3
П-44
839

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

М.И. Подгорецкий, Э.Н. Цыганов

Р - 839

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТИННОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ И ЕГО ФЛУКТУАЦИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Дубна 1961

13/5/1 зр.

М.И. Подгорецкий, Э.Н. Цыганов

Р - 839

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТИННОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ И ЕГО ФЛУКТУАЦИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Объединенный институт ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Если эффективность регистрации каких-либо событий неизвестна, применяют так называемый метод Гайгера и Вернера [1], который позволяет вычислить истинное число событий по результатам двух независимых наблюдений. В качестве примера укажем на определение истинного числа взаимодействий по результатам двух независимых просмотров в фотоэмульсиях /и на камерных пленках/ и определение истинного числа распавшихся ядер по 3γ – совпадениям [2-4].

Пусть N_0 -действительное число событий данного типа, N_1 -число событий, зарегистрированных при первом просмотре, N_2 -число событий, зарегистрированных при втором просмотре и N_{12}-число событий, зарегистрированных как в первом, так и во втором просмотрах /"совпадения"/. Тогда, если события данного типа равноценны по эффективности регистрации, можно написать равенства:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\bar{N}_{12}}{\bar{N}_2} ; \qquad /1/$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\bar{N}_{12}}{\bar{N}_1} ; \qquad /2/$$

$$\bar{N}_0 = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{\bar{N}_{12}} ; \qquad /3/$$

$$\mathcal{E} = 1-(1-\mathcal{E}_1)(1-\mathcal{E}_2) . \qquad /4/$$

Здесь $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}$ -эффективности регистрации событий при первом просмотре, при втором просмотре и после двукратного просмотра. Практически при использовании этих равенств вместо величин $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ и $\bar{N}_{12}$ подставляют результаты одного испытания, то есть наблюдаемые величины N_1, N_2 и N_{12} и используют выражения:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{N_{12}}{N_2} ; \qquad /1'/$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{N_{12}}{N_1} ; \qquad /2'/$$

$$N = \frac{N_1 N_2}{N_{12}} . \qquad /3'/$$

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о среднем значении величины N и флуктуациях N, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}$. Вопрос о флуктуациях $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}$ рассматривался в работе [2], однако результаты, полученные там, неверны.

1. Рассмотрим вопрос о соотношении величин $\frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{\bar{N}_{12}}$ и $\overline{\frac{N_1 N_2}{N_{12}}}$. Для этого разложим величину $\frac{N_1 N_2}{N_{12}}$ в ряд Тейлора вблизи точки / $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$

$\bar{N}_{12}$ /, ограничиваясь членами второго порядка малости.

$$\frac{N_1 N_2}{N_{12}} = \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{\bar{N}_{12}} + \frac{\bar{N}_2}{\bar{N}_{12}}\Delta N_1 + \frac{\bar{N}_1}{\bar{N}_{12}}\Delta N_2 - \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{\bar{N}_{12}^2}\Delta N_{12} + \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{\bar{N}_{12}^3}(\Delta N_{12})^2 + \frac{1}{\bar{N}_{12}}\Delta N_1 \Delta N_2 -$$

$$- \frac{\bar{N}_2}{\bar{N}_{12}^2}\Delta N_1 \Delta N_{12} - \frac{\bar{N}_1}{\bar{N}_{12}^2}\Delta N_2 \Delta N_{12}. \qquad /5/$$

Для среднего значения этой величины получаем:

$$\overline{\frac{N_1 N_2}{N_{12}}} = \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{\bar{N}_{12}} + \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_2}{\bar{N}_{12}^3}\overline{(\Delta N_{12})^2} + \frac{1}{\bar{N}_{12}}\overline{\Delta N_1 \Delta N_2} - \frac{\bar{N}_2}{\bar{N}_{12}}\overline{\Delta N_1 \Delta N_{12}} - \frac{\bar{N}_1}{\bar{N}_{12}^2}\overline{\Delta N_2 \Delta N_{12}}. \qquad /6/$$

Рассмотрим это выражение для двух конкретных постановок задачи.

В первом случае испытания /первый и второй просмотры/ проводятся на на одном и том же материале, то есть при фиксированном значении истинного числа событий N_0. Величины N_1, N_2 и N_{12} распределены при этом по биномиальному закону. Их дисперсии равны:

$$\overline{(\Delta N_1)^2} = N_0 \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1);$$

$$\overline{(\Delta N_2)^2} = N_0 \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_2);$$

$$\overline{(\Delta N_{12})^2} = N_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2).$$

С достаточной степенью точности можно также записать:

$$\overline{(\Delta N_1)^2} = N_1 (1 - \frac{N_{12}}{N_2}); \qquad /7'/$$

$$\overline{(\Delta N_2)^2} = N_2 (1 - \frac{N_{12}}{N_1}); \qquad /7''/$$

$$\overline{(\Delta N_{12})^2} = N_{12} (1 - \frac{N_{12}^2}{N_1 N_2}). \qquad /7'''/$$

Вычислим теперь коэффициенты корреляции /в общем случае/

$$\overline{\Delta N_1 \Delta N_2} = \overline{N_1 N_2} - \bar{N}_1 \bar{N}_2.$$

Зафиксировав вначале величину N_0, получим: $\overline{N_1 N_2} = N_0^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2$

Усреднение по N_0 дает

$$\overline{N_1 N_2} = \overline{N_0^2} \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Имеем, таким образом:

$$\overline{\Delta N_1 \Delta N_2} = \xi_1 \xi_2 D_{N_0}. \qquad /8'/$$

Дисперсия N_0 равна в рассматриваемом случае нулю. Отсюда следует, что $\overline{\Delta N_1 \Delta N_2} = 0$ x/. Аналогично получаем

$$\overline{\Delta N_1 \Delta N_{12}} = \xi_2 D_{N_1} = N_{12}\left(1 - \frac{N_{12}}{N_2}\right); \qquad /8''/$$

$$\overline{\Delta N_2 \Delta N_{12}} = \xi_1 D_{N_2} = N_{12}\left(1 - \frac{N_{12}}{N_1}\right). \qquad /8/$$

Подставляя /7/ и /8/ в /6/, получим:

$$\overline{\frac{N_1 N_2}{N_{12}}} = \frac{\overline{N_1}\,\overline{N_2}}{\overline{N_{12}}}\left\{1 + \frac{(1-\xi_1\xi_2)}{N_{12}} - \frac{(1-\xi_1)}{N_1} - \frac{(1-\xi_2)}{N_2}\right\}. \qquad /9/$$

При второй постановке задачи испытания проводятся на различных образцах с одинаковой интенсивностью интересующих нас событий. Легко видеть, что в этом случае величины N_0 , N_1 , N_2 , N_{12} распределены по закону Пуассона. Дисперсии и коэффициенты корреляции будут равны

$$\overline{(\Delta N_1)^2} = N_1 ; \qquad /10'/$$

$$\overline{(\Delta N_2)^2} = N_2 ; \qquad /10''/$$

$$\overline{(\Delta N_{12})^2} = N_{12} ; \qquad /10'''/$$

$$\overline{\Delta N_1 \Delta N_2} = \xi_1 \xi_2 D_{N_0} = N_{12} ; \qquad /11'/$$

$$\overline{\Delta N_1 \Delta N_{12}} = \xi_2 D_{N_1} = N_{12} ; \qquad /11''/$$

$$\overline{\Delta N_2 \Delta N_{12}} = \xi_1 D_{N_2} = N_{12} . \qquad /11'''/$$

Подставляя /10/ и /11/ в /6/, получим:

$$\overline{\frac{N_1 N_2}{N_{12}}} = \frac{\overline{N_1}\,\overline{N_2}}{\overline{N_{12}}}\left\{1 + \frac{1}{N_{12}} + \frac{N_{12}}{N_1 N_2} - \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right\}. \qquad /12/$$

Мы видим, что выражения /9/ и /12/ переходят в $\frac{\overline{N_1}\,\overline{N_2}}{\overline{N_{12}}}$ при большой статистике /малы члены типа $1/N$ /, или при эффективности нахождения, близкой к единице / $N_{12} \approx N_1$ или $N_{12} \approx N_2$ /. В последнем случае величина $\frac{N_1 N_2}{N_{12}}$ просто равняется величине N_0 .

2. Рассмотрим флуктуации величины $N = \frac{N_1 N_2}{N_{12}}$ для первой постановки задачи, когда испытания проводятся при фиксированном значении ис-

x/ Этот результат также следует непосредственно из независимости N_1 и N_2 при фиксированном N_0 .

тинного числа событий N . Ограничиваясь членами первого порядка малости, можно написать

$$\Delta N = \left(\frac{N_2}{N_{12}}\right)\Delta N_1 + \left(\frac{N_1}{N_{12}}\right)\Delta N_2 - \left(\frac{N_1 N_2}{N_{12}^2}\right)\Delta N_{12} .$$

Для дисперсии величины N получим выражение:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \left(\frac{N_2}{N_{12}}\right)^2\overline{(\Delta N_1)^2} + \left(\frac{N_1}{N_{12}}\right)^2\overline{(\Delta N_2)^2} + \left(\frac{N_1 N_2}{N_{12}^2}\right)^2\overline{(\Delta N_{12})^2} - 2\,\frac{N_2^2 N_1}{N_{12}^3}\,\overline{\Delta N_1 \Delta N_{12}}$$

$$- 2\,\frac{N_1^2 N_2}{N_{12}^3}\,\overline{\Delta N_2\,\Delta N_{12}} + 2\,\frac{N_1 N_2}{N_{12}}\,\overline{\Delta N_1 \Delta N_2} . \qquad /13/$$

Подставляя в /13/ выражения для дисперсий /7/ и коэффициентов корреляции /8/ и деля на N^2 , получаем:

$$\frac{\overline{(\Delta N)^2}}{N^2} = \left[\frac{(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)}{N_{12}} - \frac{(1-\varepsilon_1)}{N_1} - \frac{(1-\varepsilon_2)}{N_2}\right] , \qquad /14/$$

или по-другому

$$\frac{\overline{(\Delta N)^2}}{N^2} = \frac{(N_1 - N_{12})(N_2 - N_{12})}{N_1 N_2 N_{12}} . \qquad /14'/$$

Величина $\frac{\overline{\Delta N^2}}{N^2}$ обращается в нуль, если хотя бы одна из эффективностей ε_1 или ε_2 равна единице.

3. Определим флуктуации N при второй постановке задачи, когда зафиксировано не число событий, а их интенсивность. Подставляя в /13/ соответствующие выражения для дисперсий и корреляций /10/ и /11/, получаем:

$$\frac{\overline{(\Delta N)^2}}{N^2} = \left[\frac{1}{N_{12}} - \frac{(1-\varepsilon_1)}{N_1} - \frac{(1-\varepsilon_2)}{N_2}\right] . \qquad /15/$$

Другая запись:

$$\frac{\overline{(\Delta N)^2}}{N^2} = \left[\frac{(N_1 - N_{12})(N_2 - N_{12})}{N_1 N_2 N_{12}} + \frac{1}{N}\right] . \qquad /15'/$$

Если $\varepsilon_1 \ll 1$ и $\varepsilon_2 \ll 1$, то $\frac{\overline{(\Delta N)^2}}{N^2} \approx \frac{1}{N_{12}}$.

Сравнивая выражения /14'/ и /15'/ мы видим, что они различаются лишь на член $1/N$. Действительно, полная величина флуктуаций N определяется флуктуациями в истинном числе событий /для пуассоновского распределения относительная флуктуация равна $1/N$ / и флуктуациями в эффективности регистрации. Если истинное число событий фиксировано, то выражение /15'/ совпадает с /14'/.

Из выражения /15/ видно, что при достаточно высоких эффективностях можно пренебречь ошибкой, связанной с флуктуациями эффективности.

4. В некоторых случаях эффективность регистрации интересна сама по себе, например, как характеристика качества просмотра. В этом случае полезно также знать, как она флуктуирует.

Начнем с рассмотрения эффективности однократного просмотра ε_1. Поскольку величину N_2 нужно считать в этом случае фиксированной, из /1'/ следует

$$\Delta \varepsilon_1 = (1/N_2)\,\Delta N_{12}.$$

Для дисперсии ε_1 имеем:

$$\overline{(\Delta \varepsilon_1)^2} = (1/N_2^2)\,\overline{(\Delta N_{12})^2}.$$

Величина N_{12} распределена по биноминальному закону, то есть

$$\overline{(\Delta N_{12})^2} = N_2\, \varepsilon_1 (1-\varepsilon_1) = N_{12}\left(1-\frac{N_{12}}{N_2}\right).$$

Окончательно получаем:

$$\overline{(\Delta \varepsilon_1)^2} = \frac{\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)}{N_2}; \qquad /16/$$

$$\overline{(\Delta \varepsilon_2)^2} = \frac{\varepsilon_2(1-\varepsilon_2)}{N_1}. \quad x/$$

Рассмотрим теперь флуктуации величины ε. Имеем

$$\varepsilon = 1-(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2) = \frac{N_{12}}{N_1} + \frac{N_{12}}{N_2} - \frac{N_{12}^2}{N_1 N_2},$$

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{N_{12}^2}{N_1^2 N_2} - \frac{N_{12}}{N_1^2}\right)\Delta N_1 + \left(\frac{N_{12}^2}{N_1 N_2^2} - \frac{N_{12}}{N_2^2}\right)\Delta N_2 +$$

$$+\left(\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_1} - \frac{2N_{12}}{N_1 N_2}\right)\Delta N_{12},$$

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \left[\frac{N_{12}}{N_1^2}\left(1-\frac{N_{12}}{N_2}\right)\right]^2 \overline{(\Delta N_1)^2} + \left[\frac{N_{12}}{N_2^2}\left(1-\frac{N_{12}}{N_1}\right)\right]^2 \overline{(\Delta N_2)^2} +$$

$$+\left(\frac{N_1+N_2-2N_{12}}{N_1 N_2}\right)^2 \overline{(\Delta N_{12})^2} - 2\,\frac{N_{12}}{N_1^2}\left(1-\frac{N_{12}}{N_2}\right)\left(\frac{N_1+N_2-2N_{12}}{N_1 N_2}\right)\overline{\Delta N_1\, \Delta N_{12}} - \qquad /17/$$

$$-2\,\frac{N_{12}}{N_2^2}\left(1-\frac{N_{12}}{N_1}\right)\left(\frac{N_1+N_2-2N_{12}}{N_1 N_2}\right)\overline{\Delta N_2\, \Delta N_{12}} + 2\,\frac{N_{12}^2}{N_1 N_2}\left(1-\frac{N_{12}}{N_2}\right)\left(1-\frac{N_{12}}{N_1}\right)\overline{\Delta N_1\, \Delta N_2}.$$

Истинное число событий N_0 естественно в этом случае считать фиксированным. Поэтому, член с $\overline{\Delta N_1\, \Delta N_2}$ выпадает, так как величины N_1 и N_2 независимы. Подставляя в /17/ соответствующие выражения для дисперсий

---

x/ В работе /2/ величины $\overline{(\Delta\varepsilon_1)^2}$ и $\overline{(\Delta\varepsilon_2)^2}$ определяются из выражений $\varepsilon_1 = N_1/N$ и $\varepsilon_2 = N_2/N$, в то время как они определяются выражениями /1'/ и /2'/. В дальнейшем, при вычислении флуктуации ε, авторы /2/ ошибочно считают величины ε_1 и ε_2 статистически независимыми. Как нам стало известно, ошибочность выражений для $(\Delta\varepsilon_1)^2$ и $(\Delta\varepsilon_2)^2$ в работе [2] отмечалась также К.Д. Толстовым.

и корреляций /7/ и /8/, получаем

$$(\Delta \xi)^2 = N_{12}^2 \{ (\frac{1-\xi_1}{N_1})^3 + (\frac{1-\xi_2}{N_2})^3 + (\frac{1-\xi_1}{N_1} + \frac{1-\xi_2}{N_2})^2 (\frac{1-\xi_1\xi_2}{N_{12}}) - $$
$$ - 2(\frac{1-\xi_1}{N_1} + \frac{1-\xi_2}{N_2})[(\frac{1-\xi_1}{N_1})^2 + (\frac{1-\xi_2}{N_2})^2]\} . \qquad /18/$$

Авторы благодарят И.Н. Силина за полезные дискуссии.

Литература

1. E.Rutherford, J.Chadwick and C.D.Ellis, Radiations from Radioactive Substances, p. 548 (1930)
2. Y.K.Lim, J.E.Laby, and V.D.Hopper, Nuovo Cimento, 15, Suppl. N 3, 382 (1960).
3. C.J.Waddington, Nuovo Cimento, 19, Suppl N 1, 37, (1961).
4. A.C.G. Mitchell, Rev. Mod. Phys. 20, 296 (1948).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 ноября 1961 г.