

808



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

Л.А. Саркисян

P-808

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ПОЛЮСОВ
ЭЛЕКТРОМАГНИТА УСКОРИТЕЛЯ
МЕТОДОМ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЕЙ
С УЧЕТОМ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

Дубна 1961 год

Л.А. Саркисян

P-808

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ ПОЛЮСОВ
ЭЛЕКТРОМАГНИТА УСКОРИТЕЛЯ
МЕТОДОМ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЕЙ
С УЧЕТОМ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА

1242/3 140

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

А н н о т а ц и я

Рассмотрен вопрос формирования заданного закона напряженности магнитного поля $H_z(r, \theta, \phi)$ в медианной плоскости ускорителя с помощью профилированных полюсов, рассчитанных методом эквипотенциалей с учетом краевого эффекта полюса. Приводятся формулы для расчета сложных профилей полюсов электромагнитов ускорителей.

Abstract

The problem is considered of forming the given law of the magnetic field intensity $H_z(r, \theta, \phi)$ in the median plane of the accelerator with the aid of the profiled poles calculated by using the equipotential method, the edge pole effect being taken into account. The formulas are given for calculating the complex profiles of the electromagnet poles in the accelerators.

В в е д е н и е

Известный расчетный метод формирования магнитных полей для ускорителей — метод эквипотенциалей^{/1-4/} состоит в том, что поверхности полюсного наконечника электромагнита придается форма, совпадающая с одной из эквипотенциальных поверхностей $\Phi(r, z, \phi) = \text{Const}$, где $\Phi(r, z, \phi)$ — скалярный потенциал магнитного поля (предполагается, что магнитная проницаемость материала полюса бесконечна).

Задача состоит в решении трехмерного уравнения Лапласа $\Delta\Phi(r, z, \phi) = 0$ при заданных граничных условиях

$$-\nabla_n \Phi(r, z, \phi) = H_n(s) = H_n(r, z, \phi), \quad (1)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности (s), $H_n(r, z, \phi)$ — заданная функция изменения напряженности магнитного поля на поверхности (s), удовлетворяющая дополнительному условию $\int_s H_n ds = 0$.

При формировании магнитных полей ускорителей область формирования поля ограничена диаметром полюсного наконечника электромагнита. Это приводит к тому, что профиль полюса, определенный решением уравнения Лапласа при заданных условиях (1) на медианной поверхности ($z = 0$), не обеспечивает создания заданного закона поля $H_z(r, 0, \phi)$ на конечных радиусах электромагнита^{/4/}.

Решение вопроса формирования заданного закона поля $H_z(r, 0, \phi)$ в средней плоскости ускорителя с помощью профилированных полюсов, рассчитанных методом эквипотенциалей, может быть проведено путем задания новых граничных условий, учитывающих краевой эффект.

Экспериментальное определение распределения напряженности магнитного поля электромагнита вдоль радиуса в зависимости от его геометрии и индукции позволяет учесть краевой эффект^{x)}.

Расчеты по формированию профиля полюса электромагнита для коррекции краевого эффекта плоского и профилированных зазоров также основаны на использовании математического аппарата метода эквипотенциалей.

x) Учет краевого эффекта был проведен также в работе^{/5/} при расчете формы полюса магнита β -спектрометра. Однако предлагаемый нами метод расчета является более общим и позволяет учесть краевой эффект с гораздо большей степенью точности при формировании магнитных полей сложной конфигурации, используемых в современных ускорителях.

1. Скалярный потенциал магнитного поля, заданного в медианной плоскости электромагнита в виде: $H_r(r, \phi) = H_\phi(r, \phi) = 0$, $H_z(r, \phi) = F(r, \phi)$

В зазоре электромагнита, свободного от токов, уравнение Лапласа для скалярного потенциала в цилиндрической системе координат может быть представлено в виде^{x)}:

$$\Delta \Phi(r, z, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial \Phi(r, z, \phi)}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, z, \phi)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z, \phi)}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

Задавая решение этого уравнения в виде ряда

$$\Phi(r, z, \phi) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m-1}(r, \phi) z^{2m-1} \quad (3)$$

для коэффициентов разложения получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$2m(2m+1)f_{2m+1}(r, \phi) = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial f_{2m-1}(r, \phi)}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_{2m-1}(r, \phi)}{\partial \phi^2} \right] \quad (4)$$

показывающие, что все коэффициенты выражаются через $f_1(r, \phi)$. Для связи скалярного потенциала с заданными граничными условиями в плоскости $z=0$ электромагнита имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi(r, z, \phi)}{\partial r} \Big|_{z=0} &= -H_r(r, \phi) = 0 \\ \frac{\partial \Phi(r, z, \phi)}{\partial \phi} \Big|_{z=0} &= -H_\phi(r, \phi) = 0 \\ \frac{\partial \Phi(r, z, \phi)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -H_z(r, \phi) = -F(r, \phi) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

^{x)} Начало координат совпадает с центром зазора электромагнита.

Таким образом, с помощью рекуррентных соотношений (4) и граничных условий (5) можно определить скалярный потенциал поля для любой точки однородного пространства в зазоре электромагнита.

Из (3) следует $\frac{\partial \Phi(r, z, \phi)}{\partial z} \Big|_{z=0} = f_l(r, \phi)$

$$f_l(r, \phi) = - \nabla_z^2(r, \phi) = - \Gamma(r, \phi). \quad (6)$$

В случае аксиально-симметричного магнитного поля формула (4) преобразуется к виду

$$2m(2m+1) f_{2m+l}(r) = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} f_{2m-l}(r) \right\}. \quad (7)$$

11. Учет краевого эффекта в расчетах по формированию магнитных полей методом эквипотенциалей

В работах /1-4/ были получены выражения скалярных потенциалов по определению профиля полюсов электромагнита для магнитных полей ускорителей с аксиальной симметрией с азимутальной /6/ и пространственной /7/-/8/ вариациями. В этих работах авторы основывались на том, что поверхности полюсов являются эквипотенциальными.

Эксперименты, проведенные в /4/ с целью проверки расчетов по формированию заданных законов изменения поля в зазоре электромагнита этим методом, указали на существенное отклонение расчетных значений от экспериментальных. Это связано с тем, что расчеты по профилированию полюса были выполнены без учета краевого эффекта полюса, в результате чего рассчитанный профиль для фиксированного закона изменения напряженности поля с радиусом не зависел от уровня индукции в зазоре электромагнита.

Учет краевого эффекта может быть проведен в рамках метода эквипотенциалей путем задания новых граничных условий по описанной ниже схеме.

Профилю полюса придается форма, совпадающая с одной из эквипотенциальных поверхностей $\Phi(r, z, \phi) = \text{Const}$, представляющей решение уравнения Лапласа при следующих граничных условиях в плоскости $z = \eta$ /9/ :

$$\frac{\partial \Phi(r, z, \phi)}{\partial z} \Big|_{z=0} = - [H(r, \phi) + H_I(r) + \sum_{n=2}^{\infty} H_{2n-1}(r, \phi)] \quad (9)$$

для магнитных полей, зависящих от ϕ , и

$$\frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = - [H(r) + H_I(r) + \sum_{n=2}^{\infty} H_{2n-1}(r)] \quad (10)$$

для аксиально-симметричных магнитных полей.

В формулах (9) и (10) $H(r, \phi) = H_z(r, \phi) - H_0$, $H(r) = H_z(r) - H_0$, где $H_z(r, \phi)$ и $H_z(r)$ - требуемый закон распределения поля, рассмотренный в [1-4], H_0 - напряженность магнитного поля в центре зазора электромагнита, $H_I(r) = H_0 [1 + \frac{H_2(r)}{H_0}]$, $H_2(r) = H_0 - H_{\xi}(r)$, $H_{\xi}(r)$ - закон изменения напряженности поля плоского зазора электромагнита, определенный экспериментальным путем,

$$H_{2n-1}(r, \phi) = H_z(r, \phi) \left[1 - \frac{H_{2n}(r, \phi)}{H_z(r, \phi)} \right]$$

и

$$H_{2n-1}(r) = H_z(r) \left[1 - \frac{H_{2n}(r)}{H_z(r)} \right],$$

(где $n = 2, 3, 4, 5, \dots$) разница между требуемым законом поля и полем, определенным экспериментально для рассчитанного соответствующего профиля полюса. Функции H_{2n-1} могут быть представлены как графически, так и аппроксимированы каким-либо аналитическим законом. Исходя из граничных условий (9) и (10) и рекуррентных соотношений (4) и (7), приведем выражения для эквипотенциальных поверхностей полюсов с учетом краевых эффектов полюсов плоского и профилированных зазоров для формирования магнитных полей ускорителей с аксиальной симметрией и азимутальной вариацией [9].

Для аксиально-симметричных магнитных полей вида [4]

$$1) \quad H_z(r) = H_0 (1 + ar^p),$$

где a , p - любые действительные числа,

уравнение эквипотенциала будет

$$z_0^* = Q_I(r, z, H_0, H_I) + \sum_{n=2}^{\infty} Q_{2n-1}(r, z, H_z, H_{2n-1}) + zar^p [1 + \quad (11)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \rho^2 (\rho-2)^2 (\rho-4)^2 \dots \{ \rho - 2(m-1) \}^2 (z/r)^{2m}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(r, z, \Pi_0, \Pi_1) = & 1/\Pi_0 [\Pi_1 z - 1/6 (\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r^2}) z^3 + \\ & + \frac{1}{120} (\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Pi_1}{\partial r^3} + \frac{\partial^4 \Pi_1}{\partial r^4}) z^5 - \dots] \end{aligned} \quad (12)$$

Q_{2n-1} - получается из (12), заменой Π_0 на $\Pi_z(r)$ и $\Pi_1(r)$ на $\Pi_{2n-1}(r)$

$$2) \quad \Pi_z(r) = \frac{\Pi_0}{\sqrt{1 - (\frac{r}{r_\infty})^2}}, \quad r_\infty = \frac{E_0}{e \Pi_0}$$

уравнение эквипотенциали r_∞

$$\begin{aligned} z^* = & Q_2(r, z, \Pi_0, \Pi_2) + \sum_{n=2}^{\infty} Q_{2n-1}(r, z, \Pi_z, \Pi_{2n-1}) + \\ & + [\frac{1}{(1 - \frac{r^2}{r_\infty^2})^{3/2}} z - \{ \frac{1}{3r_\infty^2 (1 - \frac{r^2}{r_\infty^2})^{5/2}} + \frac{r^2}{2r_\infty^4 (1 - \frac{r^2}{r_\infty^2})^{7/2}} \} z^3 + \\ & + \{ \frac{1}{5r_\infty^4 (1 - \frac{r^2}{r_\infty^2})^{7/2}} + \frac{r^2}{r_\infty^6 (1 - \frac{r^2}{r_\infty^2})^{9/2}} + \frac{7r^4}{9r_\infty^8 (1 - \frac{r^2}{r_\infty^2})^{11/2}} \} z^5 - \dots] , \end{aligned} \quad (13)$$

где Q_2 получается из (12) заменой $\Pi_1(r)$ на $\Pi_2(r)$.

Для ускорителей с азимутальной вариацией напряженности поля

$$\Pi_z(r, \phi) = \Pi_0 (1 + Ar^2 + Br \cos N\phi),$$

где A, B - постоянные величины, $N \geq 3$ - целое число, $0 \leq \phi \leq 2\pi$

уравнение эквипотенциали

$$\begin{aligned} z^* = & Q_1(r, z, \Pi_0, \Pi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} Q_{2n-1}(r, z, \phi, \Pi_z, \Pi_{2n-1}) + \\ & + z (Ar^2 + Br \cos N\phi) - \frac{z^3}{3r} [\frac{B}{r} (N^2 - 1) \cos N\phi - 4A] - \\ & - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{z^{2m-1}}{(2m-1)!} \cdot \frac{B}{r^{2m-3}} \prod_{p=2}^m [N^2 - (2p-5)] \cos N\phi \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta_{2n-1}(r, z, \phi, H_z, H_{2n-1}) = & \frac{1}{H_z} \left[H_{2n-1} z - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 H_{2n-1}}{\partial r^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial^2 H_{2n-1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_{2n-1}}{\partial \phi^2} \right) z^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 H_{2n-1}}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_{2n-1}}{\partial r^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 H_{2n-1}}{\partial r^2 \partial \phi} + \frac{\partial^4 H_{2n-1}}{\partial r^4} - \frac{5}{r^4} \frac{\partial^4 H_{2n-1}}{\partial \phi^4} \right) z^5 - \dots \right] \quad (15)
 \end{aligned}$$

Величины $z_0^* = - \frac{\Phi(r, z)}{H_z(r)} \Big|_{r=0}$ и $z_0^* = - \frac{\Phi(r, z, \phi)}{H_z(r, \phi)} \Big|_{r=0}$ представля-
ют точное решение уравнений (11), (13) и (14) при $r=0$. В предположении
 $\frac{\partial H_z}{\partial z} \Big|_{r=0} = 0$ в расчетах вместо z_0^* с достаточной для практики точностью
можно использовать величину z_0 - полузазор исходного плоского полюса электр-
магнита.

Экспериментальная проверка предложенной схемы расчета с учетом краевого
эффекта полюса плоского зазора представлена на рис. 1. Были использованы ре-
зультаты расчетов и экспериментов для двух профилированных зазоров, формиро-
вавших магнитное поле согласно закону

$$H_z(r) = H_0 (1 + ar^2) \quad (16)$$

($a_1 = 0,0003 \text{ см}^{-2}$ и $a_2 = 0,0009 \text{ см}^{-2}$) без учета краевого эффекта плоского
электромагнита ($D = 60 \text{ см}$, $2z_0 = 16 \text{ см}$)^{4/}. Распределение напряженности
магнитного поля плоского зазора с радиусом $H_z(r)$ при уровне $H_0 = 9550$ эрстед,
представлено на рис. 1. Расчеты напряженности поля с учетом краевого эффекта
плоского зазора производились по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
 H_z(r) &= H_0 + \Delta H(r) \\
 \Delta H(r) &= \frac{H_0}{z_I(r)} [z_{II}(r) - z_I(r)]
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$z_0 = z_I(r) + z_{II}(r) ar^2 - 2/3 z_I^3(r) a \quad (18)$$

уравнение эквипотенциали для формирования закона (16) без учета краевого
эффекта полюса плоского зазора,

$$z_0 = z_{II}(r) \left[1 + \frac{H_z(r)}{H_0} \right] \quad (19)$$

профилирование, для создания однородного поля H_0 в плоскости $z = 0$ электромагнита.

Профили полюсов, использованные в экспериментах, и расчеты по профилированию представлены на рис. 2.

В расчетах $\Delta H(r)$ и $z_{II}(r)$ использовалось линейное приближение по z . При этом отклонение расчетного распределения от экспериментального

$$\frac{H_{рас}(r) - H_{экс}(r)}{H_{экс}(r)} \text{ на } r = 25 \text{ см в обоих вариантах составляет } 3,6\% \text{ и}$$

6,8, соответственно, против 15,7% и 16,0%, когда не учитывался краевой эффект плоского зазора (рис. 1).

Данное отклонение может быть уменьшено путем использования в расчетах следующих членов разложения в ряд по степеням z в формуле (11) с последующим учетом краевых эффектов профилированных зазоров, определяемых экспериментальным путем. Предложенная схема расчета позволяет в рамках метода эквипотенциалей производить последовательное шиммирование всего профиля полюса для формирования требуемого закона магнитного поля.

Так, профилирование полюса для формирования заданного закона $H_z(r) = H_0(1 + ar^2)$ с учетом краевого эффекта плоского зазора рассчитывается в линейном приближении согласно выражению:

$$z_{III}(r) = \frac{z_0}{1 + \frac{H_z(r)}{H_0} + ar^2} \quad (20)$$

На рис. 2 представлены результаты этих расчетов по профилированию полюса для двух вариантов параметра a .

Автор приносит благодарность В.П. Дмитриевскому, В.И. Данилову, Б.И. Замолодчикову, Н.Л. Заплатину, В.С. Рыбалко за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

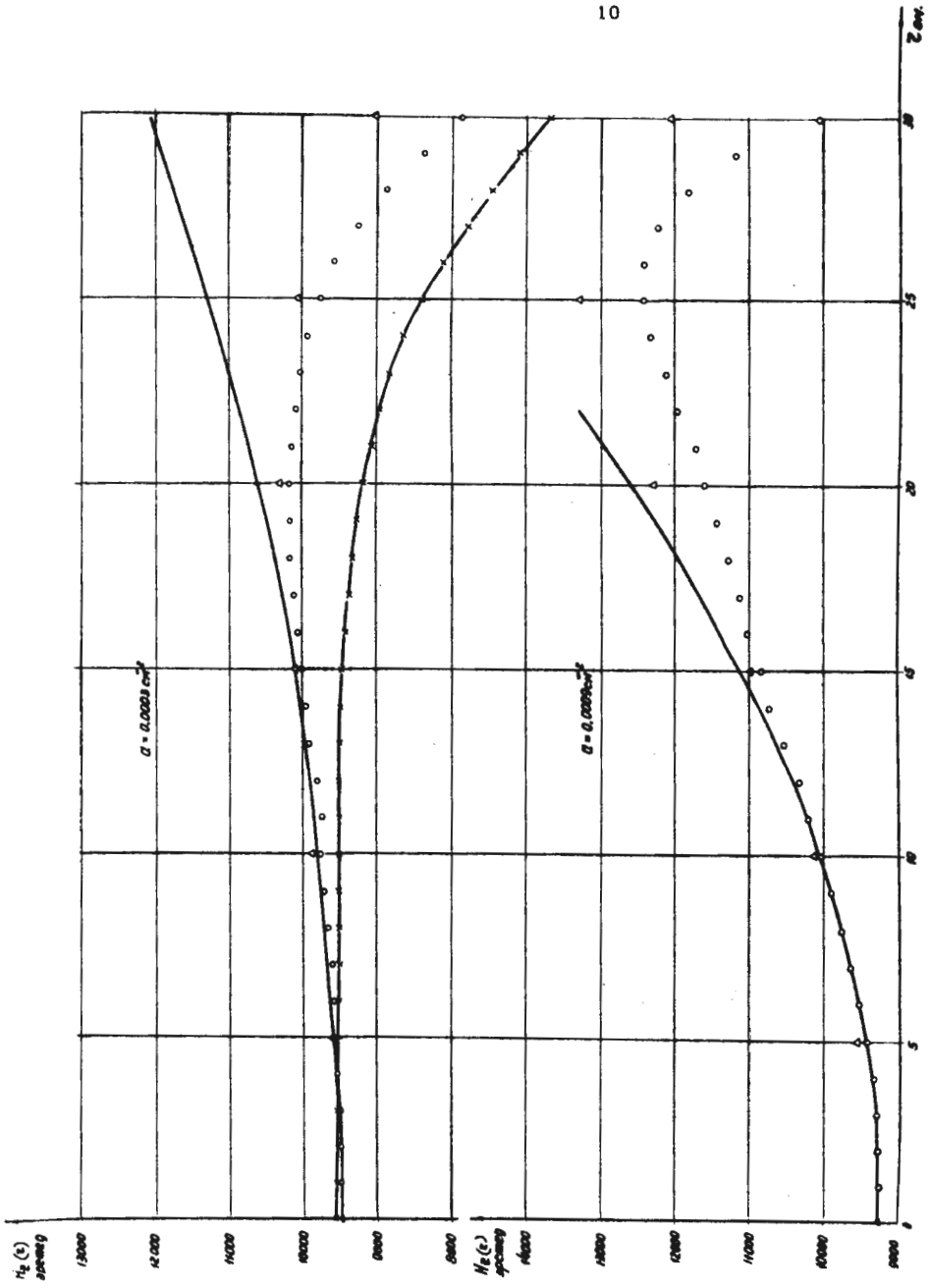


Рис. 1.

Сравнение расчетных и экспериментальных распределений напряженности поля для двух вариантов параметра a .

- Δ — Δ Распределение напряженности поля $H_z(z)$ вдоль радиуса для плоского зазора электромагнита, определенное экспериментально.
- — — — — Распределение напряженности поля, рассчитанное по формуле $H_z(z) = H_0(1 + az^2)$
- Δ Δ Распределение напряженности поля, рассчитанное с учетом краевого эффекта для профиля, использованного в эксперименте.
- $\circ \circ \circ$ — Распределение вдоль радиуса напряженности поля, определенное экспериментально для профиля, использованного в эксперименте.

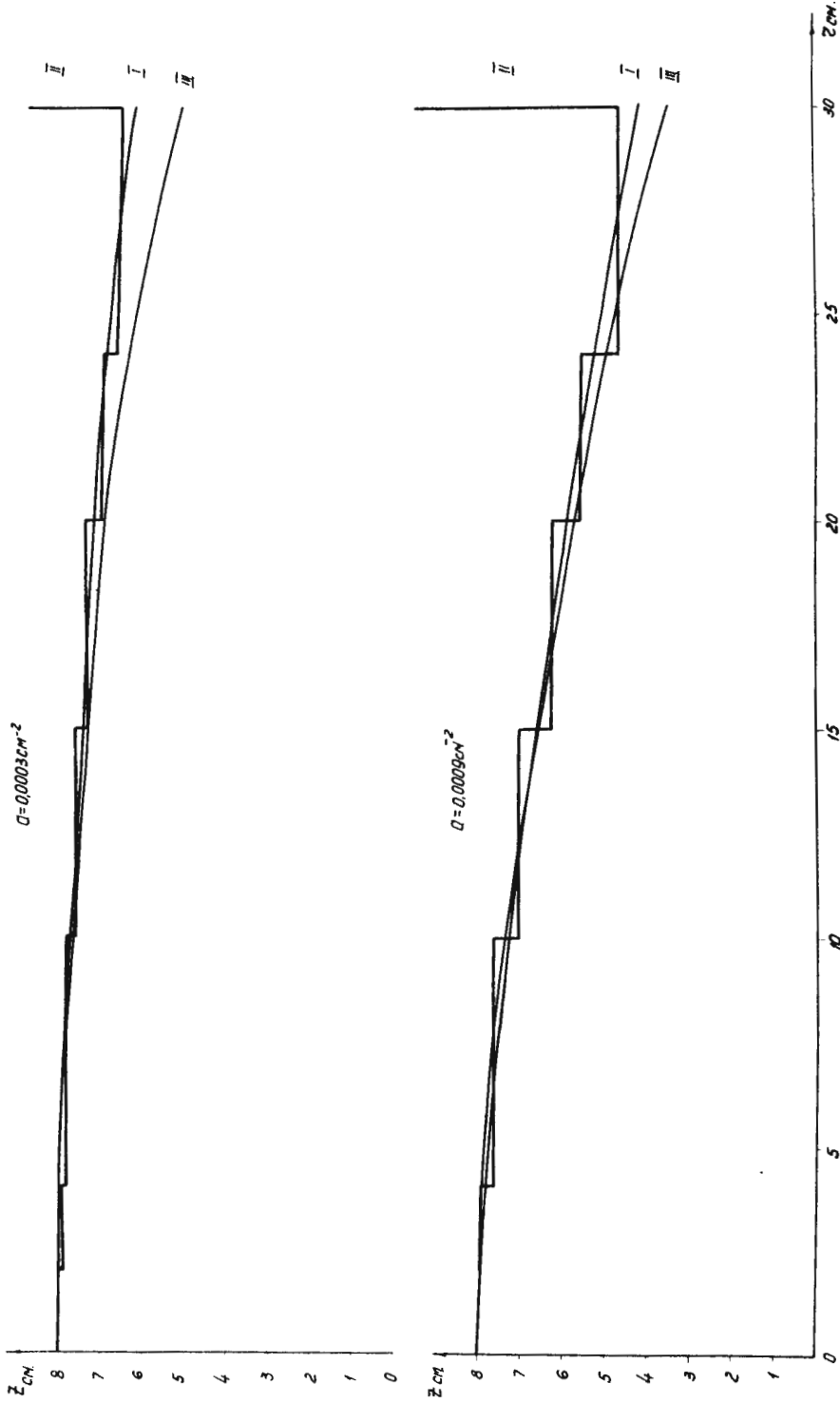


Рис. 2.

Профили полюсов для двух вариантов параметра σ .
 I. Профиль, рассчитанный по формуле (18). II. Профиль, использованный в эксперименте.
 III. Профиль, рассчитанный по формуле (20).

Л и т е р а т у р а

1. J. Bartlett Phys.Rev., 64, 185 (1943).
2. N. Davy Proc.Phys. Soc. A, 60, 598 (1948).
3. Р.А.Мещеров. Частное сообщение 1957.
4. Лю Мао-сань. Расчет профилей электромагнита для ускорителей заряженных частиц с помощью эквипотенциалей. Дипломная работа ЛЯП ОИЯИ, 1958.
5. Е.П. Григорьев, А.В. Золотавин. ПТЭ, 4, 97-99, 1959.
6. L.Ч.Thomas Phys.Rev., 54, 580 (1938).
7. D.W.Kerst, K.M.Terwilliger, K.R.Symon, L.W. Jones Bull. Amer.Phys.Soc., 30, N1, (1955).
8. Д.П. Василевская, А.А. Глазов и др. Атомная энергия, 6, вып. 6, 657 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
2 октября 1961 года.