообщение о ее вычислениях до их опубликования.

Рассмотрим еще один пример, анализ которого с помошью обычных кинетических уравнений кажется , по меньшей мере, затруднительным. В свое время В.И.Векслером и рядом других авторов были предложены и исследованы приборы, измеряющие интенсивность радиоактивного источника по среднему току, протекающему в цепи пропорционального либо гейгеровского счетчика (см., например, /4–6/). В своем простейшем виде они представляют собою RC –схему, в которую вместо емкости включен счетчик. Если "мертвое время" счетчика равно нулю, то со статистической точки зрения рассматриваемая система ничем не отличается от ионизационной камеры.

Иное дело, если "мертвое время" $\tau \neq 0$. В этом случае развитие системы определяется не только ее состоянием в данный момент, но и ее предысторией, в частности, – ее состоянием в течение предшествующего интервала τ . Обычное кинетическое уравнение по самой своей природе является уравнением локальным. Поэтому, в рассматриваемом случае без введения каких-либо дополнительных параметров оно не может быть даже составлено. Что касается уравнения (4), то с соответствующими изменениями оно может быть легко получено. Трудности, связанные с влиянием предыстории,здесь отпадают,потому что сразу после включения системы предыстория попросту отсутствует!

Мы будем рассматривать "мертвое время" т.н. непродлевающегося типа, предполагая, что каждое попадание частицы в счетчик, вызывающее его срабатывание, приводит к немедленному скачку тока x на величину ξ (по поводу использованной терминологии, см., например, /7/). Предположим также, что в момент включения системы счетчик подготовлен к срабатыванию и $x(0)=0$. Тогда, рассуждая как раньше, можем записать для случая $t>\tau$ таблицу:

$$x_{t+dt} = \begin{cases} x_t & \text{с вероятностью } 1-ndt \\ x_{t-\tau} + \xi e^{-kt} & \text{с вероятностью } ndt \end{cases} \tag{21}$$

Если $t<\tau$, то

$$x_{t+dt} = \begin{cases} x_t & \text{с вероятностью } 1-ndt \\ \xi e^{-kt} & \text{с вероятностью } ndt \end{cases} \tag{21'}$$

На основании таблиц (21) и (21') можно сразу получить соответствующее обобщение уравнения (4). В целях экономии места, мы ограничимся непосредственным получением уравнений для $\overline{x}$ и $\overline{x^2}$. При $t>r$ имеем

$$\overline{x_{t+dt}} = (1-ndt)\,\overline{x_t} + ndt\,(\overline{x_{t-r}} + \overline{\xi}\,e^{-kt}),$$

что дает

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = -n\overline{x} + n\overline{x}_{t-r} + n\overline{\xi}\,e^{-kt}, \qquad t>r. \tag{22}$$

Аналогично, сразу получаем

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = -n\overline{x} + n\overline{\xi}\,e^{-kt}, \quad t<r. \tag{22'}$$

Для $\overline{x^2}$ имеем при $t > r$:

$$\overline{x^2_{t+dt}} = (1-ndt)\,\overline{x^2_t} + ndt\,\overline{(x_{t-r} + \xi\,e^{-kt})^2},$$

$$\frac{d\overline{x^2}}{dt} = -n\overline{x^2} + n\overline{x^2_{t-r}} + 2n\,\overline{\xi}\,\overline{x}_{t-r}\,e^{-kt} + n\overline{\xi^2}e^{-2kt}, \qquad t>r. \tag{23}$$

Аналогично, при $t < r$, получаем

$$\frac{d\overline{x^2}}{dt} = -n\,\overline{x^2} + n\overline{\xi^2}e^{-2kt}, \qquad t<r. \tag{23'}$$

Величины $\overline{x}$ и $\overline{x^2}$ могут быть найдены последовательным решением полученных уравнений сначала в интервале $(0,r)$, затем $(r,2r)$ и т.д.

Через достаточно большое время после включения системы в ней устанавливается стационарное состояние, характеристики которого можно определить более простым способом. Начнем с вычисления $\overline{x}$, для чего проинтегрируем уравнение (22') от $t=0$ до $t=r$ и уравнение (22) – от r до текущего момента t. Складывая результаты и учитывая, что $x(0)=0$, получим:

$$\overline{x}_t = -n\int_0^t \overline{x}_\theta d\theta + n\int_0^t \overline{x}_{\theta-r}\,d\theta + n\overline{\xi}\int_0^t e^{-k\theta}\,d\theta.$$

Проводя во втором интеграле замену переменных и вычисляя третий интеграл, преобразуем это равенство к виду:

$$\overline{x}_t = -n\int_{t-r}^t \overline{x}_\theta d\theta + \frac{n\overline{\xi}}{k}(1-e^{-kt}).$$

Отсюда, для стационарного состояния можно записать

$$\bar{x} = -nr\,\bar{x} + n\bar{\xi}/k,$$

что дает

$$\bar{x} = \frac{n\bar{\xi}}{k(1+nr)}\,. \tag{24}$$

Аналогично, интегрируя в соответствующих пределах уравнения (23) и (23') и складывая результаты, получим для стационарного состояния равенство:

$$\overline{x^2} = -nr\,\overline{x^2} + n\overline{\xi^2}/2k + 2n\bar{\xi}\,e^{-kr}\int_0^\infty \overline{x_\theta}\,e^{-k\theta}\,d\theta\,.$$

Для вычисления возникшего интеграла умножим уравнения (22) и (22') на e^{-kt}, проинтегрируем и сложим результаты. После интегрирования по частям левая часть равенства дает

$$\bar{x}\,e^{-kt} + k\int_0^t \bar{x}_\theta\,e^{-k\theta}\,d\theta\,,$$

а правая после простых преобразований, приводится к виду

$$-n\int_0^t \bar{x}_\theta\,e^{-k\theta}\,d\theta + ne^{-kr}\int_0^{t-r}\bar{x}_\theta\,e^{-k\theta}\,d\theta + \frac{n\bar{\xi}}{2k}\,(1-e^{-2kt})\,.$$

Отсюда, для стационарного состояния следует равенство

$$k\int_0^\infty \bar{x}_\theta\,e^{-k\theta}\,d\theta = -n\int_0^\infty \bar{x}_\theta\,e^{-k\theta}\,d\theta + ne^{-kr}\int_0^\infty \bar{x}_\theta\,e^{-k\theta}\,d\theta + \frac{n\bar{\xi}}{2k}\,,$$

что дает

$$\int_0^\infty \bar{x}_\theta\,e^{-k\theta}d\theta = \frac{n\bar{\xi}}{2k}\;\frac{1}{k+n(1-e^{-kr})}\,.$$

Подставляя этот результат в выражение для $\overline{x^2}$, получим:

$$\overline{x^2} = \frac{n\overline{\xi^2}}{2k(1+nr)} + \frac{n^2\bar{\xi}^2}{k+n(1-e^{-kr})}\;\frac{e^{-kr}}{k(1+nr)}\,. \tag{25}$$

В наиболее интересном частном случае, когда выполнено условие $kr \ll 1$,

$$\overline{x^2} = \frac{n\overline{\xi^2}}{2k(1+nr)} + \frac{n^2\bar{\xi}^2}{k^2(1+nr)^2} = \bar{x}^2 + \frac{n\overline{\xi^2}}{2k(1+nr)}\,.$$

В этом случае дисперсия

$$D_x = \frac{n\overline{\xi^2}}{2k(1+n\tau)} \quad . \tag{26}$$

При очень больших интенсивностях имеем

$$\overline{x} = \overline{\xi}/k\tau, \qquad \overline{x^2} = \frac{\overline{\xi^2}}{2k\tau} + \frac{\overline{\xi}^2}{k\tau} \quad \frac{e^{-k\tau}}{1-e^{-k\tau}} \; .$$

Таким образом, в отличие от случая, когда "мертвое время" отсутствует, флуктуации остаются конечными.

Автор рад поблагодарить И.М.Граменицкого, Л.Г.Заставенко, Г.И.Копылова, В.И.Огиевецкого и О.А.Хрусталева за ценные замечания.

Литература

1. И.Я.Барит, М.И.Подгорецкий. ЖТФ, 19, 730 (1949).
2. М.И.Подгорецкий. Труды ФИАН, 6, 3 (1955).
3. И.Я.Барит, М.И.Подгорецкий. ДАН СССР, 60, 563 (1948).
4. В.Векслер, Б.Исаев. ЖЭТФ, 5, 970 (1935).
5. А.Бибергаль, В.Векслер. ЖЭТФ, 5, 319 (1935).
6. В.Векслер, Л.Грошев, Н.Добротин "Экспериментальные методы ядерной физики" (1940).
7. В.И.Гольданский, А.В.Куценко, М.И.Подгорецкий "Статистика отсчетов при регистрации ядерных частиц", (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1961 года.