

18  
B-99  
836

CV



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

---

Г.Н. Вялов

P - 836

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАЗОРЕ  
СИММЕТРИЧНОГО МАГНИТА

Дубна, 1961

Г.Н. Вялов

Р - 836

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАЗОРЕ  
СИММЕТРИЧНОГО МАГНИТА

Направлено в ЖТФ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

1293/6 38.

#### А н н о т а ц и я

Решена плоская задача формирования магнитного поля в зазоре симметричного магнита из идеального магнетика, ограниченного произвольным контуром. Рассматривается краевой эффект при формировании магнитного поля прямолинейным током в зазоре магнита с прямоугольным краем.

#### Abstract

The two-dimensional problem is solved of forming the magnetic field in the gap of the symmetrical magnet made of ideal magnetic material limited by an arbitrary contour. The edge effect is considered in forming the magnetic field by the rectilinear current in the magnet gap with a rectangular edge.

## 1. Введение

В работах <sup>/1,2/</sup> решаются идеализированные задачи формирования магнитного поля в зазоре магнита с бесконечными плоскопараллельными полюсами. В реальном случае необходимо учитывать влияние края магнита, т.е. краевой эффект. Краевой эффект характеризуется различием магнитных полей, создаваемых одним и тем же электрическим током, лежащим на поверхности полюса, в зависимости от расстояния тока до края полюса или различием распределений тока, создающих одно и то же магнитное поле, в зависимости от формы полюса. Существование краевого эффекта в зазоре магнита следует из характера распределения магнитного поля прямолинейного тока, расположенного вблизи вершины прямого двугранного угла, заполненного идеальным магнетиком <sup>/3,4/</sup>. В этом случае магнитное поле тока на  $1/3$  меньше поля того же тока, находящегося вдали от края полюса. Количественные оценки краевого эффекта в зазоре магнита до сих пор не производились, хотя практическая необходимость таких оценок возникает довольно часто. Нашей целью является расчет краевого эффекта в двумерной задаче формирования магнитного поля.

С учетом результатов <sup>/1,2/</sup> для симметричных полюсов из идеального магнетика  $\mu = \infty$  / решение задачи получается методом конформных отображений <sup>/2,5/</sup>.

## 2. Постановка и решение задачи формирования заданного магнитного поля

Пусть форма магнита и распределение электрических токов, текущих вдоль оси  $z$  и создающих на плоскости  $y = 0$  заданную  $y$ -компоненту магнитного поля  $H_y(x, 0, z) \equiv H(x)$ , не зависят от декартовой координаты  $z$ , а зависят только от двух координат  $x$  и  $y$ , причем магнит симметричен относительно плоскости  $y = 0$ . Будем рассматривать плоскость  $(x, y)$  как плоскость комплексной переменной  $z = x + iy$ .

Поскольку интересующие нас величины не зависят от декартовой координаты  $z$ , в дальнейшем она нигде не будет упоминаться и поэтому обозначение  $/1/$  не может привести к путанице. Комплексное сопряжение обозначается чертой над буквой.

$$z = x + iy.$$

/1/

Все наши рассуждения относятся к комплексной плоскости /1/, на которой магнит изображается заштрихованной областью, ограниченной контуром  $C(z)$  /рис. 1/.

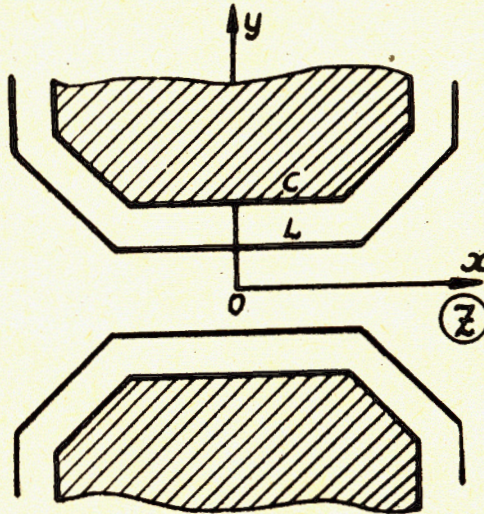


Рис. 1. Поперечный разрез магнита.  $C$  - граница магнита,  $L$  - естественная координатная линия, вдоль которой распределяются электрические токи.

Требуется найти распределение электрических токов, лежащих бесконечно тонким слоем вдоль естественных координатных линий  $L(z)$  и  $L(\bar{z})$  и создающих на оси  $x$  заданную  $y$ -компоненту магнитного поля  $H(x)$ . Понятие естественной координатной линии объясняется ниже при рассмотрении метода решения задачи.

Относительно допустимых форм магнитного поля  $H(x)$ , для которых задача имеет решение, можно сказать следующее. Согласно условиям задачи, источники магнитного поля распределены на контурах  $L(z)$  и  $L(\bar{z})$ . Поэтому в комплексной области  $D(z)$  между контурами  $L(z)$  и  $L(\bar{z})$  магнитное поле является гармонической функцией и описывается комплексным скалярным потенциалом /2,3,5/

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y). \quad /2/$$

В области  $D(z)$  функция  $f(z)$  является аналитической и не имеет особенностей.

Мы будем рассматривать симметричный относительно плоскости  $y=0$  магнит и симметричные распределения электрических токов. В этом случае  $x$ -компонента магнитного поля в плоскости симметрии  $y=0$  исчезает. Аналитическое продолжение  $H_n(z)$  функции  $-iH(x)$ , описывающей при  $y=0$  заданную  $y$ -компоненту магнитного поля, является полным комплексным полем в области  $D(z)$

$$H_n(z) = H_x(x, y) - iH_y(x, y), \quad /3/$$

причем

$$H_n(z) = i \frac{df}{dz}, \quad /4/$$

если магнитное поле в зазоре определяется как градиент скалярного потенциала  $V(x, y)$

$$\begin{aligned} H_x &= - \frac{\partial V}{\partial x} \\ H_y &= - \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad /5/$$

Таким образом,  $H(x)$  - произвольная функция, аналитическая в области  $D(z)$ .

При антисимметричном распределении тока в плоскости  $y=0$  исчезает  $y$ -компонента магнитного поля. Метод решения задачи в этом случае принципиально тот же.

В случае, если в средней плоскости  $y=0$  заданы обе компоненты магнитного поля  $H_x \neq 0$  и  $H_y \neq 0$ , задачу можно разбить на две указанные более простые задачи, если воспользоваться принципом суперпозиции для магнитного поля и распределения тока.

Для решения задачи удобно заменить искомое распределение электрических токов распределением эквивалентной намагниченности<sup>/1/</sup>, направленной по нормали к координатной линии  $L(z)$  и расположенной вдоль нее бесконечно тонким слоем. В этом случае уравнения Максвелла, описывающие магнитное поле в зазоре магнита, можно представить в виде

$$H_{lk} \equiv \frac{\partial H_k}{\partial x^l} - \frac{\partial H_l}{\partial x^k} = 0 \quad /6/$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x^1} = \frac{1}{\epsilon} H_1 \frac{\partial \epsilon}{\partial x^1} - 4\pi \frac{\partial M_1}{\partial x^1}, \quad /7/$$

$$\epsilon(x, y) \equiv 1/\mu(x, y), \quad 1, k=1, 2; \quad x^1 = x, \quad x^2 = y,$$

$H_1$  - вектор напряженности магнитного поля,

$M_1$  - вектор плотности эквивалентной намагниченности.

Пусть теперь функция  $z(w)$  осуществляет конформное отображение полосы комплексной плоскости  $w = u + iv$  /рис. 2/

$$-y_0 < \text{Im } w < y_0. \quad /8/$$

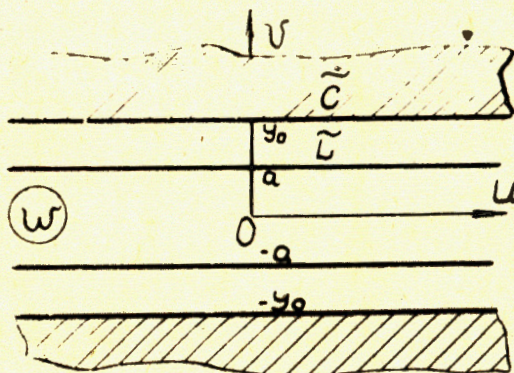


Рис. 2. Поперечный разрез магнита в координатах  $u, v$ .  $\tilde{C}$  - преобразованная граница магнита,  $\tilde{L}$  - преобразованная естественная координатная линия.

на незаштрихованную часть комплексной плоскости  $z$  /рис. 1/. Примем в качестве  $2y_0$  -минимальный зазор между полюсами магнита. Под естественной координатной линией  $L(z)$  будем понимать такую линию  $L(z)$ , которая получается при конформном отображении  $z(w)$  из прямой

$\text{Im } w = a = \text{const}$ , лежащей в полосе  $0 < \text{Im } w < y_0$ . Физический смысл отображения  $z(w)$  состоит в том, что в криволинейных координатах  $(u, v)$  рассматриваемый магнит имеет зазор с бесконечными плоскопараллельными границами. Для такого зазора решение поставленной нами задачи известно<sup>/1/</sup>.

В данном случае это решение определяет ковариантные компоненты<sup>/6/</sup> намагниченности, так как в криволинейных координатах  $(u, v)$  уравнения Максвелла, связывающие ковариантные компоненты магнитного поля  $\vec{H}_1$  и намагниченности  $\vec{M}_1$ , по виду не отличаются от уравнений /6/ и /7/ в декартовых координатах, т.е.

$$\tilde{H}_{ik} = 0$$

/9/

$$\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial q^1} = \frac{1}{\xi} \tilde{H}_i \frac{\partial \xi}{\partial q^1} - 4\pi \frac{\partial \tilde{M}_i}{\partial q^1},$$

/10/

где  $q^1 = u$ ;  $q^2 = v$ .

По аналогии с работой /1/, решение  $\tilde{M}(u, \alpha, y_0)$ , определяющее мощность магнитного листка, расположенного при  $v = \alpha$  и создающего на оси  $v=0$  заданную  $v$ -компоненту магнитного поля

$$\tilde{H}_2(u, v)|_{v=0} = \tilde{H}(u),$$

может быть представлено в виде

$$\tilde{M}(u, \alpha, y_0) = \frac{1}{2} [\tilde{M}_0(u, \alpha) - \tilde{M}_0(u, \alpha - 2y_0)]$$

/11/

/коэффициент  $\alpha = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0}$  положен равным 1, так как  $\mu = \infty$  /, где функция  $\tilde{M}_0(u, \alpha)$  определяется интегралом

$$2\tilde{M}_0(u, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{H}(p) \frac{e^{a|p| + ipx}}{|p|}$$

/12/

/см. /7/, уравнение /4.5//.

Коэффициент 2 при  $\tilde{M}_0(u, \alpha)$  соответствует случаю симметричного распределения токов на обеих линиях  $L(z)$  и  $L(\bar{z})$ .

Для дальнейших вычислений удобно ввести функцию

$$\tilde{g}(p) = \frac{\tilde{H}(p)}{|p|}.$$

При этом получим

$$\tilde{M}_0(u, \alpha) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{g}(p) e^{a|p| + ipu}$$

/13/

или

$$\tilde{M}_0(u, \alpha) = \frac{1}{4\pi} [\tilde{g}_+(\bar{w}) + \tilde{g}_-(w)]$$

/14/

/  $w = u + i\alpha$  ; черта над  $w$  означает комплексное сопряжение/, где

$$\tilde{g}_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \tilde{g}(p) e^{ipw} dp \quad /15/$$

$$\tilde{g}_-(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \tilde{g}(p) e^{ipw} dp. \quad /16/$$

Функции  $g_+(w)$  и  $g_-(w)$  аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно.

Функция  $\tilde{H}(u)$  выражается через функции  $\tilde{g}_+(u)$  и  $\tilde{g}_-(u)$  равенством

$$\tilde{H}(u) = i \frac{d}{du} [\tilde{g}_-(u) - \tilde{g}_+(u)]. \quad /17/$$

Аналитически продолжая функцию  $\tilde{H}(u)$  на комплексную плоскость  $w = u + iv$ , учитывая равенство  $\tilde{H}_n(w) = i \frac{df[z(w)]}{dw}$  и сравнивая /17/ с /4/, находим, что функция  $-i[\tilde{g}_-(w) - \tilde{g}_+(w)]$  тождественно совпадает с комплексным скалярным потенциалом магнитного поля в зазоре

$$\tilde{f}[z(w)] \equiv [\tilde{g}_-(w) - \tilde{g}_+(w)](-i). \quad /18/$$

Поэтому можно обозначить

$$-i \tilde{g}_-(w) \equiv \tilde{f}_-[z(w)] \quad /19/$$

$$i \tilde{g}_+(w) \equiv \tilde{f}_+[z(w)], \quad /20/$$

где  $\tilde{f}_+(z)$  и  $\tilde{f}_-(z)$  являются частями функции  $\tilde{f}(z)$ , аналитическими в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, причем  $\tilde{f}(z) \equiv \tilde{f}_+(z) + \tilde{f}_-(z)$ . Соотношения /14/ и /17/ можно переписать в следующем виде

$$\tilde{M}_0(u, \alpha) = \frac{1}{4\pi} [\tilde{f}_-(z) - \tilde{f}_+(z)], \quad z = z(u + i\alpha) \quad /21/$$

$$\tilde{H}(u) \approx - \frac{d}{du} [\tilde{f}_+(z) + \tilde{f}_-(z)] \approx - \frac{df(z)}{du}, \quad z = z(u). \quad /22/$$

Поскольку  $f(z)$  является скаляром, т.е. не меняется при преобразованиях координат  $f \equiv \tilde{f}$ , то можно также написать

$$\mathcal{M}_0(x, y) = \frac{1}{4\pi} [f_-(z) - f_+(\bar{z})], \quad /23/$$

где  $z$  является точкой контура  $L$  и

$$H(x) = - \frac{df(x)}{dx}, \quad /24/$$

Отсюда

$$f(x) = - \int H(x) dx + \text{const} \quad /25/$$

$$f_{\pm}(x) = - \int H_{\pm}(x) dx + \text{const}. \quad /26/$$

Подставляя выражение /23/ в /11/, получим окончательный результат для мощности эквивалентной намагниченности  $\mathcal{M}(x, y)$ , формирующей заданную  $y$ -компоненту магнитного поля  $H(x)$  в зазоре симметричного магнита

$$\mathcal{M}(x, y) = \frac{1}{8\pi} \{ [f_-(z) - f_+(\bar{z})] - [f_-(z_c) - f_+(\bar{z}_c)] \}, \quad /27/$$

где  $z$  - точка на контуре  $L$ , получающаяся из соответствующей точки  $w$  на контуре  $\bar{L}$ , а точка  $z_c$  получается из точки  $w - 2iy_0$ , смещенной относительно  $w$  вдоль мнимой оси.

Для вычисления искомой поверхностной плотности тока необходимо продифференцировать функцию  $\mathcal{M}(x, y)$  вдоль контура. Тогда получим

$$j(x, y) = \frac{d\mathcal{M}(x, y)}{ds} = \frac{1}{8\pi i} \{ [H_-(z) e^{ia(z)} - H_+(\bar{z}) e^{ia(\bar{z})}] - [H_-(z_c) e^{ia(z_c)} - H_+(\bar{z}_c) e^{ia(\bar{z}_c)}] \}, \quad /28/$$

где  $a(z)$  - угол наклона контура  $L(z)$  к оси  $x$  в точке  $z$ ;  $ds$  - элемент дуги контура,  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ .

Значения намагниченности и тока на контуре  $L(\bar{z})$  в силу симметрии задачи совпадают с /27/ и /28/ соответственно.

Для практического использования формул /27/ и /28/ необходимо знать конкретный вид функции преобразования  $z(w)$ . В частном случае, когда контур  $L$  совпадает с границей магнита  $C$ , а смещенный кон-

тур  $L(z_c)$  совпадает с  $C(\bar{z})$ , формулы /27/ и /28/ упрощаются и приобретают вид

$$M(x, y) = \frac{1}{8\pi} [f(z) - f(\bar{z})] \quad /27'/$$

$$j(x, y) = \frac{1}{8\pi i} [H(z) e^{ia(z)} - H(\bar{z}) e^{ia(\bar{z})}] \quad /28'/$$

Для практического применения формул /27'/ и /28'/ не требуется знать вид функции преобразования  $z(w)$ .

Рассмотрим конкретный пример. Пусть магнитное поле  $H(x)$  задано в виде

$$H^{(\pm)}(x) = H \left[ \frac{1}{(x - \bar{z}_0)^n} \pm \frac{1}{(x - z_0)^n} \right] \quad /29/$$

$$z_0 = x_0 + i\alpha, \quad \alpha > y_0, \quad n > 0.$$

При этом

$$f^{(\pm)}(z) = \frac{H^{(\pm)}(z)}{n-1} \left[ \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^{n-1}} \pm \frac{1}{(z - z_0)^{n-1}} \right] \quad /30/$$

при соответствующем выборе постоянной интегрирования в /25/. Намагниченность  $M(x, y)$  и плотность токов определяются в этом случае равенствами

$$M^{(\pm)}(x, y) = \frac{iH^{(\pm)}(z)}{8\pi(n-1)} \left\{ \left[ \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^{n-1}} \pm \frac{1}{(z - z_0)^{n-1}} \right] - \left[ \frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^{n-1}} \pm \frac{1}{(\bar{z} - z_0)^{n-1}} \right] \right\} \quad /31/$$

$$j^{(\pm)}(x, y) = \frac{H^{(\pm)}(z)}{8\pi i} \left\{ e^{ia(z)} \left[ \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^n} \pm \frac{1}{(z - z_0)^n} \right] - e^{ia(\bar{z})} \left[ \frac{1}{(\bar{z} - \bar{z}_0)^n} \pm \frac{1}{(\bar{z} - z_0)^n} \right] \right\} \quad /32/$$

Таким образом, согласно формулам /27'/, /28'/, /31/ и /32/, мощность магнитного листка  $M(x, y)$  или плотность тока  $j(x, y)$ , необходимые для формирования заданной  $y$ -компоненты магнитного поля  $H(x)$ , определяются только формой полюса, если известен аналитический вид функции  $H(x)$ . Практически широкий класс плоских задач рассмотренного типа можно свести к аппроксимации заданной функции  $H(x)$  линейной комбинацией функций /29/ и использованию формул /31/ и /32/.

### 3. Поле прямолинейного тока

Магнитное поле тока, протекающего по прямолинейному проводу, расположенному между двумя параллельными плоскостями - границами железа, рассчитано в работе /2/. Используемое нами обозначение для комплексного магнитного поля отличается знаком комплексного сопряжения от обозначения работы /2/. Учитывая это, имеем следующее выражение для комплексного магнитного поля в координатах  $u, v$

$$H_n(w) = H_u(u, v) - i H_v(u, v) =$$

$$= \frac{\pi J}{y_0} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi(v+y_0+h)}{2y_0}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(u-u_0)}{2y_0} - \cos \frac{\pi(v+y_0+h)}{2y_0}} + \frac{\sin \frac{\pi(v+y_0-h)}{2y_0}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(u-u_0)}{2y_0} - \cos \frac{\pi(v+y_0-h)}{2y_0}} \right\} +$$

$$+ i \left\{ \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(u-u_0)}{2y_0}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(u-u_0)}{2y_0} - \cos \frac{\pi(v+y_0+h)}{2y_0}} + \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(u-u_0)}{2y_0}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(u-u_0)}{2y_0} - \cos \frac{\pi(v+y_0-h)}{2y_0}} \right\}, /33/$$

где  $h$  - расстояние тока  $J$  от нижней поверхности полюса в координатах  $u, v$ .

Комплексное поле  $H_n(z)$  в координатах  $x, y$  выражается через  $H_n(w)$  с помощью уравнения /4/. Особый практический интерес представляет связь между полями  $H_n(z)$  и  $H_n(w)$  в средней плоскости зазора. В этом случае  $\frac{dz}{dw}$  является действительной величиной и поэтому имеет место простая связь

$$H_x(x, 0) = H_u(u, 0) l / \frac{dz(u)}{du}$$

$$H_y(x, 0) = H_v(u, 0) l / \frac{dz(u)}{du}. \quad /34/$$

Для конкретных вычислений поля  $H_x, H_y$  через  $H_u, H_v$  необходимо знать функцию  $z(w)$ , осуществляющую рассмотренное нами конформное отображение областей.

Рассмотрим, например, магнитное поле прямолинейного тока, если полюс имеет вид прямого двугранного угла /см. рис. 3/.

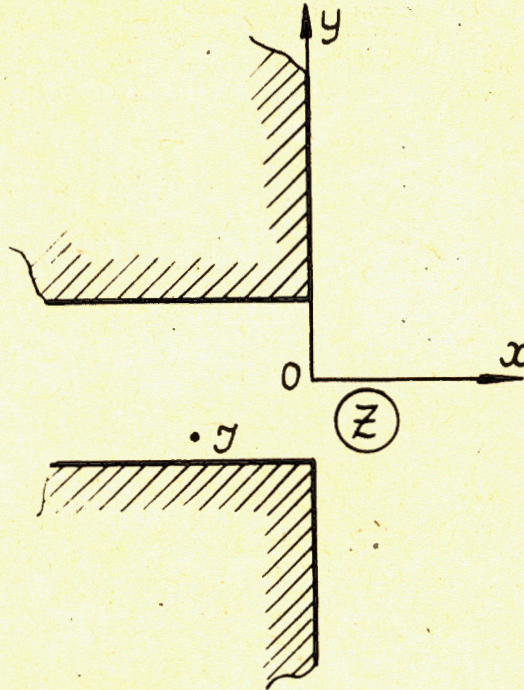


Рис. 3. Магнит с прямоугольным краем. Ток  $J$  находится в точке  $x_0, y_1$ .

Пусть ток находится в точке  $x_0, y_1$ , причем  $x_0 < 0$ . Нас интересует отношение величины магнитного поля в точке  $x_0, 0$  к величине поля в точке  $x \rightarrow -\infty, y=0$  как функция координаты  $x_0$ . Это отношение определяется равенством

$$\left| \frac{H(x_0)}{H(-\infty)} \right| = \eta(x_0) = 1 / \frac{dz(u)}{du}, \quad /35/$$

причем 
$$\frac{dz(u)}{du} = \sqrt{1 + e^{\frac{\pi u}{y_0}}} \quad /36/$$

и

$$x_0 \equiv z(u) = \frac{2y_0}{\pi} \left\{ \sqrt{1 + e^{\frac{\pi u}{y_0}}} + \ln \left( \sqrt{1 + e^{\frac{\pi u}{y_0}}} - 1 \right) - \frac{\pi u}{y_0} \right\} \quad /37/$$

/см. /5/, стр. 175-176/.

Зависимость  $\eta(x_0)$ , рассчитанная по формулам /35/, /36/, /37/, приводится на рис. 4.

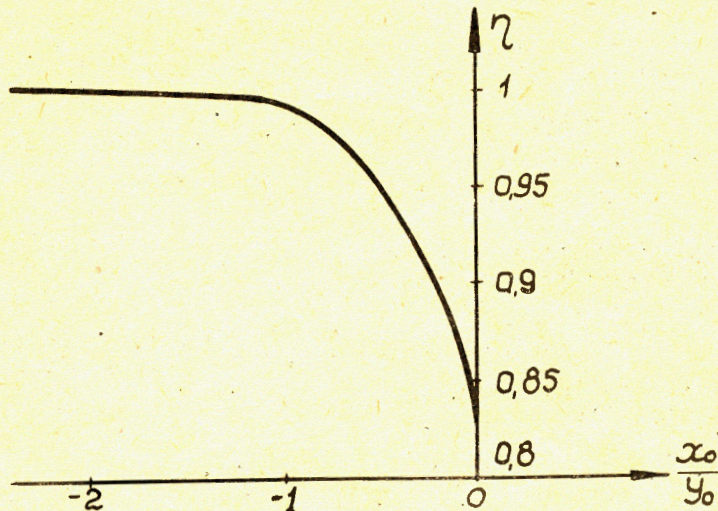


Рис. 4. Эффективность прямолинейного электрического тока в зазоре идеального магнита как функция координаты  $x_0$ .

$$\eta(x_0) = \left| \frac{H(x_0)}{H(-\infty)} \right|$$

В точке  $x_0=0$   $\eta(0) \approx 0,83$ , т.е. влияние края уменьшает магнитное поле тока на 17%. Краевой эффект заметен на расстояниях от края порядка полузазора магнита. При  $x_0 = -y_0$   $\eta \approx 0,99$ , т.е. краевой эффект меньше 1%. Приведенные результаты справедливы для полюсов из идеального магнетика ( $\mu = \infty$ ). В реальных магнитах при больших значениях поля ( $H > 10^4$  эрстед) края магнита насыщаются, причем  $\mu$  падает с приближением к краю. Это приводит к увеличению краевого эффекта, которое трудно оценить аналитически из-за нелинейности уравнений Максвелла в неравномерно намагниченном железе. В этом случае в кривую  $\eta(x_0)$  необходимо вводить эмпирические поправки, растущие с увеличением поля. Пределы применимости формулы /35/ по величине магнитного поля зависят от качества данного магнита и могут быть установлены экспериментально.

В заключение я считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность В.В. Бабинову за полезную дискуссию и ценные советы.

Л и т е р а т у р а

1. Г.Н. Вялов. Некоторые задачи формирования магнитного поля током. Препринт ОИЯИ, 735, Дубна 1961.
2. И.М. Аснин. Расчеты электромагнитных полей. ВЭТА, Л., 1939.
3. Г.А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. АН СССР, М-Л, 1948.
4. В.И. Данилов. Формирование магнитных полей для ускорителей с пространственной вариацией. Диссертация, ОИЯИ, 1959.
5. М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Издание 1-е, ГИФМЛ, М., 1948.
6. Н.Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. АН СССР, М., 1951.
7. Г.Н. Вялов. Об одном методе расчета формы магнита по заданному полю. Препринт ОИЯИ, 708, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел  
16 ноября 1961 г.