

18
ЖС-91
458



А.А. Журавлев, И.Н. Иванов, М. Кармасин, В.И. Котов
Э.А. Мяз, В.А. Обозный, Ю.Л. Обухов, В.А. Петухов

Р - 758

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ
В КОЛЬЦЕВОМ ФАЗОТРОНЕ

Дубна 1961

А.А. Журавлев, И.Н. Иванов, М. Кармасин, В.И. Котов
Э.А. Мяз, В.А. Обозный, Ю.Л. Обухов, В.А. Петухов

18
ЖК-91

P - 758

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ
В КОЛЬЦЕВОМ ФАЗОТРОНЕ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1142/3 чф.

§ 1. Основные сведения из теории

Выбор параметров и проектирование ускорителей обычно проводится на основе приближенных теоретических представлений. В частности, при проектировании модели кольцевого фазотрона /1/ предполагалось, что магнитное поле постоянно вдоль идеальных орбит внутри секторов и равно нулю в промежутках. В реальной установке магнитное поле, естественно, будет отличаться от идеального, особенно в прямолинейных участках и обратных секторах. В результате мгновенные орбиты искажаются и частоты свободных колебаний изменяются. В связи с этим для сопоставления экспериментальных результатов с теорией возникает необходимость в получении формул, основанных на знании точной топографии магнитного поля ускорителя. Магнитные измерения, проведенные на отдельных блоках модели кольцевого фазотрона показали /рис. 1/, что распределение поля по азимуту хорошо описывается формулой:

$$f(\theta) = f_0 + f_1 \cos N\theta + f_2 \cos 2N\theta + f_3 \cos 3N\theta \quad , \quad /1/$$

где N - число элементов периодичности электромагнита,
 θ - азимут, отсчитываемый от центра прямого сектора.

В соответствии с видом функции $f(\theta)$ для расчета мгновенных орбит наиболее целесообразно использовать "метод Фурье -разложения". Орбита частиц определяется из известного соотношения

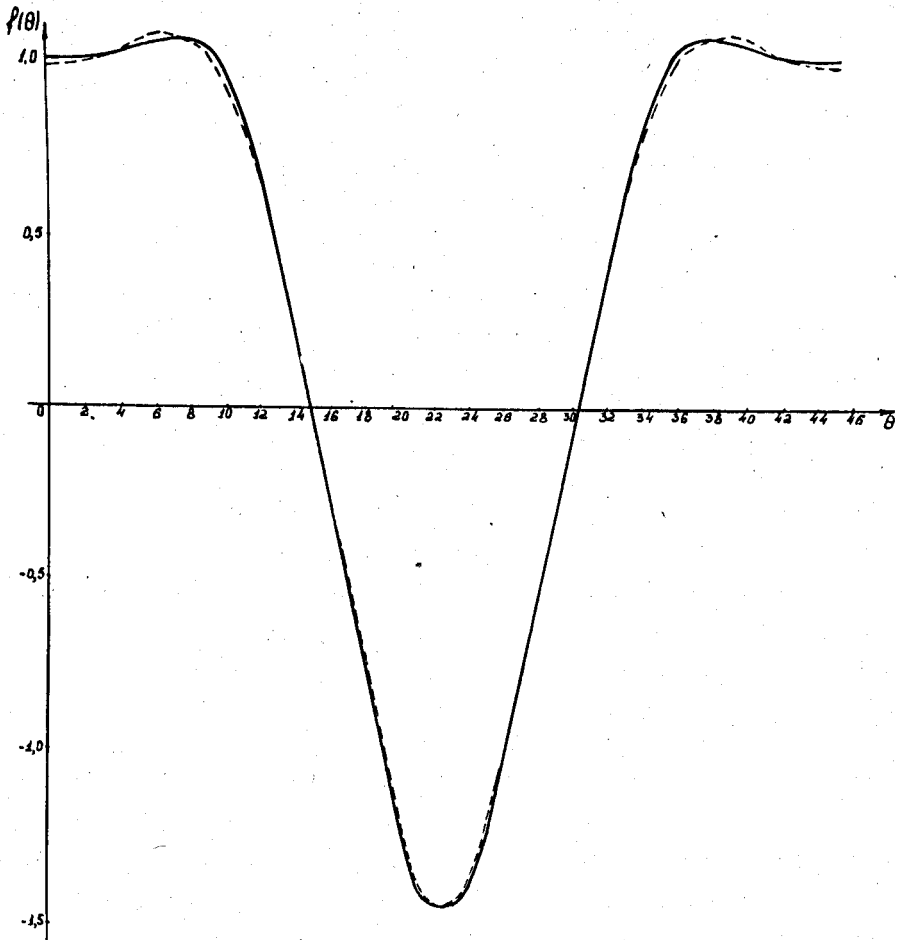
$$1/\rho = \frac{e\gamma}{pc} \quad /2/$$

при дополнительном требовании замкнутости решения через 2π . В этой формуле через H обозначена напряженность магнитного поля, через p - импульс частицы с зарядом e , через ρ - радиус кривизны орбиты. Записывая выражение для радиуса кривизны в полярных координатах и подставляя

выражение для напряженности магнитного поля $H = H_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^k f(\theta)$
 где: r - радиус из центра машины, k - средний показатель поля, H_0 и r_0 - фиксированные величины, получим

$$\ddot{q} - \dot{q}^2 - 1 = -a(\dot{q}^2 + 1)^{3/2} e^{(k+1)q} f(\theta) \quad , \quad /3/$$

где: $q = \ln \frac{r}{r_1}$, r_1 определяется из условия $\int_0^{2\pi} q(\theta) dN\theta = 0$,



Р и с. 1.

Распределение магнитного поля по азимуту на элементе периодичности. Сплошная кривая - данные магнитных измерений; пунктирная - аппроксимация функцией /1/.

$$a = \frac{eH_0}{pc} \frac{r_1^{k+1}}{r_0^k} \quad /4/$$

Для решения уравнения /3/ выражение $(1 + \dot{q}^2)^{3/2} e^{(k+1)q}$ разложим в ряд, ограничиваясь третьими степенями по q и \dot{q} . Затем, записывая q в виде $q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \cos jN\theta$, приходим к системе алгебраических уравнений относительно a и q_j . Решение получающейся таким образом системы ищем методом последовательных приближений. В результате для нулевого приближения найдем следующие формулы:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{P - f_0}{(k+1)f_1}, \\ q_2 &= \frac{P - f_0}{4(k+1)f_1^2} \left[f_2 + \frac{P - f_0}{2} \right], \\ q_3 &= \frac{P - f_0}{9(k+1)f_1^3} \left\{ f_3 + \frac{5(P - f_0)f_2}{8f_1} - \frac{3N^2(P - f_0)^2}{8(k+1)^2 f_1} \left[1 - \frac{(k+1)^2}{2N^2} \right] \right\}, \\ a &= \frac{N^2(P - f_0)}{(k+1)f_1^2}, \end{aligned} \quad /5/$$

где:

$$P = \sqrt{f_0^2 + \frac{2(k+1)f_1^2}{N}}$$

Таким же путем, учитывая члены более высокого порядка, можно получить следующее приближение /см. приложение 1/. Через величины q_j, a, f_j легко выразить коэффициент увеличения установки C /отношение максимального радиуса орбиты к минимальному радиусу кривизны/.

Согласно определению

$$C = a \max |f(\theta) e^{(k+1)q}|$$

или

$$C = a \left[1 + (k+1) \sum_{j=1}^3 q_j \sum_{s=0}^3 f_s \right]$$

/6/

В рамках данного метода линеаризованные уравнения свободных колебаний удобно представлять в виде

$$\ddot{\xi} + (A_0 \xi + A_1 \xi \cos N\theta + A_2 \xi \cos 2N\theta + \dots) \xi = 0$$

/7/

где ξ - отклонение частицы от мгновенной орбиты в радиальном (x) или вертикальном (z) -направлениях. Коэффициенты $A_{j\xi}$ зависят от q_j, f_j, a и, в общем случае, имеют довольно громоздкий вид /см. приложение 1/. Сдвиг фазы бетатронных колебаний за элемент периодичности μ для данного уравнения определяется из соотношения: ^{/2,3/}

$$\begin{aligned} \cos \mu = \cos \frac{2\pi A_0^{1/2}}{N} - \frac{\pi}{2NA_0^{1/2}} \sin \left(\frac{2\pi A_0^{1/2}}{N} \right) \left[\frac{A_1^2}{N^2 - 4A_0} + \right. \\ \left. + \frac{A_2^2}{4N^2 - 4A_0} + \frac{3A_1^2 A_2}{(N^2 - 4A_0)(4N^2 - 4A_0)} \right] \end{aligned} \quad /8/$$

где индекс ξ у $A_{j\xi}$ опущен. Два линейно-независимых решения уравнения /7/ приближенно можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi_1(\theta) - \cos \nu\theta + a \cos(\nu - N)\theta + b \cos(\nu + N)\theta, \\ \xi_2(\theta) - \sin \nu\theta + a \sin(\nu - N)\theta + b \sin(\nu + N)\theta. \end{aligned} \quad /9/$$

Здесь $\nu = \frac{N\mu}{2\pi}$ - число бетатронных колебаний на оборот, а

$$a = -\frac{A_1}{2[A_0 - (\nu - N)^2]}, \quad b = -\frac{A_1}{2[A_0 - (\nu + N)^2]}$$

§ 2. Исследование влияния возмущений на движение частиц

На модели кольцевого фазотрона были проведены эксперименты по определению искажений мгновенной орбиты, вызванных возмущениями, вносимыми в отдельные секторы электромагнита. Смещение средней магнитной поверхности осуществлялось путем изменения соотношения токов в верхней и нижней катушках сектора.

Азимутальная асимметрия вводилась соответствующим изменением токов в обмотках сектора. Для выделения чистого эффекта от вносимого возмущения производились измерения орбиты до и после введения возмущения. Положение равновесной орбиты по высоте и радиусу определялось специальными

мишенями с точностью $\pm 0,25$ мм. Конструкция вакуумной камеры позволяет одновременно снять только семь точек орбиты. Для увеличения числа экспериментальных точек искажения вносились поочередно в два сектора /прямых или обратных/ и затем полученные точки при искажении одного из секторов наносились на измеренную кривую при включении искажения в другом секторе путем смещения их по азимуту на угол, равный углу между этими секторами. Определение влияния искажений производилось для одной определенной настройки ускорителя при значениях чисел свободных колебаний на оборот $\nu_x = 33$ и $\nu_z = 2,2$.

Расчет искаженных орбит производится следующим образом. Как известно, искажения средней плоскости и азимутальная асимметрия приводят к появлению правой части δF в уравнениях свободных колебаний, причем для радиального движения

$$\delta F_x \approx -a r_1 [1 + (k+2) q_1 \cos N\theta] \Delta f(\theta),$$

а для вертикального

$$\delta F_z \approx (A_{0z} + A_{1z} \cos N\theta + A_{2z} \cos 2N\theta) \Delta z(\theta),$$

где $\Delta f(\theta)$ — отклонение от идеального распределения поля /1/ и $\Delta z(\theta)$ — искажение средней плоскости. В частности, для рассматриваемых случаев Δf и Δz в пределах возмущенного сектора можно считать постоянными. Таким образом, уравнения свободных колебаний при наличии возмущений записываются в виде:

$$\ddot{\xi} + (A_{0\xi} + A_{1\xi} \cos N\theta + A_{2\xi} \cos 2N\theta) \xi = (\delta F_{0\xi} + \delta F_{1\xi} \cos N\theta + \delta F_{2\xi} \cos 2N\theta) \Delta \chi \quad /10/$$

Под $\delta F_{j\xi}$ и $\Delta \chi$ для радиального и вертикального движений нужно понимать соответствующие величины. Общим решением уравнения /10/ является следующее выражение

$$\xi(\theta) = B_1 \xi_1(\theta) + B_2 \xi_2(\theta) + \frac{1}{W_{\xi}} \int_0^{\theta} \delta F(\theta') \{ \xi_1(\theta') \xi_2(\theta) - \xi_2(\theta') \xi_1(\theta) \} d\theta' \quad /11/$$

где B_1 и B_2 — постоянные, задаваемые начальными условиями, для замкнутой орбиты они определяются из условия периодичности решения и его первой производной через оборот: $\xi_1(\theta)$ и $\xi_2(\theta)$ — линейно-независимые решения /8/ однородного уравнения, W_{ξ} — вронскиан этих решений.

Обозначим через θ_1 и θ_2 азимуты краев возмущенного сектора. Тогда

да, подставляя в /11/ правую часть уравнения /10/ и линейно-независимые решения однородного уравнения /9/, а также учитывая, что внутри возмущенного сектора $\Delta\chi = \text{const}$, получим для искаженной орбиты следующую формулу:

$$\xi_m(\theta) = \frac{\Phi_\xi \Delta\chi}{2W_\xi \sin \pi\nu_\xi} \left\{ \xi_1(\theta) \cos \frac{\pi\nu_\xi}{N} (2m \mp N + \lambda) + \xi_2(\theta) \sin \frac{\pi\nu_\xi}{N} (2m \mp N + \lambda) \right\}, \quad /12/$$

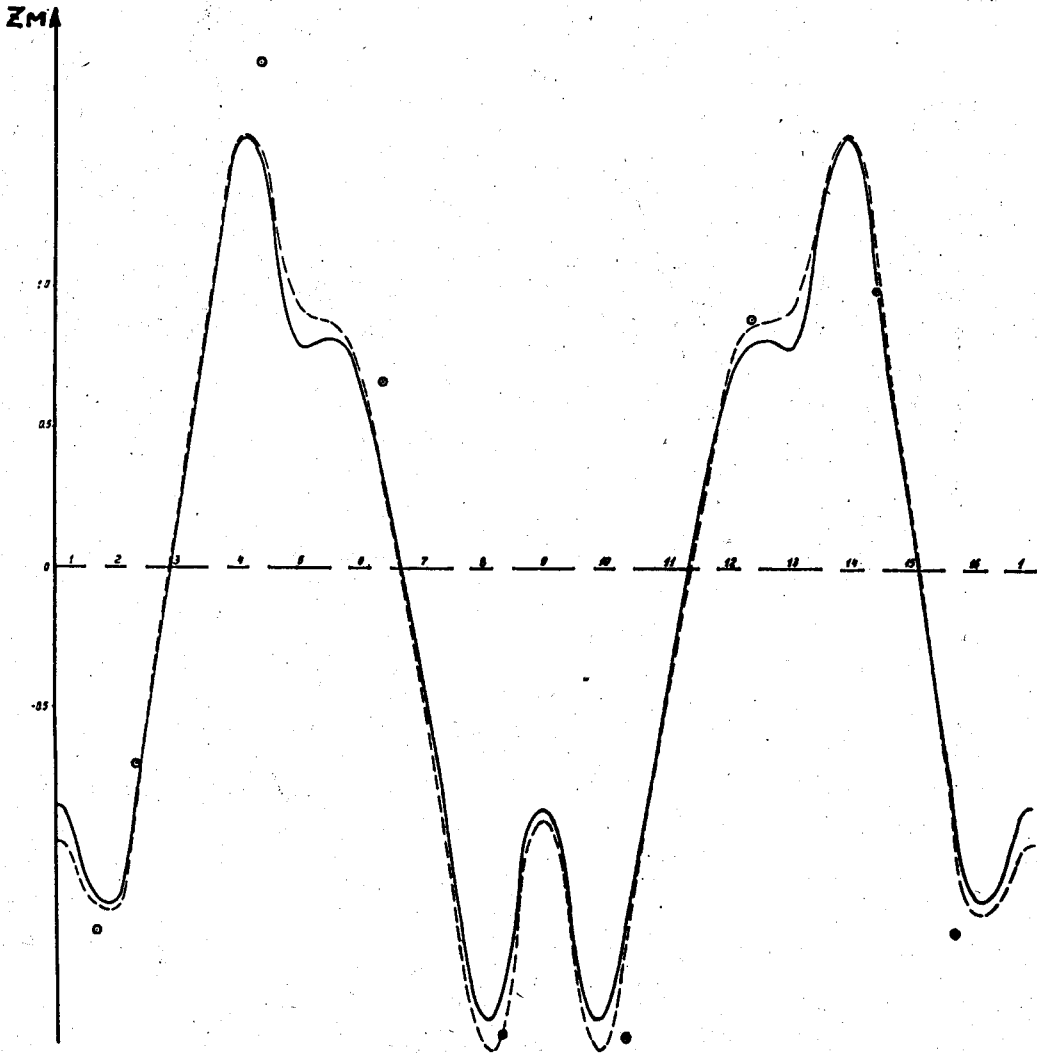
где знак минус берется для интервала изменения θ от 0 до θ_1 , а знак плюс - для интервала от θ_2 до 2π ; m - число элементов периодичности, укладывающихся от начала отсчета θ до возмущенного сектора. Величина λ равна нулю при возмущении прямого сектора и единице при возмущении обратного сектора.

Множитель Φ_ξ в /12/ определяется формулой:

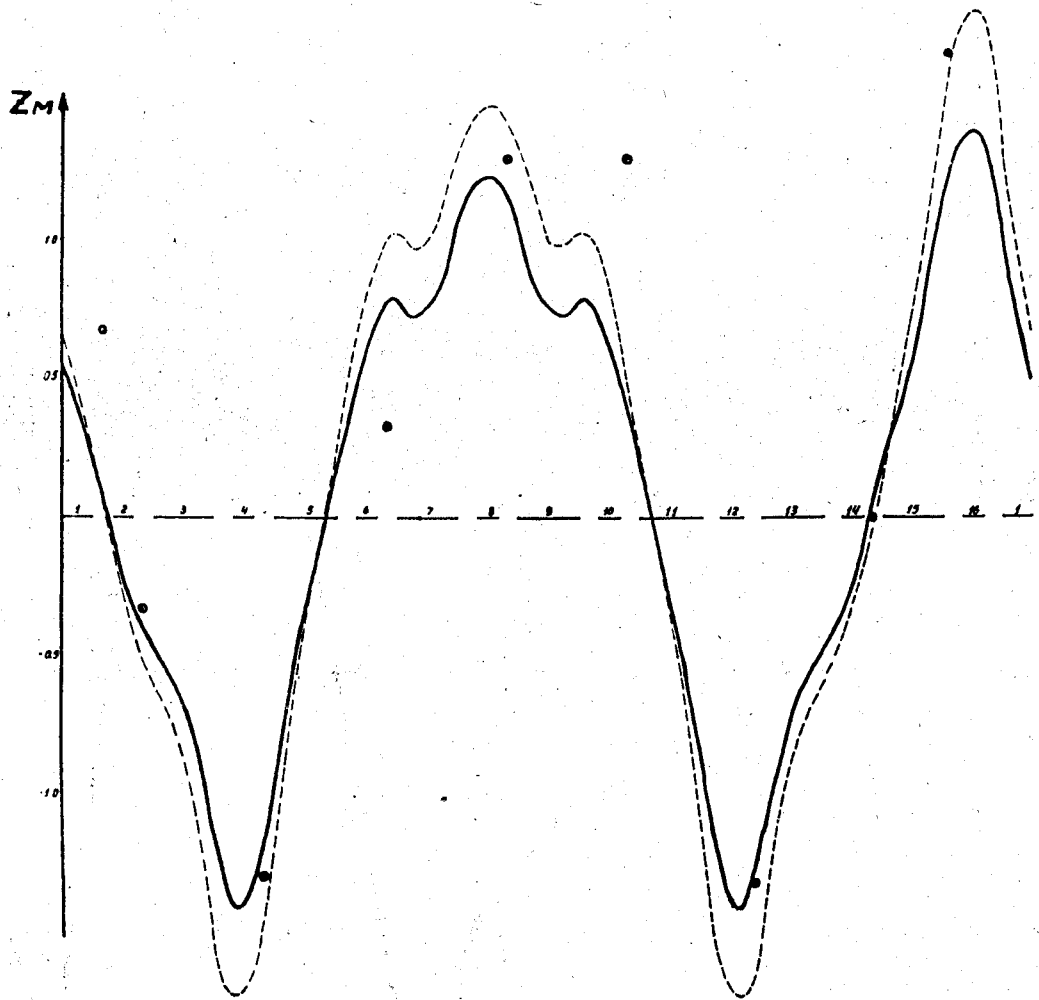
$$\begin{aligned} \Phi_\xi = & \frac{2}{\nu_\xi} \left[\delta F_{0\xi} + \frac{\delta F_{1\xi}}{2} (a_\xi + b_\xi) \right] \sin \nu_\xi \Delta\theta + \frac{\delta F_{1\xi} a_\xi + \delta F_{2\xi}}{\nu_\xi - 2N} \sin(\nu_\xi - 2N) \Delta\theta + \\ & + \frac{\delta F_{1\xi} b_\xi + \delta F_{2\xi}}{\nu_\xi + 2N} \sin(\nu_\xi + 2N) \Delta\theta + (1 - 2\lambda) \left\{ \frac{2}{\nu_\xi - N} \left[\delta F_{0\xi} a_\xi + \frac{\delta F_{1\xi} + \delta F_{2\xi} b_\xi}{2} \right] \right. \\ & \left. \sin(\nu_\xi - N) \Delta\theta + \frac{2}{\nu_\xi + N} \left[\delta F_{0\xi} b_\xi + \frac{\delta F_{1\xi} + \delta F_{2\xi} a_\xi}{2} \right] \sin(\nu_\xi + N) \Delta\theta + \right. \\ & \left. + \frac{\delta F_{2\xi} a_\xi}{\nu_\xi - 3N} \sin(\nu_\xi - 3N) \Delta\theta + \frac{\delta F_{2\xi} b_\xi}{\nu_\xi + 3N} \sin(\nu_\xi + 3N) \Delta\theta \right\}, \quad /13/ \end{aligned}$$

где $\Delta\theta$ половина углового раствора соответствующего сектора. Аналогичным образом можно получить формулы и внутри самого возмущенного сектора. Нс ввиду громоздкости выражений мы здесь их не приводим.

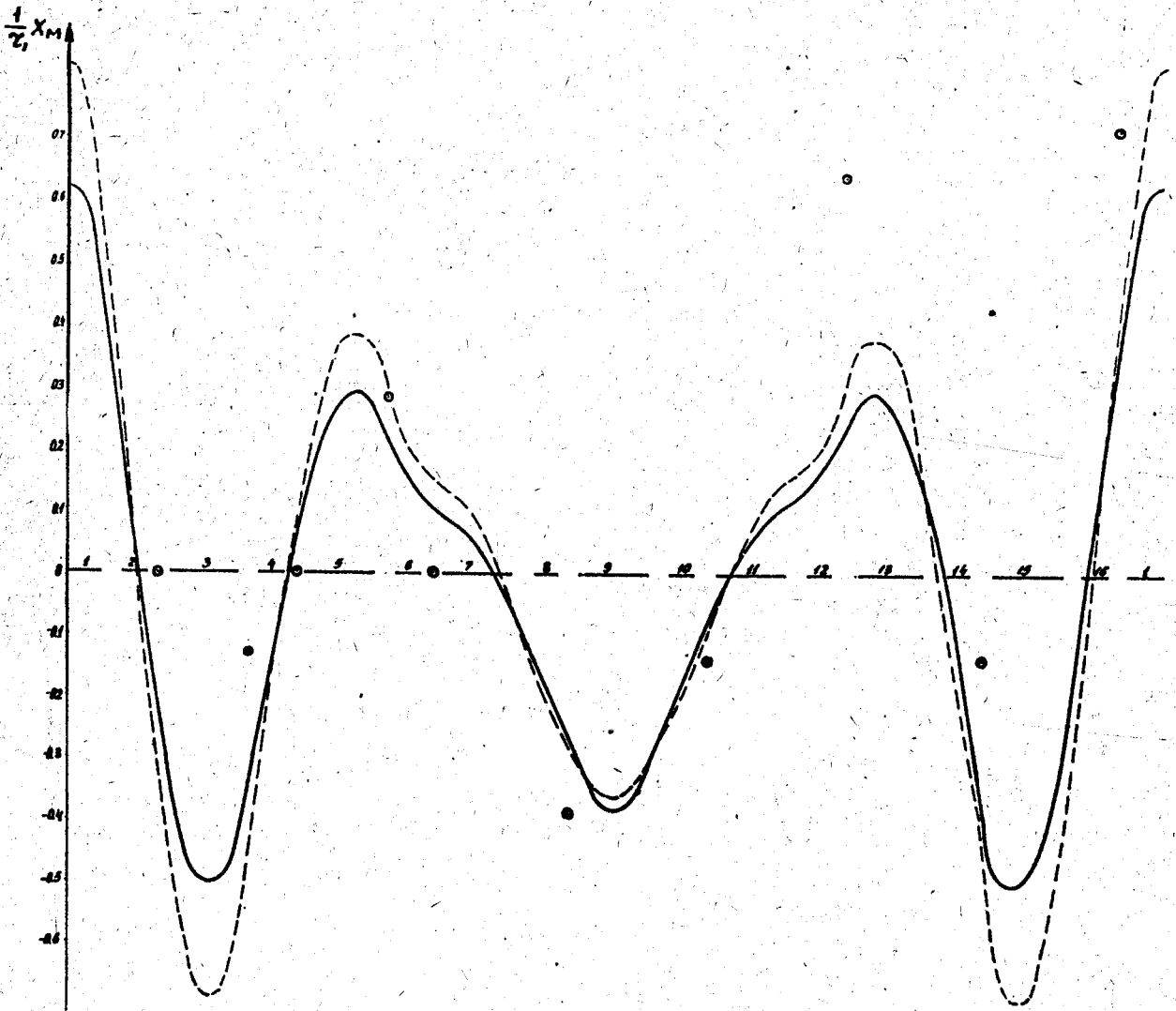
На рис. 2а, б, в представлены экспериментальные значения для искаженной орбиты в вертикальном направлении при возмущении прямого и обратного секторов и в радиальном направлении при возмущении прямого сектора. На этих же рисунках приведены теоретические кривые, полученные по формуле /12/ /пунктирные линии/ и кривые, рассчитанные по формулам приложения II с 12ю Фурье - гармониками возмущения /сплошные линии/. Из сравнения всех этих результатов видно, что экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими. Кроме того, общие формулы приложения II с достаточной



Р и с. 2а. Искривленная орбита в вертикальном направлении при смещении средней плоскости в прямом секторе. Сплошная кривая - результаты расчета по формуле приложения II. Пунктирная - по формуле /12/; Точками обозначены экспериментальные данные.



Р и с. 26, То же самое при смещении средней плоскости в обратном секторе.



Р и с. 2в. Орбита в радиальном направлении при изменении поля в прямом секторе.

степенью точности согласуются с более точными формулами и вполне пригодны для анализа магнитных измерений и измерений по пучку.

§ 3. Резонансный метод определения частот свободных колебаний

Для выбора требуемого режима работы ускорителя и проведения различных экспериментов с пучком необходимо точное знание частот свободных колебаний. Измерения частот в статическом режиме с помощью мишеней^{/1/} не обеспечивают нужной точности и служат лишь для ориентировки при запуске ускорителя. Более точным методом определения частот свободных колебаний является метод резонансной раскачки этих колебаний. Раскачка колебаний осуществляется поперечным высокочастотным электрическим полем. Для качественного описания явления можно использовать уравнения свободных колебаний в гладком приближении^{/4/}. При наличии внешней вынуждающей силы F уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\xi} + \nu_{\xi}^2 \xi = F \quad /14/$$

Предполагая, что электрическое поле однородно и его действие локализовано по азимуту, выражение для F можно записать следующим образом:

$$F = \frac{e \mathcal{E} c^2}{\omega_0 E} \cos\left(\frac{\Omega}{\omega_0} \theta + \gamma_1\right) \delta(\theta - \theta_1), \quad /15/$$

где: \mathcal{E} — напряженность электрического поля,
 Ω — круговая частота этого поля, γ_1 — начальная фаза,
 ω_0 — частота обращения частиц, θ_1 — азимут, на котором действует в.ч. поле, E — энергия частиц. Разлагая δ -функцию в ряд Фурье и подставляя выражение для силы в /14/, найдем решение в виде:

$$\xi(\theta) = \frac{e \mathcal{E} c^2}{2\pi \omega_0^2 E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{\Omega}{\omega_0} \theta + \gamma_1 + j(\theta - \theta_1)\right]}{\nu_{\xi}^2 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0} + j\right)^2} \quad /16/$$

Отсюда видно, что резонанс со свободными колебаниями наступает при значениях частот внешнего поля, определяемых из соотношения

$$\nu_5^2 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0} + j \right)^2 = 0$$

или

$$|\nu_5 \pm j| f_0 = f_{рез}$$

/17/

Если выбрать пары резонансных частот

$$f_{рез1} = f_0 (\nu_5 - j) \quad \text{и} \quad f_{рез2} = f_0 (j + 1 - \nu_5),$$

то их сумма будет равна частоте обращения f_0 . Очевидно, частоты $f_{рез1}$ и $f_{рез2}$ расположены симметрично относительно частоты $f_0/2$. Так как это относится к любому типу резонанса, то имея набор резонансных частот, можно определить, кроме $f_{рез1}$ и $f_{рез2}$, также и частоту обращения f_0 , а, следовательно, и ν_5 . При выводе условия /17/ внешнее электрическое поле предполагалось однородным. В действительности оно неоднородно в пространстве и /17/ переходит в общее условие.

$$|p\nu_x + g\nu_x \pm j| f_0 = f_{рез} \quad \text{где} \quad p \text{ и } g \text{ целые числа} \quad /18/$$

Из предыдущего ясно, что ν_x и ν_z могут быть определены точно, если предварительно они известны с точностью до 0,5. Для грубой оценки частот, удовлетворяющих данному требованию, можно использовать метод определения частот в статическом режиме. Кроме того, числа колебаний на оборот с точностью до 0,5 можно определить из анализа возмущенных орбит, поскольку их форма существенно зависит от того, какова величина частоты и по какую сторону от простого резонанса она расположена. Вообще говоря, если дополнительно известно качественное поведение ν_x и ν_z в зависимости от изменения какого-либо параметра, то требование к предварительному знанию частот снижается, и числа колебаний на оборот могут быть определены данным методом, если они известны предварительно с точностью до единицы. Например, числа свободных колебаний на оборот, как по высоте, так и по радиусу, уменьшаются при увеличении соотношения полей в прямых и обратных секторах.

Измеряя значения соответствующих пар резонансных частот $f_{рез1}$ и $f_{рез2}$ при двух сравнительно близких значениях отношений полей и подставляя в /17/ значения j , отличающиеся на единицу, найдем правильные ν_x и ν_z , удовлетворяющие нужной зависимости от данного параметра.

Резонансный метод определения частот свободных колебаний осуществляется следующим образом. Напряжение высокой частоты, возбуждающее свободные колебания частиц, прикладывается к паре пластин, размером 20 x 50 мм, расположенных сверху и снизу ускоряемого пучка. Размеры пластин, их взаимное расположение и схема соединения были определены экспериментально на электролитической ванне. В зависимости от способа соединения пластин можно эффективно возбуждать или вертикальные, или радиальные колебания. При последовательном их соединении напряжение к пластинам прикладывается в противофазе и создаются хорошие условия для возбуждения вертикальных колебаний. При параллельном соединении к обеим пластинам прикладывается одинаковый потенциал /вторым электродом в этом случае служат стенки вакуумной камеры/ и раскачиваются радиальные колебания. Пластины вводятся в вакуумную камеру через окно в наружной боковой стенке. Конструкция ввода позволяет перемещать их по радиусу, не нарушая вакуума в камере ускорителя. Напряжение на пластины подается от специального высокочастотного генератора. При выборе необходимого диапазона частот учитывалось, что максимальная частота должна быть равной частоте обращения частиц в ускорителе. Минимальную частоту генератора нет необходимости выбирать равной нулю, поскольку простые резонансы имеют, как правило, значительную ширину резонансной полосы. В изготовленном генераторе диапазон частот лежит в пределах 5 + 60 мгц.

Генератор позволяет получать на пластинах регулируемое напряжение до 100 в на всем диапазоне частот. Величина напряжения высокой частоты измеряется путем подачи его на отклоняющие электроды электронно-лучевой трубки, а частота определяется по нулевым биениям с известной частотой стандартного генератора.

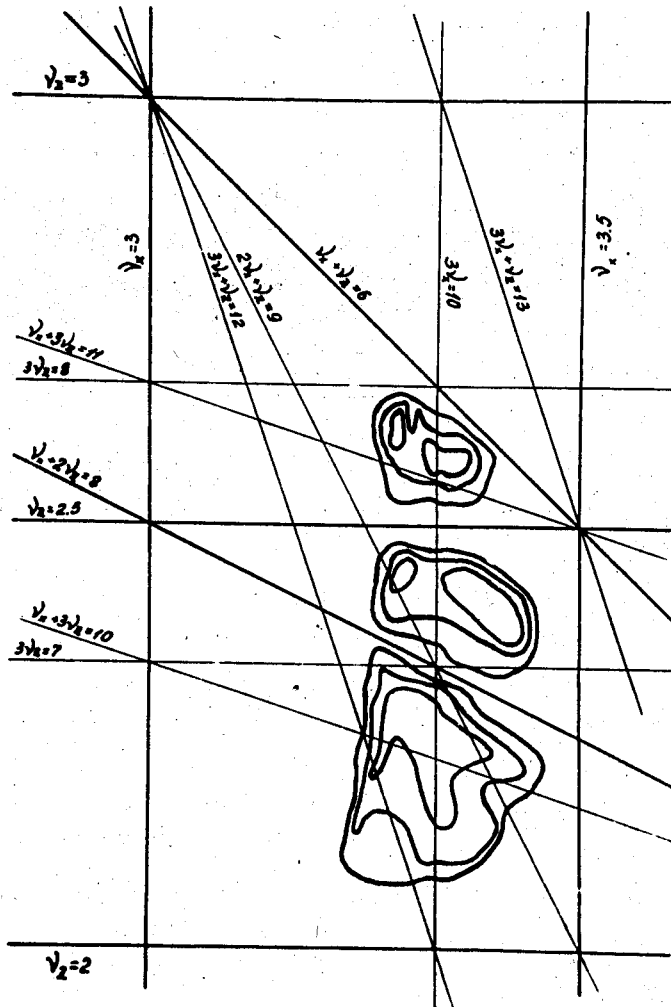
Высокая частота электрического поля, раскачивающего свободные колебания, как следует из /17/ или /18/, однозначно связана с частотой обращения частиц. В кольцевом фазотроне ^{/4/} частота обращения резко меняется с энергией вплоть до достижения частицами критической энергии. В связи с этим, при определении частот свободных колебаний, при энергиях ниже критической необходимо прибегать к специальным мерам, обеспечивающим хорошую точность. Действительно, поскольку электрическое поле между пластинами

имеет протяженность по радиусу, то одному и тому же типу резонанса соответствует некоторая полоса значений частот. Устранить эту неопределенность удается при использовании импульсного режима работы генератора. Длительность импульса выбирается с учетом требуемой точности определения частот свободных колебаний. В нашем случае точность порядка 1% обеспечивается при длительности импульса в.ч. в 20 мксек. Значение радиуса, на котором производится определение частот свободных колебаний определяет задержку во времени включения генератора по отношению к моменту инжекции электронов, а также взаимное расположение по радиусу пластин и индикатора ускоренного пучка.

§ 4. Эксперименты

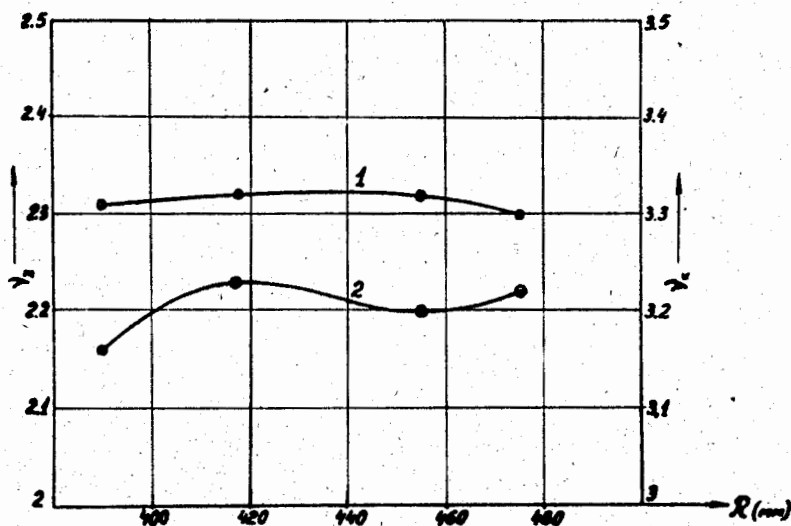
При определении числа вертикальных и радиальных свободных колебаний на оборот в кольцевом фазотроне измерялись значения частот, возбуждающего высокочастотного поля, при которых происходит резонансное увеличение амплитуд этих колебаний. О том, какие колебания возбуждены можно судить, наблюдая за импульсом ускоренного пучка на экране осциллографа. В случае возбуждения вертикальных колебаний пучок, попадая на горизонтальные стенки вакуумной камеры, начинает теряться, не доходя до индикатора, а амплитуда сигнала на осциллографе падает. При возбуждении радиальных колебаний происходит сдвиг во времени импульса на осциллографе, т.е. интервал времени между моментом инжекции и попаданием пучка на индикатор сокращается. Если осуществляется резонанс связи радиальных и вертикальных колебаний, то сдвиг импульса сопровождается также уменьшением его амплитуды.

В таблице 1 даны измеренные значения резонансных частот для одного из режимов работы ускорителя, а также вычисленные по ним числа свободных колебаний на оборот. Из таблицы видно, что значения ν_{ξ} и f_0 , найденные при расшифровке различного рода резонансов, очень хорошо согласуются между собой. Таким методом были определены значения ν_x и ν_z для большого числа режимов работы ускорителя. Знание числа свободных колебаний на оборот в разных рабочих точках на области устойчивости позволило



Р и с. 3.

Диаграмма интенсивности ускоренного пучка на области устойчивости.



Р и с. 4. Поведение частот свободных колебаний в процессе ускорения.

$f_{рез}$ мгц	f_0 мгц	Направление резонанса	$f_{рез}/f_0$	Тип резонанса	Значения ν_x и ν_z
9,5	39,3	Z	0,242	$\nu_z - 2$	$\nu_z = 2,242$
29,8			0,758	$3 - \nu_z$	
12,2	39,4	X	0,310	$\nu_x - 3$	$\nu_x = 3,310$
27,2			0,690	$4 - \nu_x$	
24,5	39,6	X	0,618	$2\nu_x - 6$	$2\nu_x = 6,618$
15,1			0,382	$7 - 2\nu_x$	
21,7	39,4	X Z	0,552	$(\nu_x + \nu_z) - 5$	$\nu_x + \nu_z = 5,552$
17,7			0,448	$6 - (\nu_x + \nu_z)$	
19,2	39,4	Z	0,487	$2\nu_z - 4$	$2\nu_z = 4,487$
20,2			0,513	$5 - 2\nu_z$	

Т а б л и ц а 1.

Результаты определения чисел свободных колебаний на оборот.

Объединенный институт
ядерных исследований
СИБЛИОТЕКА

экспериментально построить диаграмму интенсивности ускоренного пучка в координатах ν_x и ν_z и выявить роль различных резонансов в кольцевом фазотроне. На рис. 3 нанесены кривые одинаковой интенсивности пучка и проведены резонансные линии. При переходе от одной кривой одинаковой интенсивности к соседней, интенсивности пучка изменяется в 10 раз. Некоторые провалы в интенсивности, не связанные с действием резонансов, по-видимому, можно объяснить флуктуациями в условиях захвата. Действие резонансов в основном находится в соответствии с теоретическими представлениями /5/. Из снятой диаграммы следует, что резонансы с $p + g = 4$ и $p + g = 3$ практически не влияют на пучок, за исключением резонансов, связанных со структурой электромагнита. На диаграмме таких резонансов - два: $\nu_x + 2\nu_z = 8$ и $3\nu_z = 8$. Их действие приводит к гибели всего пучка, причем резонансная полоса в этих случаях составляет $\Delta\nu = \pm 0,01$. На диаграмме также отчетливо видно влияние суммового резонанса $\nu_x + \nu_z = 6$; его резонансная полоса имеет ширину $\Delta\nu = \pm 0,02$. Ширины полос параметрических резонансов $\nu_x = 3,5$ $\nu_z = 2,5$ составляют соответственно $\Delta\nu_x = \pm 0,04$ и $\Delta\nu_z = \pm 0,02$. И, наконец, резонансные полосы простых резонансов $\nu_x = 3$ и $\nu_z = 2$ равны $\Delta\nu_x = \pm 0,22$ и $\Delta\nu_z = \pm 0,08$. Резонансные полосы простых резонансов в основном определяются искажениями поля по азимуту и искажениями средней плоскости. Поэтому большая ширина полосы при $\nu_x = 3$ указывает на значительную азимутальную асимметрию магнитного поля. Приведенная диаграмма является существенным дополнением исследований, описанных в работе /6/.

Разработанный метод определения частот свободных колебаний позволяет сравнительно точно измерить частоты при разной энергии пучка. Это дает возможность судить о поведении рабочей точки в процессе ускорения. На рис. 4 приведены данные по измерению частот на разных радиусах. Частота радиальных колебаний, практически остается постоянной в соответствии с условием динамического подобия. Колебания же ν_z не превышают 0,1, что, по-видимому, можно объяснить изменением вида азимутальной асимметрии с радиусом.

В заключение авторы выражают признательность Л.В. Светову и Ю.А. Чернышову за четкое обслуживание установки.

П р и л о ж е н и е

1. Невозмущенное движение

А. О р б и т а

Учитывая члены высшего порядка в разложении уравнения орбиты, для первого приближения имеем:

$$q_1 \approx q_1^0 \left\{ 1 + \frac{k+1}{N^2} + 3 \frac{(k+1)}{2} \left[1 + \frac{2}{3(k+1)} + \frac{k+1}{3N^2} \right] q_2^0 + \right. \\ \left. + \frac{3N^2}{8} \left[1 + \frac{k+1}{N^2} - \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] (q_1^0)^2 \right\},$$

$$q_2 \approx \left[1 + \frac{k+1}{4N^2} \right] q_2^0 - \frac{1}{16} \left[1 - \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] (q_1^0)^2 + \frac{5(k+1)}{4} \left[1 + \frac{3}{10(k+1)} \right] q_1^0 q_3^0 + \\ + \frac{3N^2}{4} \left[1 + \frac{k+1}{4N^2} - \frac{(k+1)^2}{12N^2} \right] (q_1^0)^2 q_2^0,$$

$$q_3 \approx q_3^0,$$

$$a^{-1} = (a^0)^{-1} \left\{ 1 + \frac{N^2}{4} \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] (q_1^0)^2 \right\}.$$

Величины с индексом нуль относятся к нулевому приближению.

Б. Свободные колебания

Уравнения свободных колебаний в цилиндрической системе координат можно записать в виде:

$$\ddot{x} + \{ a^2 f^2(\theta) e^{2(k+1)q} (1+\dot{q}^2) + a(kf(\theta) - \dot{f}(\theta)\dot{q}) e^{(k+1)q} (1+\dot{q}^2)^{1/2} \} x = 0,$$

$$\ddot{z} - a(kf(\theta) - \dot{f}(\theta)\dot{q}) e^{(k+1)q} (1+\dot{q}^2)^{1/2} z = 0.$$

В этих уравнениях сделано пренебрежение малыми членами с \dot{x} и \dot{z} . Раскладывая $e^{2(k+1)q} (1+\dot{q}^2)$ и $e^{(k+1)q} (1+\dot{q}^2)^{1/2}$ в ряды и подставляя выражения для $f(\theta)$ и $q(\theta)$, получим

$$a^2 f^2(\theta) e^{2(k+1)q} (1+\dot{q}^2) = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \cos jN\theta,$$

$$a(kf(\theta) - \dot{f}(\theta)\dot{q}) e^{(k+1)q} (1+\dot{q}^2)^{1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \cos jN\theta$$

Таким образом, уравнения свободных колебаний приводятся к форме /7/

$$\ddot{\xi} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j \xi \cos jN\theta \right) \xi = 0,$$

где $\xi = \begin{cases} x \\ z \end{cases}$, $A_j \xi = \begin{cases} B_j + C_j & \text{для } x \text{ - движения} \\ -C_j & \text{для } z \text{ - движения.} \end{cases}$

Полученные выражения для B_j и C_j обеспечивают хорошую точность при расчете частот свободных колебаний по формуле /8/ /ошибка по отношению к расчетам на электронной счетной машине для радиальных колебаний составляет $\sim 2\%$, а для вертикальных колебаний $\sim 4\%$, но имеют довольно громоздкий вид:

$$B_0 = a^2 \left\{ f_0^2 + \frac{1}{2} (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) \right\} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \frac{N^2}{2} \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 \right\} + [f_0 f_1 + f_1 f_2 + f_2 f_3] \{ (k+1) q_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + N^2 \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] q_1 q_2 + \frac{(k+1)N^2}{4} \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^3 \} + \\
& + [f_0 f_2 + f_1 f_3 + \frac{1}{2} f_1^2] \{ (k+1) q_2 - \frac{N^2}{4} \left[1 - \frac{2(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 \\
& + \frac{3N^2}{2} \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{3N^2} \right] q_1 q_3 \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \alpha^2 \{ [f_0^2 + \frac{1}{2} (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)] \{ 2(k+1) q_1 + \\
& + 2N^2 \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] q_1 q_2 + \frac{(k+1)N^2}{2} \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^3 \} + \\
& + [f_0 f_1 + f_1 f_2 + f_2 f_3] \{ 1 + (k+1) q_2 + \frac{N^2}{4} \left[1 + \frac{6(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 + \\
& + \frac{3N^2}{2} \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{3N^2} \right] q_1 q_3 \} + [f_0 f_2 + f_1 f_3 + \frac{1}{2} f_1^2] \\
& \{ (k+1) q_1 + 2(k+1)^2 q_1 q_2 + \frac{2}{3} (k+1)^3 q_1^3 \} + \\
& + [f_0 f_3 + f_1 f_2] \{ (k+1) q_2 - \frac{N^2}{4} \left[1 - \frac{2(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 + \\
& + \frac{3N^2}{2} \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{3N^2} \right] q_1 q_3 \} \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \alpha^2 \{ [f_0^2 + \frac{1}{2} (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)] \{ 2(k+1) q_2 - \\
& - \frac{N^2}{2} \left[1 - \frac{2(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 + 3N^2 \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{3N^2} \right] q_1 q_2 \} + \\
& + [f_0 f_2 + f_1 f_3 + \frac{1}{2} f_1^2] \{ 1 + \frac{N^2}{2} \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 \} + \\
& + [f_0 f_1 + f_1 f_2 + f_2 f_3] \{ (k+1) q_1 + 2(k+1)^2 q_1 q_2 + \\
& + \frac{2}{3} (k+1)^3 q_1^3 \} + [f_0 f_3 + f_1 f_2] \{ (k+1) q_1 +
\end{aligned}$$

$$+ N^2 \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] q_1 q_2 + \frac{(k+1)N^2}{4} \left[1 + \frac{2(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 \} .$$

$$C_0 = \alpha \{ k f_0 \left[1 + \frac{N^2}{4} \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] \cdot q_1^2 \right] -$$

$$- f_1 \left\{ \frac{N^2}{2} \left[1 - \frac{k(k+1)}{N^2} \right] q_1 - \frac{kN^2}{2} \left[1 - \frac{k+1}{2k} + \frac{(k+1)^2}{2N^2} \right] q_1 q_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3N^4}{16} \left[1 + \frac{(k+1)^2}{3N^2} - \frac{k(k+1)}{3N^2} - \frac{k(k+1)^2}{3N^4} \right] q_1^3 \right\} -$$

$$- f_2 \left\{ 2N^2 \left[1 - \frac{k(k+1)}{4N^2} \right] q_2 + N^4 \left[1 + \frac{3(k+1)^2}{4N^2} \right] q_1^2 q_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(k+1)N^2}{2} \left[1 + \frac{k}{4(k+1)} - \frac{k(k+1)}{4N^2} \right] q_1^2 + \frac{3(k+1)N^2}{2} q_1 q_2 \right.$$

$$\left. + \frac{(k+1)N^4}{16} \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^4 \right\} - f_3 \left\{ \frac{9}{2} N^2 q_3 + \frac{9(k+1)N^2}{4} q_1 q_2 \right\} \} .$$

$$C_1 = \alpha \{ k f_0 \left\{ (k+1) q_1 + \frac{(k+1)N^2}{8} \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^3 + \right.$$

$$\left. + N^2 \left[1 + \frac{(k+1)^2}{2N^2} \right] q_1 q_2 \right\} + f_1 \left\{ k - N^2 \left[1 - \frac{k(k+1)}{2N^2} \right] q_2 \right\} -$$

$$- f_2 N^2 \left[1 - \frac{k(k+1)}{2N^2} \right] q_1 \} .$$

$$C_2 = \alpha \{ k f_0 \left\{ (k+1) q_2 - \frac{N^2}{4} \left[1 - \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 \right\} +$$

$$+ f_1 \left\{ \frac{N^2}{2} \left[1 + \frac{k(k+1)}{N^2} \right] q_1 + \frac{N^4}{4} \left[1 + \frac{k(k+1)^2}{3N^4} \right] q_1^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{3N^2}{2} q_3 - \frac{(k+1)N^2}{2} \left[1 - \frac{k(k+1)}{N^2} \right] q_1 q_2 \right\} +$$

$$+ k f_2 \left\{ 1 + \frac{N^2}{4} \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} \right] q_1^2 \right\} -$$

$$- f_3 \left\{ \frac{3N^2}{2} \left[1 - \frac{k(k+1)}{6N^2} \right] q_1 + \frac{3N^4}{8} \left[1 + \frac{(k+1)^2}{N^2} - \frac{k(k+1)}{6N^2} \right] q_1^3 \right\} \} .$$

II. Возмущенное движение /общий случай/

Уравнения свободных колебаний при наличии возмущений, как уже отмечалось, приводятся к /10/. Подставляя $\Delta\chi(\theta)$ в виде ряда Фурье

$$\Delta\chi(\theta) = u_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (u_j \cos j\theta + v_j \sin j\theta),$$

из /11/ найдем приближенно выражение для возмущенной орбиты, справедливое при произвольном типе искажений средней плоскости и азимутальной асимметрии магнитного поля:

$$\xi_M(\theta) = U_0 + \sum_{d=1} U_d \cos d\theta + V_d \sin d\theta,$$

где

$$U_0 = \frac{1}{W_{\xi}} [u_0 D_{0\xi}(0) + u_N D_{1\xi}(N) + u_{2N} D_{2\xi}(2N)],$$

$$U_d = \frac{1}{W_{\xi}} [u_d D_{0\xi}(d) + u_{N+d} D_{1\xi}^+(d) + u_{N-d} D_{1\xi}^-(d) + u_{2N+d} D_{2\xi}^+(d) + u_{2N-d} D_{2\xi}^-(d)],$$

$$V_d = \frac{1}{W_{\xi}} [v_d D_{0\xi}(d) + v_{N+d} D_{1\xi}^+(d) - v_{N-d} D_{1\xi}^-(d) + v_{2N+d} D_{2\xi}^+(d) - v_{2N-d} D_{2\xi}^-(d)],$$

Причем

$$u_{jN-d} = v_{jN-d} = 0 \quad \text{для} \quad jN-d \leq 0.$$

$$D_{0\xi}(d) = \frac{\nu_{\xi}}{\nu_{\xi}^2 - d^2} [\delta F_{0\xi} + \delta F_{1\xi} \frac{a_{\xi} + b_{\xi}}{2}] + \frac{\delta F_{1\xi}}{2} \left[\frac{\nu_{\xi} - N}{(\nu_{\xi} - N)^2 - d^2} a_{\xi} + \frac{\nu_{\xi} + N}{(\nu_{\xi} + N)^2 - d^2} b_{\xi} \right] +$$

$$+ \frac{a_{\xi}^2 (\nu_{\xi} - N)}{(\nu_{\xi} - N)^2 - d^2} + \frac{b_{\xi}^2 (\nu_{\xi} + N)}{(\nu_{\xi} + N)^2 - d^2};$$

$$D_{1\xi}^+(d) = \left[\frac{\nu_{\xi}}{\nu_{\xi}^2 - d^2} + \frac{a_{\xi}^2 (\nu_{\xi} - N)}{(\nu_{\xi} - N)^2 - d^2} \right] \frac{\delta F_{1\xi}}{2} + 2\delta F_{0\xi} \left[\frac{a_{\xi} (2\nu_{\xi} - N)}{(2\nu_{\xi} - N)^2 - (N \pm 2d)^2} + \frac{b_{\xi} (2\nu_{\xi} + N)}{(2\nu_{\xi} + N)^2 - (N \pm 2d)^2} \right],$$

$$D_{2\xi}^+(d) = \frac{a_{\xi} b_{\xi} \nu_{\xi}}{\nu_{\xi}^2 - (N \pm d)^2} \delta F_{0\xi} + \left[\frac{a_{\xi} (2\nu_{\xi} - N)}{(2\nu_{\xi} - N)^2 - (N \pm 2d)^2} + \frac{b_{\xi} (2\nu_{\xi} + N)}{(2\nu_{\xi} + N)^2 - (N \pm 2d)^2} \right] \delta F_{1\xi}$$

Таким образом, вклад в орбиту различных гармоник искажения поля определяется поведением коэффициентов $D_j^\xi(d)$. Наибольший вклад будут давать гармоники возмущения, близкие к ν_ξ , $N - \nu_\xi$, $N + \nu_\xi$ и т.д. Поскольку в подобных ускорителях $\delta F_{1\xi}$ больше или сравнимо с $\delta F_{0\xi}$, то вклад высших гармоник, близких к $N - \nu_\xi$ и $N + \nu_\xi$ существенен. Характерным для решения является тот факт, что все наиболее опасные гармоники возмущения поля дают большой вклад в одну и ту же гармонику искаженной орбиты, близкую к ν_ξ .

Л и т е р а т у р а

1. В.А. Петухов, И. Габанец, А.А. Журавлев, М. Кармасин, В.И. Котов, Э.А. Мяз, Ю.Л. Обухов, В. Сохор, Ю. Цирак, Ф. Бенда, И. Добиаш, М. Марек, Л.В. Светов, Т. Фукацко, Препринт ОИЯИ 572, Дубна 1960 г., см. также Атомная энергия, 9, 491 /1960/, ЖТФ /в печати/.
2. А.П. Проскураков. Прикладная математика и механика, 10, 545 /1946/.
3. F.T.Adler, D.Brancini. Nuovo Cimento, 5, 959 (1956).
4. K.R.Symon, D.W.Kerst et al. Phys. Rev., 103, 1837 /1956/ /см. также перевод в УФН LXI , 613 /1957/.
5. А.А. Коломенский. Труды ФИАН СССР, т. 10 /1958/.
6. F.T.Cole, R.O.Hoxby, L.W.Jones et al. Rev. Sci. Instr., 28, 403 (1957).