ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

К.Д. Толстов

Р-864

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ И ЧИСЛА СОБЫТИЙ

Дубна 1962 год

К.Д. Толстов

Р-864

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ И ЧИСЛА СОБЫТИЙ

Аннотация

Рассмотрены условия контроля эффективности поиска событий в фотоэмульсиях и на камерных снимках. Даны правила оценки числа событий, эффективности и ошибок в ее значении, в частности показано, что неверна формула для ошибки, приведенная в /1/.

Abstract

The conditions are considered of the control for the efficiency of searching for the events in emulsions and on the chamber photographs. The rules are given for estimating the number of events, the efficiency and the errors in its value. It is shown, in particular, that the formula for the error in /1/ is incorrect.

Определение сечений взаимодействия или других количественных данных на эмульсионных и камерных материалах требует точного знания числа событий, зарегистрированных в определенном объеме эмульсии или на заданном числе камерных снимков. Необходимо поэтому знать эффективность просмотра, то есть вероятность регистрации событий нужного типа. Для определения эффективности необходим (независимый) просмотр, причем принимается, что любое событие, найденное в первом пропросмотре, будет вторично найдено с постоянной вероятностью $p = const$, соответствующей второму просмотру. Обычно исходят из этого постулата, в то время как он должен проверяться в первую очередь, так как местные условия в районе данного события: меньший фон и вуаль или, наоборот, наличие события привлекающего внимание наблюдателя вблизи, могут сделать вероятность регистрации данного случая меньшей или большей.

Пусть истинное число событий есть n . Эффективность 1,2... i просмотра соответственно ϵ_1 , ϵ_2 , ... ϵ_i . Среднее число случаев, найденных в i просмотре, равно:

$$m_i = n \cdot \epsilon_i . \tag{1}$$

Число случаев, которые пропущены в i -м просмотре,

$$n(1 - \epsilon_i).$$

Если верен постулат $p = \epsilon = const.$, то общее число случаев, найденных в двух просмотрах m_{i+k}, равно:

$$m_{i+k} = n \cdot \epsilon_i + n(1 - \epsilon_i) \cdot \epsilon_k .$$

Вводя эффективность двойного просмотра

$$\epsilon_{i+k} = \frac{m_{i+k}}{n} , \tag{2}$$

получим

$$\epsilon_{i+k} = \epsilon_i + \epsilon_k - \epsilon_i \cdot \epsilon_k . \tag{3}$$

Аналогично этому для эффективности тройного просмотра[x)] получим:

$$\epsilon_{1+2+3} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 - (\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 + \epsilon_2 \cdot \epsilon_3) . \tag{3a}$$

[x)] На целесообразность тройного просмотра в связи с пропуском при малой эффективности обращал внимание в 1960 г. П.Марков.

Вероятность того, что событие будет найдено в каждом из двух просмотров ϵ_{ik}, равна произведению вероятностей:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_i \cdot \epsilon_k. \tag{4}$$

Вероятность регистрации в каждом из 3-х наблюдений:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3. \tag{4a}$$

В случае, если просмотр проведен больше 2-х раз, эффективность каждого просмотра можно найти несколькими независимыми путями. Обозначим через ϵ_i^k – оценку эффективности i – го просмотра, определяемую по числу событий, найденных в k – просмотре m_k, и в каждом из них m_{ik}. Будем иметь

$$m_{ik} = n \cdot \epsilon_k \cdot \epsilon_i^k ,$$

или

$$\epsilon_i^k = \frac{m_{ik}}{m_k} . \tag{5}$$

Усредненная оценка эффективности i – просмотра $\bar{\epsilon}_i$ равна средневзвешенному всех значений ϵ_i^k. Усредненная оценка числа событий $\bar{n}$ может быть найдена как средневзвешенное n_i с помощью эффективности отдельных просмотров:

$$n_i = \frac{m_i}{\epsilon_i} , \tag{6}$$

или с помощью комбинированных эффективностей:

$$n = \frac{m_{i+k}}{\epsilon_{i+k}} \tag{7}$$

$$n = \frac{m_{1+2+3}}{\epsilon_{1+2+3}} , \tag{8}$$

где m_{1+2+3} общее число случаев, найденных в 3-х просмотрах.

В первую очередь следует проверить выполнимость основного постулата. Согласно (4)

$$\epsilon_{ik} = \frac{m_{ik}}{n} = \epsilon_i \cdot \epsilon_k ; \qquad \epsilon_{123} = \frac{m_{123}}{n} = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 , \tag{9}$$

где m_{123} – число случаев, найденных в каждом из 3-х просмотров. Если условие (9) выполняется в пределах статистических ошибок, то $p = \epsilon = const.$ и схему расчетов числа n можно считать правильной. Целесообразно также сверить опытное и расчетное число случаев, которые найдены только один раз, что является дополнительным контролем: если данный случай не был найден в двух просмотрах i и k, то вероятность его нахождения в просмотре j будет равна[x)]

$$\epsilon_j^{i+k} = (1 - \epsilon_{i+k}) \cdot \epsilon_j \quad . \tag{10}$$

Наиболее критичен следующий способ. Если $p = const$, то случаи, найденные в i -просмотре и пропущенные, одинаковы по вероятности их нахождения; поэтому должны быть равны эффективности, определенные по истинному числу n и по найденному числу m_i.

В соответствии с этим определим эффективности 'k' и 'j' просмотров, исходя из m_i, а также из

числа случаев, найденных совместно в 'i' и 'k' – m_{ik},
–"– –"– –"– –"– в 'i' и 'j' – m_{ij},
–"– –"– –"– –"– в трех – m_{ikj}.

Эффективность 'j' просмотра, определяемую из m_{ikj} и m_{ik}, обозначим как ϵ_j^{ik}. Имеем

$$\epsilon_j^{ik} = \frac{m_{ikj}}{m_{ik}} \quad , \tag{11}$$

причем, так как $m_{ik} = m_{ki}$, то $\epsilon_j^{ik} = \epsilon_j^{ki}$. Расчетное число случаев, которые находятся в 'j' просмотре, $\hat{m}_i$ равно

$$\hat{m}_i = \frac{m_{ij}}{\epsilon_j^{ik}} = \frac{m_{ij}\, m_{ik}}{m_{ikj}} \quad . \tag{12}$$

Далее необходимо сравнить m_i с $\hat{m}_i$, а среднюю эффективность 'j' просмотра $\bar{\epsilon}_j$ с ϵ_j^{ik}. Систематическое (при разных j) отличие этих величин, например, $\epsilon_j^{ik} - \bar{\epsilon}_j > 0$, то есть $\hat{m}_i < m_i$ докажет, что $p \neq const$. Обычно внимание сосредотачивается на получении максимальных эффективностей просмотра ϵ_j, ϵ_{j+k}, однако, если не выполнены условия (9), (10) или $\hat{m}_i \neq m_i$, то даже близкие к единице эффективности не являются гарантией результатов.

---

x) После сообщения изложенного материала летом 1961 г. автору стала известна работа /2/, в которой обращено внимание на ошибки из-за неравных эффективностей.

Далее, если эти условия выполнены, то даже малые эффективности, но определенные с достаточной статистической точностью, позволят получить правильное число событий n . Следует особо подчеркнуть, что для выполнения условия $p = const$ необходима не только одинаковая вероятность регистрации случаев в смысле их собственных свойств, но и постоянство ϵ во времени (т.е. при наборе статистики). Поэтому, если все найденные случаи разбить на группы с различными ϵ , то получится среднее $\bar{\epsilon}$ для этих групп, а не $p = \epsilon = const$ внутри каждой группы во время поиска.

11. Определение ошибок

1. Эффективность наблюдений известна и постоянна, то есть $p = \epsilon = const$. Проверка выполнения этого условия производится по ранее изложенным правилам.[x)] Если число случаев есть m_i , то вероятность их появления $p(m_i)$ подчиняется биноминальному закону:

$$p(m_i) = \frac{n!}{m_i!(n - m_i)!} (\epsilon_i)^{m_i} \cdot (1-\epsilon_i)^{n-m_i}, \tag{13}$$

в котором истинное число случаев n есть число испытаний. Дисперсия числа случаев $\sigma^2_{m_i}$ будет равна:

$$\sigma^2_{m_i} = m_i(1 - \epsilon_i). \tag{14}$$

Величину σ_{m_i} можно выразить (условно, так как ϵ задана) через стандартное отклонение в эффективности σ_{ϵ_i} :

$$\sigma_{m_i} = n \cdot \sigma_{\epsilon_i} = \sqrt{m_i(1-\epsilon_i)} = \sqrt{n \cdot \epsilon_i (1-\epsilon_i)}.$$

Откуда получим, что относительная средне-квадратичная ошибка ϵ_i равна

$$\frac{\sigma_{\epsilon_i}}{\epsilon_i} = \sqrt{\frac{1-\epsilon_i}{m_i}}. \tag{15}$$

Эта формула применима при известном 'n'. На практике эффективность <u>не известна априори;</u> она находится по данным опыта и ошибка в ее значении будет больше, чем найденная из (15), как показано в пункте 2 при рассмотрении более общего случая.

---

x) Этот практически маловероятный случай рассмотрен в статье [11]. Однако, как далее показано, приведенная в этой статье формула (15) неверна для нахождения величины $\sigma_\epsilon / \epsilon$ по данным опыта и должна быть заменена на (20).

2. Эффективность внутри каждого отдельного просмотра постоянна, но эти эффективности не одинаковы $\epsilon_i \neq \epsilon_k$. Пусть в k-м найдено m_k, а совместно в i и k найдено m_{ik} случаев. Очевидно, что справедлива формула (4), так как эффективности постоянны, следовательно:

$$m_{ik} = m_k \cdot \epsilon_i = n \quad \epsilon_i \cdot \epsilon_k = n \cdot \epsilon_{ik} .$$

Поэтому вероятность появления m_{ik} выражается биноминальным законом

$$p(m_{ik}) = \frac{n!}{m_{ik}!(n - m_{ik})!} \cdot (\epsilon_{ik})^{m_{ik}} \cdot (1 - \epsilon_{ik})^{n-m_{ik}} . \qquad (16)$$

Следовательно, аналогично (14), дисперсия $\sigma^2_{m_{ik}}$ будет равна

$$\sigma^2_{m_{ik}} = m_{ik}(1 - \epsilon_i \cdot \epsilon_k) = m_{ik}(1 - \epsilon_{ik}) . \qquad (17)$$

Эффективность i-просмотра ϵ_i^k, согласно (5), является функцией m_k и m_{ik}, а относительная средне-квадратичная ошибка $\sigma_{\epsilon_i^k} / \epsilon_i^k$ будет равна

$$\frac{\sigma_{\epsilon_i^k}}{\epsilon_i^k} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{m_{ik}}}{m^2_{ik}} + \frac{\sigma^2_{m_k}}{m^2_k} - 2r \frac{\sigma_{m_{ik}}}{m_{ik}} \frac{\sigma_{m_k}}{m_k}} , \qquad (18)$$

где r - коэффициент корреляции величины m_k и m_{ik}. Он равен (см.приложение)

$$r = \sqrt{\frac{\epsilon_i(1 - \epsilon_k)}{1 - \epsilon_i \cdot \epsilon_k}} . \qquad (19)$$

Подставляя в (18) σ_{mk} из (14) $\sigma_{m_{ik}}$ и r, получим

$$\frac{\sigma_{\epsilon_i^k}}{\epsilon_i^k} = \sqrt{\frac{1 - \epsilon_i}{m_{ik}}} . \qquad (20)$$

Все рассуждения при выводе (20) справедливы и в случае, когда $\epsilon_i = \epsilon_k$, поэтому формула (15) неверна для определения относительной средне-квадратичной ошибки эффективности наблюдений по данным опыта, и в этом случае необходимо применять (20).

3. Эффективности не постоянны и малы; для m_{ik} справедливо пуассановское распределение: $\sigma^2_{m_{ik}} = m_{ik}$

$$\frac{\sigma_{\epsilon_i^k}}{\epsilon_i^k} = \sqrt{\frac{1}{m_{ik}}} , \qquad (21)$$

причем, при малых ϵ_i (21) практически совпадает с (20).

4. Эффективности не малы по сравнению с единицей; зависят от наблюдателя, экспериментального материала и времени. Этот случай наиболее близок к практике и не может быть представлен биноминальным или пуассоновским распределением. В пределе этот случай переходит в нормальное распределение. Если статистика найденных случаев достаточна, то ошибки в эффективности можно определить, разбив наблюдения на отдельные серии и определив $\epsilon_{i\gamma}$, т.е. эффективность 'γ' серии в i просмотре. Затем необходимо найти среднюю эффективность и дисперсию от среднего.

111. Практический рецепт

Для наилучшего приближения к истинному числу случаев на практике нужно вначале провести сопоставление и контроль в соответствии с формулами (9) и (10) и в особенности сравнить $\hat{m}_j$ и m_j из (12). Это возможно, если просмотр проведен не менее 3-х раз.

а) Если при этом окажется, что условие $p = const$ справедливо, то все формулы (6), (7б) и (8) равноценны, то есть должны дать с учетом ошибок одинаковое значение числа случаев 'n'. Дисперсии величин 'n' вычисляются с использованием для дисперсий ϵ формулы (20).

б) На практике, как правило, не имеет место $p = const$. Поэтому расчеты 'n' по формулам (7) и (8), с использованием комбинированных эффективностей согласно (2) и (9), приведут к бо́льшим систематическим ошибкам, чем расчет по формуле (6). Действительно, используя (6) мы принимаем, что $p = const$ в одном просмотре, а используя (7) и (8) считаем $p = const$ в двух просмотрах, то есть отходим еще дальше от действительности. Поэтому необходимо вначале вычислить $\bar{\epsilon}_i$ как средневзвешенное величин ϵ_i^k, при этом, так как $p \neq const$, то формула (20) дает нижнюю границу относительной ошибки $\sigma_\epsilon / \epsilon$. Верхняя (для данного m_{ik}) граница ее, очевидно, задается формулой (21). В соответствии с эти необходимо использовать неравенство

$$\sqrt{\frac{1-\epsilon_i}{m_{ik}}} < \frac{\sigma_{\epsilon_i}}{\epsilon_i} < \sqrt{\frac{1}{m_{ik}}} \qquad (22)$$

(или действовать согласно пункту 4 § 2), затем определить n_i согласно (6)

$$n_i = \frac{m_i}{\bar{\epsilon}_i} .$$

В качестве величины n берется средневзвешенное из n_i.

Приложение

Коэффициент корреляции величин m_k и m_{ik} по определению есть:

$$r = \frac{\overline{\Delta m_{ik} \cdot \Delta m_k}}{\sigma_{m_{ik}} \cdot \sigma_{m_k}} ,$$

где : $\overline{(\Delta m_k)^2} = \sigma^2_{m_k}$;

$$\Delta m_{ik} = \Delta m_{i\boxed{k}} + \Delta m_{\boxed{i}k} ; \quad \overline{(\Delta m_{\boxed{i}k})^2} = \sigma^2_{m_{\boxed{i}k}} ; \quad \overline{(\Delta m_{i\boxed{k}})^2} = \sigma^2_{m_{i\boxed{k}}} ,$$

где $\sigma_{m_{i\boxed{k}}}$ – средне-квадратичное отклонение при постоянном k ,
$\sigma_{m_{\boxed{i}k}}$ – средне-квадратичное отклонение при постоянном i ,

причем $\sigma_{m_{\boxed{i}k}} = \epsilon_i \cdot \sigma_{m_k}$

$$\overline{\Delta m_{ik} \cdot \Delta m_k} = \overline{(\Delta m_{i\boxed{k}} + \epsilon_i \Delta m_k) \cdot \Delta m_k} = \overline{\Delta m_{i\boxed{k}} \cdot \Delta m_k} + \epsilon_i \sigma^2_{m_k} = \epsilon_i \cdot \sigma^2_{m_k} .$$

(так как $\Delta m_{i\boxed{k}}$ не зависит от Δm_{k} и их произведение при усреднении обращается в нуль). Отсюда получим

$$r = \frac{\epsilon_i \cdot \sigma^2_{m_k}}{\sigma_{m_{ik}} \cdot \sigma_{m_k}} = \frac{\epsilon_i \cdot \sigma_{m_k}}{\sigma_{m_{ik}}} .$$

Подставляя σ_{m_k} и $\sigma_{m_{ik}}$ соответственно из (14) и (17) получим:

$$r = \sqrt{\frac{\epsilon_i (1 - \epsilon_k)}{1 - \epsilon_i \cdot \epsilon_k}} .$$

В заключение автор выражает благодарность С.Н.Соколову за большую помощь в работе и Подгорецкому М.И. за ценные критические замечания.

Литература

1. Y.K.Lim et al. Suplemento Nuovo Cimento, XV, 382 (1960).
2. C.Waddington. Suplemento Nuovo Cimento, XIX, 37 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 декабря 1961 года.