2

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов

Р-762

# СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛОУ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Дубна 1961

Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов

Р-762

# СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛОУ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

## Введение

Во многих работах[1,2,3] исселдовался вопрос о неоднозначности решения уравнения Лоу для амплитуды рассеяния. На примерах точно решаемых моделей было установлено, что целому классу гамильтонианов, отличающихся друг от друга набором состояний, в которых может находиться рассеиватель, соответствует одно уравнение Лоу с многозначным решением. Кроме того было показано[1], что для заряженных мезонов с фиксированным нуклоном решения уравнения Лоу содержат ограничения на константу связи $g_r$ Недавно было обращено внимание на то, что подобные ограничения на константу связи могут возникать не только для отдельных моделей, но и в точной теории из анализа дисперсионных соотношений для $\pi - N$ рассеяния[4]. В связи с этим возникает интересный вопрос, являются ли эти ограничения результатом общих принципов, используемых при выводе дисперсионных соотношений и уравнения Лоу, или результатом тех приближений, которые при этом делаются. Такими приближениями являются:

1/ Замена точного соотношения унитарности приближенным с учетом только двухчастичного промежуточного состояния /двухчастичная унитарность/ и

2/ Ограничение конечным числом парциальных волн в амплитуде рассеяния.

В работе Халфина[5] утверждается, что второе предположение совместно с предположением о произвольности константы связи $g_r$ может привести к несовместимости дисперсионных соотношений и соотношения унитарности. В решаемых моделях, где обычно в рассеянии участвует только одна волна / s или p – волна/, ограничения на $g_r$ возникают из точного решения уравнения Лоу. В данной статье рассмотрен именно такой случай.

Далее в статье на основе решения уравнения Шредингера для данной модели[6] оценена роль многочастичных вкладов в амплитуду рассеяния, показано, что для энергий меньше порога неупругих процессов $\omega < 2\mu$ вклад высших состояний не превосходит 15%

## 1. Модель и уравнение на амплитуду рассеяния

Мы здесь рассмотрим уравнение Лоу на амплитуду рассеяния для одной простой модели теории поля с фиксированным нуклоном /6/. Гамильтониан системы имеет вид:

$$H = m_0(\psi^+\psi) + \tfrac{1}{2}\int d\vec{x}\,[\pi^2(\vec{x}) + (\nabla\phi(\vec{x}))^2 + \mu^2\phi^2(\vec{x})] +$$
$$+ g(\psi^+\tau_1\psi)\int d\vec{x}\,\phi(\vec{x})\,\delta(\vec{x}) + \Delta m_0(\psi^+\tau_3\psi) \qquad /1/$$

Неподвижный нуклон может находиться в двух состояниях /протон, нейтрон/, отличающихся по массе $m_{0p} = m_0 + \Delta m_0$ ; $m_{0n} = m_0 - \Delta m_0$ /Ноликом отмечается масса голого нуклона/. Из-за наличия этих степеней свободы у нуклона возможны процессы упругого и неупругого рассеяния мезонов на нуклоне. В работе авторов /6/ было получено, исходя из гамильтонова формализма, выражение для амплитуды упругого рассеяния.

В дальнейшем мы воспользуемся этим выражением для сравнения его с амплитудой, полученной из уравнения Лоу. При выводе этого уравнения мы будем исходить из дисперсионного соотношения на амплитуду рассеяния /заметим, что в этой модели возможно только s -рассеяние/.

$$M_N(\omega) = \frac{\delta_N\, g_r^2}{(2\pi)^3 2\omega}\left[\frac{1}{\omega-\Lambda} - \frac{1}{\omega+\Lambda}\right] + \qquad /2/$$
$$+ \frac{1}{\pi\omega}\int_\mu^\infty d\omega'\omega'\,\mathrm{Im}\,M_N(\omega')\left[\frac{1}{\omega'-\omega-i\epsilon} + \frac{1}{\omega'+\omega}\right]$$

$M_N(\omega)$ -амплитуда рассеяния мезона с энергией $\omega = \sqrt{\mu^2 + \kappa^2}$ на нуклоне $N = p,n$ ; $\Lambda$ -разность наблюдаемых масс "протона" и "нейтрона": $\Lambda = m_p - m_n$ , которая определяет положение однонуклонного члена; $g_r$ -наблюдаемая /перенормированная/ константа взаимодействия. Однонуклонный член меняет свой знак в зависимости от того, идет ли рассеяние на протоне $N = p$ и $\delta_p = +1$ или на нейтроне $N = n$ и $\delta_n = -1$ Мы предполагаем $\Lambda < \mu$ , так как в противном случае имелось бы нестабильное состояние у нуклона $m_p > m_n + \mu$ , которое распадалось бы на "нейтрон" и мезон.

Воспользовавшись соотношением унитарности[x]

$$\mathrm{Im}\, M_N(\omega) = (2\pi)^2 \kappa\omega\, |M_N(\omega)|^2 + a_N(\omega) \qquad /3/$$

где $a_N(\omega)$ -вклады от неупругих процессов, мы получим, подставляя /3/ в /2/ уравнение Лоу на амплитуду $M_N(\omega)$, если пренебрегем многочастичными вкладами $a_N(\omega)$. Здесь следует отметить, что двухчастичное соотношение унитарности

$$\mathrm{Im}\, M_N(\omega) = (2\pi)^2 \kappa\omega\, |M_N(\omega)|^2 = 4\pi^3 \frac{\kappa}{\omega} \sigma_N(\omega) \qquad /4/$$

которое справедливо при $\omega < 2\mu$, если его рассматривать во всем интервале $\mu \leqslant \omega \leqslant \infty$, накладывает на амплитуду $M_N(\omega)$ довольно сильные ограничения. Так из /4/ следует, что $M_N(\omega)$ на бесконечности не может убывать медленнее, чем $\frac{1}{\omega^2}$. Из /2/ и /4/ получаем уравнение Лоу

$$M_N(\omega) = \frac{\delta_N g_r^2}{(2\pi)^3 2\omega} \left[ \frac{1}{\omega - \Delta} - \frac{1}{\omega + \Delta} \right] +$$

$$+ \frac{4\pi}{\omega} \int_\mu^\infty d\omega' \kappa' \omega'^2 |M_N(\omega')|^2 \left[ \frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} + \frac{1}{\omega' + \omega} \right] \qquad /5/$$

## 2. Решение уравнения /5/

Следуя работе[1], рассмотрим в комплексной плоскости функцию $h_N(z)$, определенную равенством:

---

[x] Полное упругое сечение выражается через $M_N(\omega)$ так:

$$\sigma^N(\omega) = \frac{\omega^2 |M_N(\omega)|^2}{\pi}$$

Если ввести амплитуду $f_N(\omega) = \frac{\omega}{(2\pi)^4} M_N$, то соотношение /3/ примет более привычный вид:

$$\mathrm{Im}\, f_N(\omega) = \frac{\kappa}{4\pi} \sigma_{el}^N(\omega) + \frac{\kappa}{4\pi} \sigma_{in}^N(\omega)$$

$$h_N(z) = \frac{\delta_N\, g_r^2}{(2\pi)^3}\left[\frac{z}{z-\Lambda} - \frac{z}{z+\Lambda}\right] +$$

$$+ 8\pi z \int_\mu^\infty d\omega\, \kappa\, \omega^2 |M_N(\omega)|^2 \left[\frac{1}{\omega - z} + \frac{1}{\omega + z}\right] \qquad /6/$$

Из /6/ следует, что $h_N(z)$ аналитическая функция в плоскости $z$ с разрезами $[\mu, \infty)$ и $(-\infty, -\mu]$, обладающая свойствами:

/А/ $h^*_N(z) = h_N(z^*)$ ; $h_N(-z) = -h_N(z)$

/В/ $h_N(z)$ регулярна при $z = 0$, причем $h_N(0) = 0$. Может иметь любое количество нулей в точках $\omega_i$ на отрезках $[\mu, \infty)$ и $(-\infty, -\mu]$

/С/ $h_N(z)$ имеет полюса в области $-\mu < z < \mu$ в точках $z = \pm\Lambda$.

$\mathrm{Res}\, h_N(z) = -\frac{\delta_N g_r^2}{(2\pi)^3}\Lambda$ $\quad z = \pm\Lambda$

/Д/ При $z \to \omega$ сверху, $h_N(z) \to h_N(\omega) = 2\omega^2 M'_N(\omega)$

/Е/

$$\mathrm{Im}\, h_N(z) = \left\{ -\frac{\delta_N g_r^2}{(2\pi)^3}\left[\frac{\Lambda}{|\Lambda - z|^2} + \frac{\Lambda}{|\Lambda + z|^2}\right] +\right.$$

$$\left. + 8\pi \int_\mu^\infty d\omega\, \kappa\, \omega^2 |M_N(\omega)|^2 \left[\frac{\omega}{|\omega - z|^2} + \frac{\omega}{|\omega + z|^2}\right]\right\} \mathrm{Im}\, z$$

или $\mathrm{Im}\, h_N(z) = \lambda_N(z)\, \mathrm{Im}\, z$

Если $\lambda_N(z) > 0$, т.е. знак мнимой части функции совпадает со знаком мнимой части $z$, то свойство /Е/ определяет обобщенную $R$-функцию, которая не имеет нигде нулей за исключением реальной оси и бесконечно удаленной точки. Как видно из /Е/, условие $\lambda_N(z) > 0$ выполняется для "нейтрона" $N = n$ когда $\delta_n = -1$ ; для протона $N = p$, когда $\delta_p = +1$ знаки в правой части /Е/ у первого и второго слагаемых разные и знак $\lambda_p(z)$ определяется величиной интеграла от неизвестной амплитуды $M_p(\omega)$ Мы предположим, что и для "протона" $\lambda_p(z) > 0$, это предположение будет оправдано в дальнейшем сравнением полученной из уравнения /5/ амплитуды $M_N(\omega)$ для обеих значений $N = p, n$ и амплитудой

$\tilde{V}_N(\omega)$ , полученной в работе [6] на основе гамильтонова формализма.

$$(F)\quad \operatorname{Im} h_N(z) \to 8\pi^2 \kappa\, \omega^3 |V_N(\omega)|^2$$

$$z \to \omega \quad \text{сверху, при} \quad \omega > \mu$$

Введем обратную функцию $H_N(z) = -\frac{1}{h_N(\omega)}$ , тогда из свойств функции $h_N(z)$ следуют свойства функции $H_N(z)$ :

/a/ $H^*_N(z) = H_N(z^*)$ ; $-H_N(z) = H_N(-z)$

/в/ $H_N(z)$ имеет плюс первого порядка при $z=0$

/c/ $H_N(z)$ имеет нули в точках $z = \pm \Lambda$

$$\frac{d}{dz} H_N(z)/_{z=\pm\Lambda} = \frac{1}{\Lambda_N \Lambda} \qquad \text{где} \qquad \Lambda_N = -\frac{\delta_N g_r^2}{(2\pi)^3}$$

/d/ При $z \to \omega$ сверху $H_N(z) \to -\frac{1}{2\omega^2 V_N(\omega)}$

/e/ $\operatorname{Im} H_N(z) = \frac{\lambda_N(z)}{|h_N(z)|^2} \operatorname{Im} z$

/ f / При $z \to \omega$ сверху $\operatorname{Im} H_N(\omega) \to -\frac{\operatorname{Im} h^*_N(\omega)}{|h_N(\omega)|^2} = 2\pi^2 \frac{\kappa}{\omega}$

исключая точки $\omega_i$ , где $h_N(\omega_i) = 0$ т.е. $H_N(\omega_i) = \infty$ . Из свойства /e/ можно заключить, что при $\lambda_N(z) > 0$ функция $H_N(z)$ также как и $h_N(z)$ является обобщенной $R$ - функцией.

Основываясь на работе [1] можно написать общее выражение для $R$ -функции через интеграл Стилтьеса в следующем виде:

$$H_N(\omega) = A\omega + \frac{c}{\omega} + B + \int_0^\infty \frac{\omega}{z} \left[ \frac{d\alpha_N(z)}{z-\omega} + \frac{d\beta_N(z)}{z+\omega} \right] \qquad /7/$$

A,B,C - действительные константы.

Из свойства /a/ следует, что $B = 0$ и $d\alpha_N(z) = d\beta_N(z)$ Условие /в/ будет удовлетворено, если $c \neq 0$ .

Теперь обратимся к свойству / f /

$$\mathrm{Im}\, H_N(\omega) = \pi \frac{d\, a_N(\omega)}{d\omega} = 2\pi \frac{\kappa}{\omega}, \quad \omega > \mu$$

исключая точки $\omega_i$, где $H_N(\omega_i) = \infty$. В точках $\omega_i$ функция $a_N(\omega)$ должна истытывать положительные скачки, так чтобы ее производная становилась бесконечной. Принимая это во внимание, можем написать:

$$a_N(z) = 2\pi \int_\mu^z \frac{\kappa}{\omega} d\omega + \sum_i R_i\, \theta(z - \omega_i) \qquad /8/$$

где $\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$

Теперь с учетом свойств /а/, /в/ и / f / функция $H_N$ записывается так:

$$H_N(\omega) = A\omega + \frac{C}{\omega} + 2\pi\omega \int_\mu^\infty \frac{\kappa_z}{z^2} \left[ \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{z+\omega} \right] dz + \qquad /9/$$

$$+ \sum_i R_i \left[ \frac{1}{\omega_i - \omega} + \frac{1}{\omega_i + \omega} \right]$$

Физический смысл появившейся в решении /9/ функции

$$S(\omega) = \sum_i R_i \left[ \frac{1}{\omega_i - \omega} + \frac{1}{\omega_i + \omega} \right], \quad \omega > \mu$$

был разъяснен Дайсоном /3/, который показал, что $S(\omega)$ описывает вклады в амплитуду рассеяния, обусловленные нестабильными состояниями рассеивателя, но, так как в нашей модели имеется только два стабильных при $\Delta < \mu$ состояния нуклона: "протон" и "нейтрон", то мы в /9/ функцию $S(\omega)$ опустим. Оставшиеся константы A и C могут быть определены из свойства /с/

$$A = \frac{1}{4\Lambda_N \Delta} - 4\pi \int_\mu^\infty \frac{dz\, z\, \kappa_z}{(z^2 - \Delta^2)^2} \qquad /10/$$

$$C = \frac{\Delta}{4\Lambda_N} + 4\pi\, \Delta^4 \int_\mu^\infty \frac{dz\, \kappa_z}{z(z^2 - \Delta^2)^2}$$

Интегралы, встречающиеся в /9/ и /10/ вычисляются точно и мы имеем окончательное выражение для

$$H_N(\omega) = \frac{\omega^2-\Delta^2}{2\omega}\left\{ \frac{1}{2\Lambda_N\Delta} + \frac{\pi^2}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}\,\frac{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}-\sqrt{\mu^2-\omega^2}}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}+\sqrt{\mu^2-\omega^2}}\right\} \qquad /11/$$

где $\sqrt{\mu^2-\omega^2}$ берется положительным для $-\mu < \omega < \mu$ Воспользовавшись свойством / $d$ / напишем выражение для матричного элемента, которое является решением уравнения /5/.

$$M_N(\omega) = \frac{-2\Lambda_N\Delta}{(\omega^2-\Delta^2)\,\omega\left\{1+\frac{2\pi^2\Lambda_N\Delta}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}\,\frac{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}-\sqrt{\mu^2-\omega^2}}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}+\sqrt{\mu^2-\omega^2}}\right\}} \qquad /12/$$

## 3. Свойства решения интегрального уравнения /5/ и ограничения на константу связи

Из /11/ очевидно, что $H_N(\omega)$ имеет нули в точках $\pm\Delta$ и линии разреза $(-\infty,-\mu]$ и $[\mu,\infty)$, но кроме этого функция может иметь еще нуль в интервале $[-\mu,\mu]$, когда:

$$\frac{-2\pi^2\Lambda_N\Delta}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}\;\frac{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}-\sqrt{\mu^2-\omega^2}}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}+\sqrt{\mu^2-\omega^2}} = 1. \qquad /13/$$

Дополнительный нуль, а, следовательно, полюс в амплитуде $M_N(\omega)$, противоречил бы ранее предположенным аналитическим свойствам $M_N(\omega)$ на основе которых было получено уравнение /5/. Этот полюс в амплитуде можно исключить, наложив ограничения на наблюдаемую константу связи $g_r$. Для этого перепишем равенство /13/ в другом виде, учитывая, что $\Lambda_N = -\dfrac{\delta_N\, g_r^2}{(2\pi)^3}$ ;

$$\sqrt{\mu^2-\omega^2} = -\sqrt{\mu^2-\Delta^2}\,\frac{1-\delta_N g_r^2/4\pi \dfrac{\Delta}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}}{1+\delta_N g_r^2/4\pi \dfrac{\Delta}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}} \qquad /14/$$

Если теперь положить

$$g_r^2/4\pi < \frac{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}{\Delta} \qquad /15/$$

то $\dfrac{1-\delta_N g_r^2/4\pi \dfrac{\Delta}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}}{1+\delta_N g_r^2/4\pi \dfrac{\Delta}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}} > 0$ и корень уравнения /14/ будет

лежать на другом римановом листе, так как $\sqrt{\mu^2-\omega^2}<0$, а мы раньше определили положительный знак у корня $\sqrt{\mu^2-\omega^2}$, когда $\omega<\mu$. Таким образом ограничение на константу связи /15/ возникает из решения уравнения Лоу /5/ и одночастичного соотношения унитарности /4/. Подобного рода ситуация обсуждалась в работах[/4/,/7/]. Халфин[/5/] показал в общем случае, что такие ограничения будут возникать тогда, когда в амплитуде удерживается конечное число фаз рассеяния, в нашей модели присутствует только s -фаза в рассеянии.

Фактически оказываются внутренне противоречивыми предположения о произвольности величины $g_r$, конечном числе фаз рассеяния и неограниченности энергии $\omega$.

В подтверждение этой точки зрения можно, кроме доводов работы[/5/] привести следующие соображения. Вводя в нашей модели обрезание по импульсу $v(k) = \dfrac{L^2}{L^2+K^2}$, получим вышеизложенным способом амплитуду рассеяния $M_N$, которая теперь будет функцией от импульса обрезания $L$. Вместо /13/ положение дополнительного полюса теперь будет определяться равенством:

---

[x/] Неравенство /15/ внешне схоже с ограничением на константу при наличии связанного состояния, полученное в работе[/8/].

$$\frac{g_r^2\Delta}{4\pi\sqrt{\mu^2-\Delta^2}}\;\frac{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}-\sqrt{\mu^2-\omega^2}}{\sqrt{\mu^2-\Delta^2}+\sqrt{\mu^2-\omega^2}}\;\frac{L^3}{\mu}\;\frac{(\sqrt{\mu^2-\omega^2}+\sqrt{\mu^2-\Delta^2}+L)^2+\sqrt{\mu^2-\Delta^2}\,L}{(\sqrt{\mu^2-\omega^2}+L)^2\cdot(\sqrt{\mu^2-\Delta^2}+L)^3}=1 \qquad /16/$$

Отсюда видно, что с уменьшением $L$, область допустимых $g_r$ увеличивается, Таким образом, введение соответствующего обрезания по импульсу $L$ снимает ограничения на константу $g_r$.

## 4. Сравнение с решением уравнения Шредингера

В работе /6/ была получена, исходя из уравнения Шредингера с гамильтонианом /1/, амплитуда рассеяния мезона на нуклоне в виде степенного ряда по параметру $\Delta m = \Delta m_0 \exp\{-g^2\sum\limits_K \omega_K^{-3}\}$

$$\widetilde{M}_N(\omega)=\frac{\delta_N\, g_r^2}{(2\pi)^3\,\omega^2}\;\frac{2\Delta m}{\omega}\Big\{1-i\delta_N\Delta m\int_0^\infty dx\,(1-\cos\omega x)\big[\exp\{2g^2\sum_K\omega_K^{-3}\ell^{-i\omega_K x}\}-1\big]\Big\} \qquad /17/$$

$g$ –неперенормированная /затравочная/ константа связи. Там же было показано, что наблюдаемая константа $g_r$ и разность масс "протона" и "нейтрона" $\Delta = m_p - m_n$ также выражаются в виде рядов по $\Delta m$, причем каждый член этих рядов конечный.

$$g_r/g = 1-2\,\Delta m\int_0^\infty dx\, x\,\big[\exp\{2g^2\sum_K\omega_K^{-3}\ell^{-\omega_K x}\}-1\big]-\ldots\ldots \qquad /18/$$

$$\Delta = 2\,\Delta m\,\Big\{1+\Delta m^2\int_0^\infty dx_1\int_0^\infty dx_2\, F(x_1,x_2,g)+\ldots\Big\} \qquad /19/$$

/Подробнее смотри работу /6/ формула /11//. Для того чтобы можно было сравнить амплитуды $M_N$ и $\widetilde{M}_N$, необходимо в выражении /12/ перенормированные величины $g_r$ и $\Delta$ выразить с помощью /18/ и /19/ через константы $g$ и $\Delta m$; далее мы будем считать $\Delta m \ll \mu$ и поэтому ограничимся всюду разложением по $\frac{\Delta m}{\mu}$ до второго порядка. В результате для амплитуды $M_N(\omega)$ /12/ имеем выражение:

$$M_N(\omega) = \frac{\delta_N g^2}{(2\pi)^3 \omega^2} \frac{2\Delta m}{\omega} \{ 1 + \frac{\delta_N g^2}{\pi} \frac{\Delta m}{\mu} ( \frac{\mu^2 - \kappa^2}{2\omega^2} + \frac{i\mu\kappa}{\omega^2} ) \} \qquad /20/$$

Теперь для сравнения /17/ и /20/ нам остается еще выделить в /17/ действительную и мнимую части. Для энергии $\omega < 2\mu$ / $2\mu$ – порог неупругих процессов и, следовательно, точно выполняется соотношение /4/ / имеем:

$$\widetilde{M}_N(\omega) = \frac{\delta_N g^2}{(2\pi)^3 \omega^2} \frac{2\Delta m}{\omega} \{ 1 + \frac{\delta_N g^2}{\pi} \frac{\Delta m}{\mu} ( \frac{\mu^2 - \kappa^2}{2\omega^2} + \frac{i\mu\kappa}{\omega^2} ) -$$

$$- \delta_N \frac{\Delta m}{\mu} I_1(\omega, g) \} \qquad /21/$$

где

$$I_1(\omega, g) = \mu \int_0^\infty dx \, (2 - 2\mathrm{Ch}\, \omega x) \; [ \exp \{ 2g^2 \sum_K \omega_K^{-3} \ell^{-\omega_K x} \} -$$

$$- 2g^2 \sum_K \omega_K^{-3} \ell^{-\omega_K x} - 1 ] \qquad /22/$$

Таким образом, во втором порядке по $\frac{\Delta m}{\mu}$ точная амплитуда $\widetilde{M}_N(\omega)$ /21/ отличается от амплитуды Лоу $M_N(\omega)$ /20/ членом $-\delta_N I_1(\omega, g)$, который учитывает вклады от высших состояний в действительную часть амплитуды, мнимые части у $M_N$ и $\widetilde{M}_N$ в этом интервале энергий совпадают. Когда $\mu \leqslant \omega \leqslant 2\mu$, то $0 \leqslant I_1(\omega, g) \leqslant 0.13$ и $1{,}5 \geqslant g^2/\pi \, \frac{\mu^2 - \kappa^2}{2\omega^2} \geqslant -0{,}78$ /здесь принято $g^2/\pi^2 = 0{,}9$ ; при этом надо учесть, что, как показано в [6], при изменении $g$ в интервале $0 < \frac{g^2}{\pi^2} < 1$ наблюдаемый заряд изменяется в интервале $0 < g_r^2/\pi^2 < \infty$, поэтому значение $g^2/\pi^2 > 1$ в этой модели не имеет смысла/. Отсюда видно, что вклад многочастичных состояний в действительную часть амплитуды не превосходит 15%, что является вполне удовлетворительным с точки зрения влияния многочастичных состояний на процессы при низких энергиях.

Рассмотрим теперь область $2\mu \leqslant \omega \leqslant 3\mu$, в этом случае точная амплитуда равна:

$$\widetilde{M}_N(\omega) = \frac{\delta_N g^2}{(2\pi)^3 \omega^2} \frac{2\Lambda m}{\omega} \Big\{ 1 + \frac{\delta_N g^2}{\pi} \frac{\Lambda m}{\mu} \Big( \frac{\mu^2 - \kappa^2}{2\omega^2} + \frac{i\mu\kappa}{\omega^2} \Big) -$$

$$- \delta_N \frac{\Lambda m}{\mu} I_2(\omega, g) + \frac{\delta_N g^4}{2\pi^2} \frac{\Lambda m}{\mu}\, i \int_{\omega-\mu}^{\omega^2/4\mu} \frac{dx}{x^2} \sqrt{\frac{(x+\mu)^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\mu x}} \Big\} \qquad /23/$$

$I_2(\omega, g)$ –действительная функция аналогичная /22/, но более сложного вида. Из сравнения одномезонной амплитуды /20/ и точной /23/ следует, что в этом интервале отличаются действительные и мнимые части амплитуд. Когда $2\mu \leqslant \omega \leqslant 3\mu$, то

$$0{,}13 \leqslant I_2(\omega, g) \leqslant 0{,}92 \quad и \quad 0{,}8 \geqslant g^2/\pi \, \frac{\mu^2 - \kappa^2}{2\omega^2} \geqslant -0{,}98$$

т.е. реальные части отличаются уже на 100%, а мнимые

$$0 \leqslant \frac{g^4}{2\pi^2} \int_{\omega-\mu}^{\omega^2/4\mu} \frac{dx}{x^2} \sqrt{\frac{(x+\mu)^2 - \omega^2}{\omega^2 - 4\mu x}} \leqslant 0{,}15 \quad и \quad 1{,}3 > \frac{g^2}{\pi} \frac{\kappa\mu}{\omega^2} \geqslant 0{,}8$$

отличаются на 20%. Таким образом, в интервале $2\mu < \omega < 3\mu$ оказывается существенным вклад от высших состояний и одночастичная амплитуда $M_N$ отличается от точной $\widetilde{M}_N$ в два раза.

На примере этой модели хорошо подтверждается предположение, на котором базируется дисперсионный подход в современной теории поля, что при низких энергиях /до порога неупругих процессов/ вклады от многочастичных состояний в амплитуду рассеяния несущественны. Конечно, на основе приведенного примера нельзя судить о ситуации в реальном случае рассеяния релятивистских частиц.

В заключение мы хотим обсудить вопрос: выполняется ли соотношение /15/ на константу связи $g_r$ и $\Lambda$, возникшее из решения интегрального уравнения /5/, для $g_r$ и $\Lambda$, полученных на основе процедур перенормировок[/6/] и заданных рядами /18/ и /19/. В работе[/6/] показано, что необходимым условием сходимости рядов /18/ и /19/ является

$$\frac{\Lambda m}{1 - g^2/\pi^2} < 1 \qquad /24/$$

Если подставить в соотношение /15/ вместо $g_r$ и $\Lambda$ их ряды, то оказывается, что в первых порядках по $\Lambda m$ неравенство /15/ выполняется при условии /24/ на величины $g$ и $\Lambda m$. Однако, не зная точных сумм рядов /18/ и /19/, мы не можем говорить о строгом выполнении /15/ для перенормированных величин $g_r$ и $\Lambda$, полученных на основе решения гамильтониана /1/.

Авторы выражают свою благодарность профессору Д.И. Блохинцеву за полезное обсуждение затронутых здесь вопросов.

## Литература


1. L.Castillejo, R.H.Dalitz, F.J.Dyson, Phys.Rev. 101, 453–458 (1956).
2. R.Norton, A.Klein, Phys.Rev. 109, 991–998 (1958).
3. F.J.Dyson, Phys.Rev. 106, 157–159 (1957).
4. А.А. Ансельм, В.Н. Грибов и др. ЖЭТФ /будет опубликовано/.
5. Л.А. Халфин ЖЭТФ /будет опубликовано/.
6. Б.М. Барбашов, Г.В. Ефимов. ЖЭТФ том 40. 848 /1961/.
7. F.Zachariasen, Phys.Rev. 121, 1851 (1961).
8. В.Н. Грибов, Я.Б. Зельдович, А.М. Переломов ЖЭТФ том 40, 1190 /1961/.


Работа поступила в издательский отдел
27 июня 1961 года.