3
Е-90 843

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Г.В. Ефимов

Р-843

О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ФИКСИРОВАННЫМ НУКЛОНОМ

Дубна 1961 год

Г.В. Ефимов

Р-843

1229/6 пр.

О ПЕРЕНОРМИРОВКЕ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С ФИКСИРОВАННЫМ НУКЛОНОМ

Направлено в ЖЭТФ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

А н н о т а ц и я

Проведена перенормировка класса моделей квантовой теории поля с фиксированным нуклоном в теории возмущений без рассмотрения диаграмм Фейнмана. Процедура перенормировок носит алгоритмический характер.

Abstract

The renormalization of a class of models of the quantum field theory with the fixed source in the perturbation theory has been made without considering the Feynman graphs. The renormalization procedure is of an algorithmic character.

Как хорошо известно, современный метод перенормировок в квантовой теории поля неразрывно связан с классификацией и исследованием графиков Фейнмана в теории возмущений. Ниже будет показано, что в моделях теории поля с фиксированным источником процедуру перенормировок в формализме с S -матрицей можно провести, не изучая диаграмм Фейнмана.

Мы будем рассматривать класс моделей квантовой теории поля, для которых гамильтониан взаимодействия может быть записан в виде

$$H_I(t) = g \sum_{\lambda=1}^{\ell} \Gamma_\lambda \phi_\lambda(t) \quad -\delta m . \tag{1}$$

Здесь Γ_λ являются матрицами, действующими на нуклонные переменные. Порядок матриц совпадает с числом степеней свободы нуклонного поля. Относительно Γ_λ будем предполагать, что они или антикоммутируют между собой

$$\Gamma_\lambda \Gamma_{\lambda'} + \Gamma_{\lambda'} \Gamma_\lambda = 2\delta_{\lambda\lambda'} \tag{2}$$

или являются прямыми произведениями антикоммутирующих матриц (как, например, в модели Чу-Лоу, где $\Gamma_\lambda = \sigma_\mu \quad \tau_\ell$).

$\phi_\lambda(t)$ - операторы мезонных полей, коммутирующие при различных значках λ . Их разложение по положительным и отрицательным частотам предполагается следующим

$$\phi_\lambda(t) = \sum_{\vec{k}} \{ V_\lambda(\vec{k})\, a_{\lambda\vec{k}}\, \ell^{-i\omega t} + V^*_\lambda(\vec{k})\, a^+_{\lambda\vec{k}}\, \ell^{i\omega t} \}, \tag{3}$$

где $a^+_{\lambda\vec{k}}$ и $a_{\lambda\vec{k}}$ - операторы рождения и уничтожения мезона в состоянии λ с импульсом $\vec{k}\ (\omega = \sqrt{k^2+\mu^2}\,)$, $V_\lambda(\vec{k})$ - некоторые, вообще говоря, комплексные функции. Для мезонных операторов (3) можно определить хронологическое спаривание

$$\langle 0 \,|\, T(\phi_\lambda(t)\,\phi_{\lambda'}(t'))\,|0\rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \Delta_c(t-t') = \delta_{\lambda\lambda'} \sum_{\vec{k}} |V_\lambda(\vec{k})|^2\, \ell^{-i\omega|t-t'|} . \tag{4}$$

Будем считать, что $\Delta_c(t)$ от индекса λ не зависит.

Ряд важных моделей квантовой теории поля является частными случаями гамильтониана (1).

Скалярную нейтральную модель [1] можно получить, положив $\Gamma_\lambda = 1$ и $V_\lambda(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}$.

Симметричная модель Кеммера [2] будет при $\Gamma_\lambda = \tau_\lambda\ (\lambda = 1,2,3)$ и $V_\lambda(\vec{k}) = \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega}}$, где $v(k)$ форм-фактор нуклона (функция обрезания).

Заряженная скалярная модель [3] получится, если выбрать

$$\Gamma_\lambda = \tau_\lambda\ (\lambda = 1,2) \qquad V_\lambda(\vec{k}) = \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega}}.$$

Модель Чу [4,5] получится, если положить

$$\Gamma_\lambda = \sigma_\mu \tau_s\ (\mu, s = 1,2,3) \qquad V_\lambda(\vec{k}) = \frac{ik_\mu\, v(k)}{\sqrt{2\omega}}.$$

S - матрица для гамильтониана (1) записывается в виде Т-произведения

$$S = T\exp\{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\ [\ell^{-a|t|} g\sum_{\lambda=1}^{\ell} \Gamma_\lambda(t)\phi_\lambda(t) - \delta m \ell^{-2a|t|}]\}. \qquad (5)$$

Здесь оператор Γ_λ зависит от времени t не явно, а как от упорядочивающего индекса [6], a – параметр "адиабатического" включения взаимодействия.

В рассматриваемом классе моделей из-за отсутствия поляризации вакуума (нет нуклон-антинуклонных петель) мезонные характеристики (масса, функция Грина) не меняются в результате взаимодействия. Поэтому в теории подлежат перенормировке только "масса" нуклона и константа связи.

Существенно, что контрчлен δm, ответственный за устранение нуклонных собственно-энергетических вкладов, стоит при единичной матрице в гамильтониане взаимодействия (1) и коммутирует с остальной частью гамильтониана. Поэтому он может быть вынесен за знак Т-произведения в S -матрице, и

$$S = \exp\{i\frac{\delta m}{a}\} S^a,$$

где

$$S^a = T\exp\{-ig\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-a|t|}\sum_{\lambda=1}^{\ell}\Gamma_\lambda(t)\phi_\lambda(t)\}. \qquad (6)$$

Но S – матрица (5) удовлетворяет соотношению

$$<N/S/N>=1,$$

где $|N>$ однонуклонное "голое" состояние, откуда[x)]

$$\exp\{ i \frac{\delta m}{a}\} = <N/S^a/N>^{-1}. \tag{7}$$

Таким образом, оказывается, что контрчлен δm выделяется в виде бесконечного фазового множителя (7) и, следовательно, перенормировку "массы" нуклона можно провести просто поделив на фазовый множитель $<N/S^a/N>$ матричный элемент для любого процесса, полученный от S -матрицы в форме (6). Перенормировка массы простым делением на фазу объясняется тем физическим обстоятельством, что в задачах с фиксированным нуклоном пренебрегается отдачей, а это означает, что масса нуклона имеет бесконечно большую величину и поэтому, естественно, не входит в матричные элементы физических процессов. Вклады собственной энергии нуклона приводят лишь к появлению несущественного фазового множителя. В реальном случае, когда учитывается отдача нуклона и, следовательно, физические процессы зависят от его массы, части собственной энергии нуклона помимо фазы входят и в сам матричный элемент.

Итак, элемент S -матрицы для перехода из состояния $/i>$ в состояние $/i>$ будет определяться равенством

$$S_{f-i} = \lim_{a\to 0} \frac{<f|S^a|i>}{<N|S^a|N>}, \tag{8}$$

При расчете по теории возмущений матричные элементы $<f|S^a|i>$ и $<N|S^a|N>$ известны в виде рядов по константе связи g. Поделив ряд на ряд в (8) и собрав коэффициенты при одинаковых степенях g, получим матричные элементы, в которых уже устранены все собственно энергетические расходимости. (См. приложение А).

После перенормировки массы остаются еще бесконечности, связанные с вершинными частями диаграмм, которые устраняются переходом от "затравочной" константы связи g к "наблюдаемой" g_r.

---

x) Из (7) следует

$$\delta m = i \lim_{a\to 0} a \ln <N|S^a|N>$$

и равенство (4) в работе /7/ не является правильным.

Результат теории перенормировок, доказанный Дайсоном в методе теории возмущений, можно сформулировать следующим образом. Пусть имеется матричный элемент какого-либо процесса $M(\nu, g, L)$. Он является функцией энергий взаимодействующих частиц, их спиновых и изотопических переменных (совокупность этих характеристик мы обозначили через ν), а также функцией затравочной константы связи g и импульса обрезания L. Перенормируемость теории означает, что матричный элемент M после устранения собственно-энергетических вкладов является функцией не <u>двух</u> параметров g и L, а <u>одного</u> g_r, который является функцией g и L и называется перенормированной (наблюдаемой) константой связи $g_r = g_r(g, L)$, т.е.

$$M(\nu, g, L) = M^{(r)}(\nu, g_r(g, L)). \tag{9}$$

По идеологии теории перенормировок g_r считается конечной величиной и определяется из опыта.

Отсюда следует, что матричный элемент, вычисленный по теории возмущений (по формуле (8)),

$$M(\nu, g, L) = g^m \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} M_n(\nu, L), \tag{10}$$

где m определяет порядок первой неисчезающей диаграммы рассматриваемого процесса, может быть представлен в виде

$$M(\nu, g, L) = M^{(r)}(\nu, g_r) = g_r^m \sum_{n=0}^{\infty} g_r^{2n} M_n^{(r)}(\nu), \tag{11}$$

где $M_n^{(r)}(\nu)$ уже конечны в случае перенормируемой теории (например, в симметричной скалярной теории Кеммера).

В рассматриваемом классе моделей связь между g_r и g известна /3,5/

$$g_r \langle N_1 | \Gamma_\lambda | N_2 \rangle = g \langle N_1 | T\{\Gamma_\lambda(0)\, S\} | N_2 \rangle = g \lim_{a\to 0} \frac{\langle N_1 | T\{\Gamma_\lambda(0)\, S^a\} | N_2 \rangle}{\langle N | S^a | N \rangle}, \tag{12}$$

откуда в теории возмущений можно получить

$$g_r = g \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} C_n(L) . \tag{13}$$

Коэффициенты $C_n(L)$ являются расходящимися (в случае перенормируемой теории логарифмически) интегралами при $L \to \infty$, связанными с вершинными частями диаграмм.

Задача теории возмущений - отыскание $M_n^{(r)}(\nu)$ - легко может быть решена, если в (11) подставить (13), разложить по g^2 и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях g^2. Имеем соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} g^{2n+m} M_n(\nu, L) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n+m} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} g^{2k} C_k(L)\Big)^{2n+m} M_n^{(r)}(\nu). \tag{14}$$

Так как известны коэффициенты M_n и C_k из (8) и (13), то легко найти функции $M_n^{(r)}$. Расписывая систему уравнений (14), получим

$$M_n(\nu, L) = \sum_{\ell_1+\ell_2=n} M_{\ell_1}^{(r)}(\nu) \sum_{k_1+\ldots+k_{2\ell_1+m}=\ell_2} C_{k_1}(L) \ldots C_{k_{2\ell_1+m}}(L) \tag{15}$$

и

$$M_n^{(r)}(\nu) = M_n(\nu, L) - \sum_{\ell=0}^{n-1} M_\ell^{(r)}(\nu) \sum_{k_1+\ldots+k_{2\ell+m}=n-\ell} C_{k_1}(L) \ldots C_{k_{2\ell+m}} . \tag{16}$$

Получаются рекурентные соотношения, позволяющие найти каждый последующий член, если известны все предыдущие.

Таким образом, программа перенормировок может быть проведена без исследования графиков Фейнмана. Однако может возникнуть возражение, что при расписывании матричного элемента (8) в теории возмущений нельзя будет обойтись без теоремы Вика и, следовательно, без введения диаграмм. Но и здесь специфика задач с фиксированным нуклоном позволяет видоизменить теорему Вика.

Матричные элементы процессов являются, как известно /10/, Фурье-преобразованиями от радиационных операторов типа

$$R_{\lambda_1\ldots\lambda_m}(t_1,\ldots,t_m) = \langle 0|\frac{\delta^m S}{\delta\phi_{\lambda_1}(t_1)\ldots\delta\phi_{\lambda_m}(t_m)}|0\rangle, \qquad (17)$$

где усреднение проводится по мезонному вакууму. Подставляя в (17) S^{α} матрицу в форме (6), получим

$$R^{\alpha}_{\lambda_1\ldots\lambda_m}(t_1,\ldots,t_m) = (-ig)^m T(\prod_{j=1}^{m}\Gamma_{\lambda_j}(t_j)\exp\{-g^2/2\iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2\, e^{-\alpha(|s_1|+|s_2|)}\times \qquad (18)$$

$$\times\Delta_c(s_1-s_2)\sum_{\lambda=1}^{\ell}\Gamma_\lambda(s_1)\Gamma_\lambda(s_2)\}) .$$

При получении формулы (18) мы воспользовались для нормального упорядочения мезонных операторов теоремой Вика в форме [8]

$$T_\phi = N_\phi \exp\{1/2\iint_{-\infty}^{\infty} ds_1 ds_2\,\Delta_c(s_1-s_2)\sum_{\lambda=1}^{\ell}\frac{\delta^2}{\delta\phi_\lambda(s_1)\delta\phi_\lambda(s_2)}\}. \qquad (19)$$

Упорядочение нуклонных операторов Γ_λ, если они антикоммутируют, может быть произведено при помощи следующего соотношения [9] в случае $\ell=3$ (обобщение на случай $\ell>3$ очевидно)

$$T(\prod_{\mu=1}^{n_1}\prod_{\nu=1}^{n_2}\prod_{\lambda=1}^{n_3}\Gamma_1(\xi_\mu)\Gamma_2(\zeta_\nu)\Gamma_3(\eta_\lambda)) =$$

$$=\Gamma_1^{n_1}\Gamma_2^{n_2}\Gamma_3^{n_3}\prod_{\mu=1}^{n_1}\prod_{\nu=1}^{n_2}\prod_{\lambda=1}^{n_3}\mathcal{E}(\xi_\mu-\zeta_\nu)\,\mathcal{E}(\xi_\mu-\eta_\lambda)\,\mathcal{E}(\zeta_\nu-\eta_\lambda), \qquad (20)$$

где

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} +1 & \text{если } x>0 \\ -1 & \text{если } x<0 \end{cases}$$

Разлагая (18) в ряд по g^2 и воспользовавшись (20), можно получить явный вид коэффициентов в ряду теории возмущений для радиационного оператора. (См. Приложение Б). Аналогичные ряды можно получить для фазы $\langle N | S^a | N \rangle$ и перенормированной константы связи (13), (16). Применяя далее изложенную выше процедуру перенормировок, можно получить ряд по g_r^2 для перенормированного радиационного оператора или матричного элемента. При этом процедура перенормировок носит чисто алгоритмический характер. Поскольку, благодаря равенству (18), известен явный вид n -го члена разложения в ряду теории возмущений, хотя он и записывается довольно сложно, в принципе возможно провести перенормировку в n -ом порядке теории возмущений, пользуясь соотношением (8) и (16).

В случае, когда Γ_λ является прямым произведением антикоммутирующих матриц, упорядочение нуклонных операторов также может быть произведено при помощи соотношения (20).

Если проводить сравнение с обычной методикой перенормировки, то оказывается, что диаграммы Фейнмана для каждого порядка теории возмущений не являются линейно независимыми, между ними существует ряд линейных соотношений. В этом легко убедиться, рассматривая, например, амплитуду рассеяния мезона на нуклоне в симметричной модели Кеммера в четвертом порядке теорий возмущений вышеизложенным методом. Мы не будем на этом здесь останавливаться подробнее.

В заключение хочется отметить, что предлагаемая процедура перенормировок может быть применена не только в теории возмущений, но и в случае, если S^a -матрица известна в виде ряда по некоторому другому параметру. Например, она легко может быть применена к перенормировке S -матрицы в методе Лаппо-Данилевского[9] для задач с фиксированным нуклоном.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Д.И. Блохинцеву и Б.М. Барбашову за весьма ценные дискуссии по затронутым здесь вопросам.

Приложение А

Если матричные элементы $<f|S^a|i>$ и $<N|S^a|N>$ известны в виде рядов

$$<f|S^a|i> = \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} Rn ; \qquad <N|S^a|N> = \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} a_n ,$$

то в частном

$$S_{f-i} = \frac{<f|S^a|i>}{<N|S^a|N>} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} \bar{Rn}$$

коэффициенты Rn равны /11/

$$\bar{Rn} = \sum_{k+\ell=n} R_k \sum_{j_1+2j_2+\ldots+\ell j_\ell=\ell} (-)^{j_1+j_2+\ldots+j_\ell} \frac{(j_1+j_2+\ldots+j_\ell)!}{j_1!\, j_2! \ldots j_\ell!} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots a_\ell^{j_\ell} .$$

Суммирование проводится по всем целым положительным корням уравнений $k+\ell=n$ и $j_1+2j_2+\ldots+\ell j_\ell = \ell$.

Приложение Б

В качестве примера приведем выражение для радиационного оператора для упругого рассеяния мезона на нуклоне в случае, когда имеются лишь две антикоммутирующие матрицы Γ_1 и Γ_2 (скалярная заряженная модель)

$$R^a_{f2}(t_1,t_2) = (-ig)^2 T(\Gamma_1(t_1)\Gamma_2(t_2) \exp\{-g^2/2 \iint_{-\infty}^{\infty} ds_1\, ds_2\, \ell^{-a(|s_1|+|s_2|)} \Delta_c(s_1-s_2)(\Gamma_1(s_1)\Gamma_1(s_2)+\Gamma_2(s_1)\Gamma_2(s_1))\})$$

$$= (-ig)^2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1!\, n_2!} (-g^2/2)^{n_1+n_2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{2n_1} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta_{2n_2} \prod_{j_1=1}^{n_1} \Delta_c(\xi_{2j_1-1} - \xi_{2j_1})\, \ell^{-a(|\xi_{2j_1-1}|+|\xi_{2j}|)}$$

$$\prod_{j_w=1}^{n_1} \Delta_c(\zeta_{2j_2-1}-\zeta_{2j_2})\, \ell^{-a(|\zeta_{2j_2-1}|+|\zeta_{2j_1}|)}\; T(\Gamma_1(t_1)\,\Gamma_2(t_2)\prod_{\ell_1=1}^{n_1}\Gamma_1(\xi_{\ell_1})\prod_{\ell_2=1}^{n_2}\Gamma_2(\zeta_{\ell_2})) = \qquad (Б.1)$$

$$= (-ig)^2\,\Gamma_1\,\Gamma_2 \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!\,(-g^2/2)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{2n} \prod_{j=1}^{n} \Delta_c(\xi_{2j-1}-\xi_{2j})\, \ell^{-a(|\xi_{2j-1}|+|\xi_{2j}|)}$$

$$\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!} \prod_{\ell_1=1}^{2n_1} \prod_{\ell_2=2n_1+1}^{2n} \mathcal{E}(t_1-\xi_{\ell_2})\quad \mathcal{E}(\xi_{\ell_1}-\xi_{\ell_2})\quad \mathcal{E}(\xi_{\ell_1}-t_2)\,.$$

Этот радиационный оператор надо разделить на фазу $\langle N|S^a|N\rangle$ по формулам приложения 1

$$\langle N|S^a|N\rangle = \langle N|\;T\exp\{-g^2/2 \iint_{-\infty} ds_1\,ds_2\,\ell^{-a(|s_1|+|s_2|)}\Delta_c(s_1-s_2)(\Gamma_1(s_1)\Gamma_1(s_2)+\Gamma_2(s_1)\Gamma_2(s_2))\}\,|N\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!\,(-g^2/2)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{2n} \prod_{j=1}^{n} \Delta_c\,(\xi_{2j-1}-\xi_{2j})\,\ell^{-a(|\xi_{2j-1}|+|\xi_{2j}|)} \qquad (Б.2)$$

$$\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!} \prod_{\ell=1}^{2n_1} \prod_{\ell_2=2n_1+1}^{2n} \mathcal{E}(\xi_{\ell_1}-\xi_{\ell_2})\,.$$

Мы не будем здесь останавливаться на расчетах более подробно, приведем лишь несколько соотношений, полезных при проведении конкретных вычислений:

$$\prod_{j=1}^{n} \mathcal{E}\,(s-\xi_j) = \sum_{\ell=1}^{n} \{\prod_{j\neq\ell} \mathcal{E}(\xi_\ell-\xi_j)\}\; \mathcal{E}\,(s-\xi_\ell) + \frac{1+(-)^n}{2}, \qquad (Б.3)$$

или в случае $\xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_n$

$$\prod_{j=1}^{n} \mathcal{E}(s-\xi_j) = \sum_{\ell=1}^{n} (-)^{\ell+1}\,\mathcal{E}(s-\xi_\ell) + \frac{1+(-)^n}{2} \qquad (Б.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds\ e^{-i\omega|s|}\ \mathcal{E}(s-\xi) = \frac{2i}{\omega}\,\mathcal{E}(\xi)\ (1 - e^{-i\omega|\xi|})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds\ e^{-i\omega s}\ \mathcal{E}(s-\xi) = -\frac{2i}{\omega}\, e^{-i\omega\xi} \qquad (\text{Б}.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \mathcal{E}(s-\xi) = -2\xi\ .$$

Литература

1. *Edwards, S.F., Peierls, R.E. Proc. Roy. Soc. 224, 24 (1954).* перев. Пробл. совр.физ. 3, 1955.
2. *Kemmer, N. Proc. Cambr. Rhil. Soc. 34, 354 (1938).*
3. *Lee, T.D. Phys. Rev. 95, 1329 (1954).*
4. *Chew, G.F. Phys. Rev. 94, 1748 (1954).*
5. *Wick, G.C. Revs. Modern. Phys. 27, 339 (1955).*
6. *Feynman, R.P. Phys. Rev. 84, 108 (1951).* перев. Пробл. совр.физ. 3, 1955.
7. *Sucher, J. Phys. Rev. 107, 1448 (1957).*
8. *Hori, S. Progr. Theor. Phys. 7, 578 (1952);* перев. Пробл. совр. физ., 3, 1955.
9. Б.М.Барбашов, Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 39, 450 (1960).
10. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Шапиро. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
11. И.М.Рыжик, И.С.Грандштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 ноября 1961 года.