ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В.К. Мельников

Р-737

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРА ПРИ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ. 11.

Дубна 1961 год

В.К. Мельников

Р-737

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРА ПРИ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ. II.

Часть II

§ 5. Три типа расположения ветвей множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$

Опираясь на теорему 4, мы приступим к нахождению $\Gamma_\varepsilon(t_0)$. С этой целью возьмем действительное x_0', удовлетворяющее неравенству $0 < x_0' < \delta_0$, где $\delta_0 > 0$ удовлетворяет теореме 4, и обозначим через $(x_\varepsilon'(t,t'), y_\varepsilon'(t,t'))$ решение системы (3.1), удовлетворяющее условиям:

$$x_\varepsilon'(t',t') = x_0' \quad ,$$

$$\lim_{t\to\infty} x_\varepsilon'(t,t') = \lim_{t\to\infty} y_\varepsilon'(t,t') = 0$$

и при всех $t \geq t'$ $\frac{d}{dt} x_\varepsilon'(t,t') < 0$. Тогда, согласно теореме 4, для произвольного момента времени t_0 точка $(x_\varepsilon'(t_0,t'), y_\varepsilon'(t_0,t'))$ будет зависеть аналитически от ε в некотором круге $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ при всех $t' \leq t_0$. Таким образом, мы можем найти ту часть одной из ветвей множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$, которая расположена в малой окрестности исследуемого положения равновесия типа седло. Заметим, что полученная таким образом часть ветви множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$ гомеоморфна полуинтервалу $(-\infty, t_0]$. Заменив x_0' на $x_0'' = -x_0'$, мы можем аналогично найти часть второй ветви множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$, также расположенную в малой окрестности исследуемого положения равновесия типа седло. Используя теорему Пуанкаре (см. /8/, стр. 153–160), мы можем легко показать, что для любого $T > 0$ найдется $\varepsilon_T > 0$ такое, что точка $(x_\varepsilon'(t_0,t'), y_\varepsilon'(t_0,t'))$ (аналогично для точки $(x_\varepsilon''(t_0,t'), y_\varepsilon''(t_0,t'))$) будет зависеть аналитически от ε в круге $|\varepsilon| < \varepsilon_T$ при всех $t' \leq t_0 + T$. Однако, при $T \to \infty$ ε_T будет, вообще говоря, стремиться к нулю и поэтому не приходится надеяться получить всю ветвь множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$ в виде сходящегося степенного ряда по степеням ε с фиксированным радиусом сходимости. Поэтому нам нужно будет суметь определить тип расположения соответствующей ветви множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$, не имея явных формул, пригодных для нахождения всей ветви. Это удается сделать с помощью следующего приема. Возьмем на границе области G_c произвольную точку (x_0, y_0), лежащую вне δ_0- окрестности точки (0,0), (здесь используются те переменные, в которых записано уравнение (3.1)) и пусть $(x_0(t), y_0(t))$ - решение системы (3.1) при $\varepsilon = 0$, удовлетворяющее условиям: $x_0(0) = x_0$, $y_0(0) = y_0$. Из нашего предположения о том, что на границе области G_c имеется только одно положение равновесия системы (I_0), следует, что при $t \to \pm\infty$ $|x_0(t)| + |y_0(t)| \to 0$. Это означает, что точка $(x_0(t), y_0(t))$ при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ пробегает всю границу области G_c. Как уже было отмечено раньше, для траектории $(x_0(t), y_0(t))$ существуют пределы $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{y_0(t)}{x_0(t)}$ и $K_2 = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{y_0(-t)}{x_0(-t)}$, каждый из которых удовлетворяет уравнению $K^2 = 1$. Пользуясь тем, что в системе (3.1) $\lambda > 0$ нетрудно убедиться, что $K_1 = -1$ и $K_2 = +1$. Это означает, что при $t \to \infty$ либо $x_0(t) \to +0$, а $y_0(t) \to -0$, либо $x_0(t) \to -0$, а $y_0(t) \to +0$. Будем предполагать для определенности, что имеет место первый случай. Пусть $T_0 > 0$ наибольший корень уравнения $x_0(t) = x_0'$, а $\rho^{\pm}$ расстояние от точки $(x_0(\pm 1), y_0(\pm 1))$ до нормали к траектории $(x_0(t), y_0(t))$ в точке (x_0, y_0). Возьмем $\varepsilon_{T_0} > 0$ настолько малым, чтобы, во-первых, решение $(x_\varepsilon'(t,t'), y_\varepsilon'(t,t'))$ было аналитическим по ε в круге $|\varepsilon| < \varepsilon_{T_0}$ при всех $t \geqslant t' - T_0 - 1$, а, во-вторых, чтобы при всех $t \geqslant t' - T_0 - 1$ выполнялось неравенство: $|x_\varepsilon'(t,t') - x_0(t-t'-T_0)| + |y_\varepsilon'(t,t) - y_0(t-t'-T_0)| < \frac{\rho}{2}$, где $\rho = \min(\rho^-, \rho^+)$. Отсюда следует, что существует момент времени t_0', заключенный между $t' - T_0 - 1$ и $t' - T_0 + 1$, такой, что точка $(x_\varepsilon(t_0', t'), y_\varepsilon(t_0', t'))$ лежит на нормали к траектории $(x_0(t), y_0(t))$, проведенной через точку (x_0, y_0). Этот факт наводит на мысль о том, что справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 5.</u> Пусть (x_0, y_0) произвольная, отличная от (0,0), точка на границе области G_c. Тогда существует $\varepsilon_0^+ > 0$ такое, что для любого $|\varepsilon| < \varepsilon_0^+$ и любого t_0' существует и единственно решение $(x_\varepsilon^+(t, t_0'), y_\varepsilon^+(t, t_0'))$ системы (3.1), удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(x_\varepsilon^+(t_0', t_0') - x_0)(\lambda y_0 + p_0(x_0, y_0)) + (y_\varepsilon^+(t_0', t_0') - y_0)(\lambda x_0 + q_0(x_0, y_0)) = 0$;

2. При всех $t \geqslant t_0'$ $(x_\varepsilon^+(t, t_0'), y_\varepsilon^+(t, t_0'))$ разлагается в степенной ряд по ε, сходящийся в круге $|\varepsilon| < \varepsilon_0^+$;

3. При $\varepsilon \to 0$ $x_\varepsilon^+(t, t_0') \to x_0(t - t_0')$, а $y_\varepsilon^+(t, t_0') \to y_0(t - t_0')$,

где $(x_0(t), y_0(t))$ решение системы (3.1) при $\varepsilon = 0$, удовлетворяющее условиям: $x_0(0) = x_0$, $y_0(0) = y_0$;

4. $$\lim_{t\to\infty} x_\varepsilon^+(t, t_0') = \lim_{t\to\infty} y_\varepsilon^+(t, t_0') = 0.$$

Доказательство:

Существование. Возьмем решение $(x_\varepsilon'(t,t'), y_\varepsilon'(t,t'))$ системы (3.1), которое было определено раньше и пусть t_0' наибольший на отрезке $[t'-T_0-1, t'-T_0+1]$ корень уравнения

$$(x_\varepsilon'(t,t')-x_0)(\lambda y_0+p_0(x_0,y_0)) + (y_\varepsilon'(t,t')-y_0)(\lambda x_0+q_0(x_0,y_0))=0$$

Как только что было показано, такой корень существует при всех t' и всех $|\varepsilon| < \varepsilon_{T_0}$. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий следует, что t_0' зависит непрерывно от t', т.е. $t_0' = f(t')$ - непрерывная функция. Из того, что $x_\varepsilon'(t, t'+2\pi) \equiv x_\varepsilon'(t-2\pi, t')$, а $y_\varepsilon'(t, t'+2\pi) \equiv y_\varepsilon'(t-2\pi, t')$, следует, что $f(t'+2\pi) = f(t')+2\pi$. Следовательно, при изменении t' на отрезке длины 2π значения $f(t')$ также заполняют отрезок длины 2π. На этом мы можем закончить доказательство существования.

Единственность. Для доказательства единственности мы воспользуемся тем фактом, что решение $(x_\varepsilon^+(t,t_0'), y_\varepsilon^+(t,t_0'))$ при всех $t \geq t_0'$ разлагается в ряд: $x_\varepsilon^+(t,t_0') = x_0(t-t_0') + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+(t,t_0')\varepsilon^n$, $y_\varepsilon^+(t,t_0') = y_0(t-t_0') + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^+(t,t_0')\varepsilon^n$, где пара функций $(x_n^+(t,t_0'), y_n^+(t,t_0'))$ при $n \geq 1$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\dot{x}_n^+(t,t_0') = \lambda y_n^+(t,t_0') + p_{0x}'(x_0(t-t_0'), y_0(t-t_0'))\, x_n^+(t,t_0') +$$

$$+ p_{0y}'(x_0(t-t_0'), y_0(t-t_0'))\, y_n^+(t,t_0') +$$

$$+ P_n(t, x_0(t-t_0'), \dots, y_{n-1}^+(t,t_0')),$$

$$\dot{y}_n^+(t,t_0') = \lambda x_n^+(t,t_0') + q'_{0x}(x_0(t-t_0'), y_0(t-t_0'))\, x_n^+(t,t_0') +$$

$$+ q'_{0y}(x_0(t-t_0'), y_0(t-t_0'))\, y_n^+(t,t_0') +$$

$$+ Q_n(t, x_0(t-t_0'), \ldots, y_{n-1}^+(t,t_0'))$$

со следующими условиями:

$$x_n^+(t_0',t_0')(\lambda y_0 + p_0(x_0,y_0)) + y_n^+(t_0',t_0')(\lambda x_0 + q_0(x_0,y_0)) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} x_n^+(t,t_0') = \lim_{t\to\infty} y_n^+(t,t_0') = 0 .$$

Покажем, что эти условия однозначно определяют $(x_n(t,t_0'), y_n(t,t_0'))$. Действительно, в противном случае однородная система уравнений:

$$\dot{u} = \lambda v + p'_{0x}(x_0(t-t_0'), y_0(t-t_0'))\, u +$$

$$+ p'_{0y}(x_0(t-t_0'), y_0(t-t_0'))\, v ,$$

$$\dot{v} = \lambda u + q'_{0x}(x_0(t-t_0'), y_0(t-t_0'))\, u +$$

$$+ q'_{0y}(x_0(t-t_0'), y_0(t-t_0'))\, v$$

имела бы нетривиальное решение $(u(t,t_0'),v(t,t_0'))$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(t_0',t_0')(\lambda y_0+p_0(x_0,y_0))+v(t_0',t_0')(\lambda x_0+q_0(x_0,y_0))=0,$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t,t_0')=\lim_{t\to\infty} v(t,t_0')=0.$$

Из последнего условия следует, что $u(t,t_0')=C\dot{x}_0(t-t_0')$, а $v(t,t_0')=C\dot{y}_0(t-t_0')$. Используя первое условие, получаем:

$$C\left[\dot{x}_0(0)(\lambda y_0+p_0(x_0,y_0))+\dot{y}_0(0)(\lambda x_0+q_0(x_0,y_0))\right]=$$

$$=C\left[(\lambda y_0+p_0(x_0,y_0))^2+(\lambda x_0+q_0(x_0,y_0))^2\right]=0,$$

т.е. $C=0$.

Теорема доказана.

Следующая теорема получается из теоремы 5 заменой t на $-t$.

Теорема 5^1. Пусть (x_0,y_0) произвольная, отличная от (0,0), точка на границе области G_c. Тогда существует $\varepsilon_0^->0$ такое, что для любого $|\varepsilon|<\varepsilon_0^-$ и любого t_0' существует и единственно решение $(x_\varepsilon^-(t,t_0'),y_\varepsilon^-(t,t_0'))$ системы (3.1), удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(x_\varepsilon^-(t_0',t_0')-x_0)(\lambda y_0+p_0(x_0,y_0))+(y_\varepsilon^-(t_0',t_0')-y_0)(\lambda x_0+q_0(x_0,y_0))=0;$

2. При всех $t\le t_0'$ $(x_\varepsilon^-(t,t_0'),y_\varepsilon^-(t,t_0'))$ разлагается в степенной ряд по ε, сходящийся в круге $|\varepsilon|<\varepsilon_0^-$;

3. При $\varepsilon\to 0$ $x_\varepsilon^-(t,t_0')\to x_0(t-t_0')$, а $y_\varepsilon^-(t,t_0')\to y_0(t-t_0')$, где $(x_0(t),y_0(t))$ решение системы (3.1) при $\varepsilon=0$, удовлетворяющее условиям: $x_0(0)=x_0$, $y_0(0)=y_0$;

4. $$\lim_{t\to-\infty} x_\varepsilon^-(t,t_0')=\lim_{t\to-\infty} y_\varepsilon^-(t,t_0')=0.$$

Возьмем теперь на границе области G_c произвольную, отличную от (0,0), точку (x_0,y_0) и пусть $\varepsilon_0=\min(\varepsilon_0^-,\varepsilon_0^+)$, где ε_0^+ и ε_0^- удовлетворяют теореме 5 и 5^1, соответственно. Пусть $(x_\varepsilon^+(t,t_0'),y_\varepsilon^+(t,t_0'))$ и $(x_\varepsilon^-(t,t_0'),y_\varepsilon^-(t,t_0'))$ решения системы (3.1), удовлетворяющие условиям теоремы 5 и 5^1, соответственно. Пусть

$$\Delta_\varepsilon(t_0') = -(\lambda x_0 + q_0(x_0,y_0))(x_\varepsilon^+(t_0',t_0') - x_\varepsilon^-(t_0',t_0')) +$$

$$+ (\lambda y_0 + p_0(x_0,y_0))(y_\varepsilon^+(t_0',t_0') - y_\varepsilon^-(t_0',t_0')).$$

Нетрудно убедиться, что функция $\Delta_\varepsilon(t_0')$ определена при всех t_0' и $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, аналитическая по ε в круге $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и периодическая по t_0' с периодом 2π. Возьмем теперь ε действительное. Тогда для фиксированного $\varepsilon \neq 0$ возможны следующие три случая:

1. $\Delta_\varepsilon(t_0') \leq 0$ при всех t_0';
2. $\Delta_\varepsilon(t_0') \geq 0$ при всех t_0';
3. $\Delta_\varepsilon(t_0')$ принимает значения обоих знаков.

В зависимости от того, к какому случаю принадлежат $\Delta_\varepsilon(t_0')$, расположение соответствующей ветви множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$ будет принадлежать к следующим трем типам, изображенным на рисунках 1,2 и 3 соответственно.

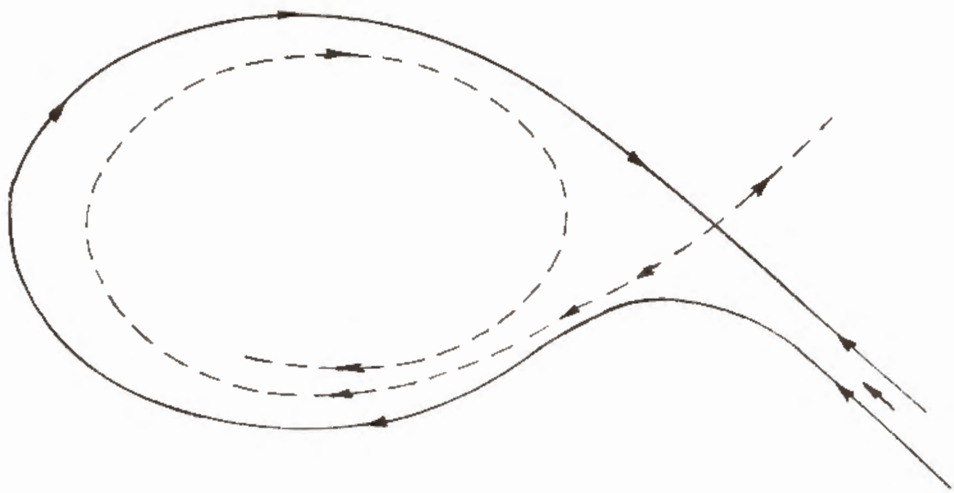


Рис. 1. $\Delta_\varepsilon(t_0') < 0$.

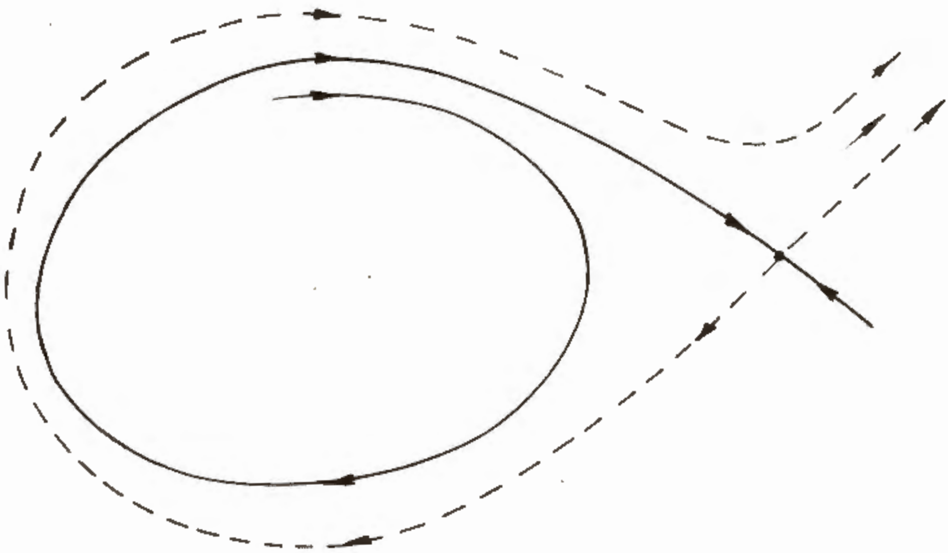


Рис. 2. $\Delta_\varepsilon(t_0') > 0$.

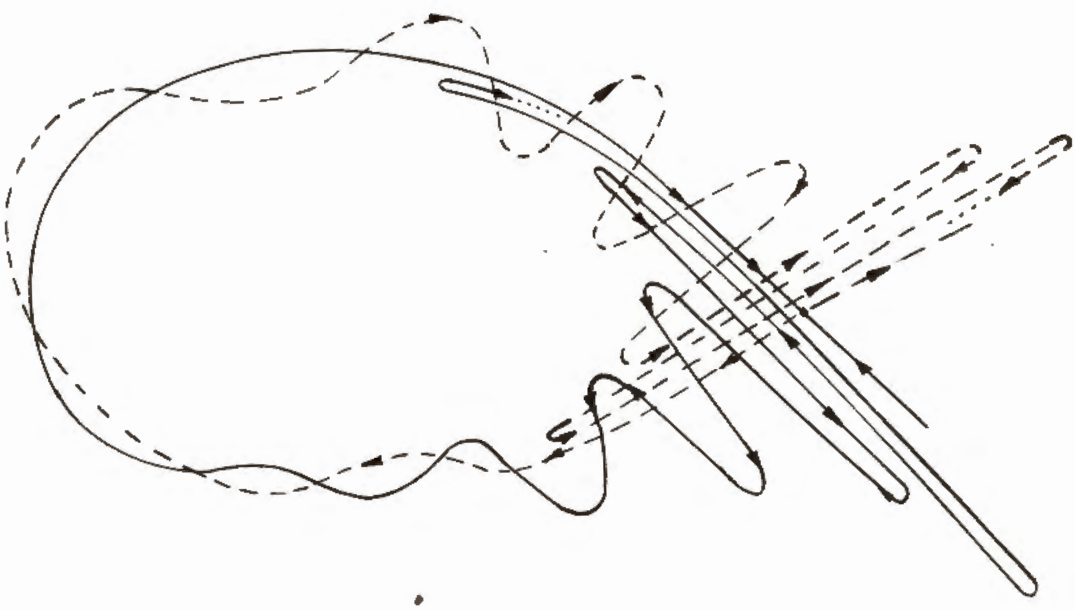


Рис. 3.

Сплошной линией на этих рисунках изображены части соответствующих ветвей множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$ для системы (3.1), пунктиром - части соответствующих ветвей множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$ для системы, получающейся из (3.1) заменой t на $-t$. Таким образом, мы обосновали метод, дающий возможность выяснить к какому типу принадлежит расположение ветвей множества $\Gamma_\varepsilon(t_0)$. После этого мы сможем получить ответы на интересующие нас вопросы, рассматривая каждый из возможных случаев расположения отдельно.

§ 6. Преобразование системы (I_0) в систему Гамильтона

В последующем изложении будет существенно использована возможность преобразования системы (I_0) в систему Гамильтона. В этом параграфе содержится доказательство этого утверждения.

Теорема 6. Существует аналитическое взаимно-однозначное отображение $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ области G_c на себя такое, что в переменных (u,v) система (I_0) будет иметь форму системы Гамильтона.

Доказательство теоремы распадается на несколько этапов, которые ради удобства выделены в самостоятельные леммы.

Лемма 19. Пусть взаимно-однозначное аналитическое отображение $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ области G_c на себя таково, что $M(x,y) = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ не обращается в нуль в области G_c и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(M(x,y) f_0(x,y)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(M(x,y) g_0(x,y)\big) = 0;$$

тогда в переменных (u,v) система (I_0) имеет форму системы Гамильтона.

Доказательство:

Пусть $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ обратное отображение. Дифференцируя выражения для x и y по t, получим:

$$x'_u \dot{u} + x'_v \dot{v} = f_0(x(u,v), y(u,v)),$$

$$y'_u \dot{u} + y'_v \dot{v} = g_0(x(u,v), y(u,v)),$$

т.е.

$$\dot u = M(x(u,v), y(u,v))\big[f_0(x(u,v), y(u,v))\, y'_v(u,v) -$$

$$- g_0(x(u,v), y(u,v))\, x'_v(u,v)\big] = \tilde f_0(u,v),$$

$$\dot v = -M(x(u,v), y(u,v))\big[f_0(x(u,v), y(u,v))\, y'_u(u,v) -$$

$$- g_0(x(u,v), y(u,v))\, x'_u(u,v)\big] = \tilde g_0(u,v).$$

Покажем, что $\dfrac{\partial \tilde f_0}{\partial u} + \dfrac{\partial \tilde g_0}{\partial v} \equiv 0$. Имеем:

$$\frac{\partial \tilde f_0}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x}(Mf_0)\, x'_u y'_v + \frac{\partial}{\partial y}(Mf_0)\, y'_u y'_v + Mf_0\, y''_{uv} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}(Mg_0)\, x'_u x'_v - \frac{\partial}{\partial y}(Mg_0)\, x'_v y'_u - Mg_0\, x''_{uv},$$

$$\frac{\partial \tilde g_0}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial x}(Mf_0)\, x'_v y'_u - \frac{\partial}{\partial y}(Mf_0)\, y'_u y'_v - Mf_0\, y''_{uv} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}(Mg_0)\, x'_u x'_v + \frac{\partial}{\partial y}(Mg_0)\, x'_u y'_v + Mg_0\, x''_{uv}.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial \tilde{f}_0}{\partial u} + \dfrac{\partial \tilde{g}_0}{\partial v} =$

$$= (x'_u y'_v - x'_v y'_u)\left(\frac{\partial}{\partial x}(M f_0) + \frac{\partial}{\partial y}(M g_0)\right) \equiv 0 .$$

Это означает, что существует аналитическая в области G_c функция $H(u,v)$ такая, что $\tilde{f}_0(u,v) = -\dfrac{\partial H}{\partial v}$, а $\tilde{g}_0(u,v) = \dfrac{\partial H}{\partial u}$.
Лемма доказана.

Лемма 20. Уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(M(x,y) f_0(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(M(x,y) g_0(x,y)\right) = 0 \qquad (6.1)$$

в области G_c имеет аналитическое решение $M(x,y) > 0$ такое, что $\iint\limits_{G_c} M(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G_c} dx\, dy$.

Доказательство:

Возьмем на границе области G_c произвольную, отличную от (x_s, y_s) точку (x_0, y_0) и для определенности предположим, что вектор ($g_0(x_0,y_0)$, $-f_0(x_0,y_0)$), будучи проведен из точки (x_0, y_0), направлен внутрь области G_c. Пусть $(\alpha(\xi), \beta(\xi))$ решение системы

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = g_0(\alpha,\beta) \quad , \quad \frac{d\beta}{d\xi} = - f_0(\alpha,\beta)$$

со следующими условиями: $\alpha(0) = x_0$, $\beta(0) = y_0$. Путем элементарных рассуждений устанавливается, что при $\xi \geqslant 0$ решение ($\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$) пересекает каждую траекторию системы (I_0), лежащую в области G_c, только один раз; при $\xi \to \infty$ $\alpha(\xi) \to x_c$, $\beta(\xi) \to y_c$. Пусть $(x_0(t,x,y)$, $y_0(t,x,y))$ решение системы (I_0), удовлетворяющее условиям: $x_0(0,x,y) = x$, $y_0(0,x,y) = y$.
Определим в области G_c две функции $\tau(x,y)$ и $\xi(x,y)$ так, чтобы они удовлетворяли следующим уравнениям:

$$\mathcal{F}(\tau, x, y, \xi) = x_0(\tau, x, y) - \alpha(\xi) = 0,$$
$$\mathcal{G}(\tau, x, y, \xi) = y_0(\tau, x, y) - \beta(\xi) = 0. \tag{6.2}$$

Нетрудно видеть, что с помощью уравнений (6.2) $\tau(x,y)$ можно определить лишь с точностью до целого кратного периоду решения $(x_0(t,x,y), y_0(t,x,y))$. С другой стороны, мы сейчас покажем, что каждая ветвь функции $\tau(x,y)$ вместе с функцией $\xi(x,y)$ будут аналитическими функциями x и y в окрестности любой точки области G_c, отличной от точки (x_c, y_c). С этой целью воспользуемся теоремой о неявных функциях (см. [7], стр. 80-85). Для ее применимости необходимо, чтобы функции $\mathcal{F}(\tau, x, y, \xi)$ и $\mathcal{G}(\tau, x, y, \xi)$ были аналитическими по переменным τ, x, y, ξ и чтобы якобиан $\frac{\partial(\mathcal{F},\mathcal{G})}{\partial(\tau,\xi)}$ в точке пересечения траекторий $(x_0(t,x,y), y_0(t,x,y))$ и $(\alpha(\xi), \beta(\xi))$ был отличен от нуля (что такая точка пересечения всегда существует, было отмечено раньше). Аналитичность функций $\mathcal{F}(\tau, x, y, \xi)$ и $\mathcal{G}(\tau, x, y, \xi)$ следует из известных теорем из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычислим величину якобиана. Нетрудно проверить, что в точке пересечения

$$\frac{\partial(\mathcal{F},\mathcal{G})}{\partial(\tau,\xi)} = \begin{vmatrix} f_0(\alpha,\beta) & g_0(\alpha,\beta) \\ -g_0(\alpha,\beta) & f_0(\alpha,\beta) \end{vmatrix}$$

и, следовательно, всюду в области G_c, за исключением точки (x_c, y_c), $\frac{\partial(\mathcal{F},\mathcal{G})}{\partial(\tau,\xi)} \neq 0$. Значит, теорема о неявных функпиях применима и утверждение доказано.

В дальнейшем нам потребуются уравнения, которым удовлетворяют функции $\tau(x,y)$ и $\xi(x,y)$. Для этого возьмем приращение, получаемое этими функциями в результате сдвига точки (x,y) по траектории системы (I_0), проходящей через точку (x,y), за время Δt. В результате получаем:

$$\tau(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - \tau(x(t), y(t)) = -\Delta t,$$
$$\xi(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - \xi(x(t), y(t)) = 0.$$

Поделим полученные равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В итоге получим:

$$\tau'_x(x,y)\, f_0(x,y) + \tau'_y(x,y)\, g_0(x,y) = -1,$$
$$\xi'_x(x,y)\, f_0(x,y) + \xi'_y(x,y)\, g_0(x,y) = 0.$$

Пусть $(x_0(t,\xi),\ y_0(t,\xi))$ решение системы (I_0), выходящее при $t=0$ из точки $(x_0=\alpha(\xi), y_0=\beta(\xi))$.

Положим $M_1(x,y) =$

$$= \exp\Big(\int_0^{\tau(x,y)} \{ f'_{0x}(x_0(-t,\xi(x,y)), y_0(-t,\xi(x,y))) + g'_{0y}(x_0(-t,\xi(x,y)), y_0(-t,\xi(x,y)))\}\, dt\Big).$$

Непосредственно видно, что $M_1(x,y) > 0$ всюду в области G_c и всюду в области G_c удовлетворяет уравнению (6.1). Из леммы 1 следует, что значение $M_1(x,y)$ в точке (x,y) определено однозначно. Из определения видно, что $M_1(x,y)$ будет аналитической функцией в любой точке области G_c, кроме, может быть, точки (x_c, y_c), в которой она, очевидно, непрерывна. Покажем, что $M_1(x,y)$ непрерывно продолжается на границу области G_c и не обращается на ней в нуль. Для любой точки границы, отличной от (x_s, y_s), справедливость утверждения легко следует из определения $M_1(x,y)$; для точки (x_s, y_s) утверждение доказывается с помощью леммы 2.

Положим
$$M_0(x,y) = \frac{1}{T(x,y)} \int_0^{T(x,y)} M_1(x_0(t,x,y), y_0(t,x,y))\, dt,$$

где $T(x,y)$ – период решения $(x_0(t,x,y),\ y_0(t,x,y))$ системы (I_0), выходящего при $t=0$ из точки (x,y). Так как $T(x,y)$ в области G_c зависит от x и y аналитически (см. /13/, стр. 166–171), то

$M_0(x,y)$ также будет аналитической функцией x и y всюду в области G_c за исключением, может быть, точки (x_c, y_c), в которой она непрерывна. $M_0(x,y)$ непрерывно продолжается на границу области G_c и не обращается на ней в нуль. $M_0(x,y)$ постоянна на любой траектории системы (I_0), лежащей в области G_c, следовательно, она удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial M_0(x,y)}{\partial x} f_0(x,y) + \frac{\partial M_0(x,y)}{\partial y} g_0(x,y) = 0 .$$

Используя этот факт, нетрудно проверить, что $M(x,y) = M_1(x,y) : M_0(x,y)$ удовлетворяет уравнению (6.1). Покажем, что $M(x,y)$ зависит аналитически от x и y в точке (x_c, y_c). С этой целью возьмем какое-нибудь аналитическое в окрестности точки (x_c, y_c) решение $\widetilde{M}_1(x,y)$ уравнения (6.1) такое, что $\widetilde{M}_1(x_c, y_c) = 1$. То, что такое решение существует, доказано в /14/. Пусть далее

$$\widetilde{M}_0(x,y) = \frac{1}{T(x,y)} \int_0^{T(x,y)} \widetilde{M}_1(x_0(t,x,y), y_0(t,x,y))\, dt$$

и $$\widetilde{M}(x,y) = \widetilde{M}_1(x,y) : \widetilde{M}_0(x,y) .$$

Так как $T(x,y)$ является аналитической функцией x и y в некоторой окрестности точки (x_c, y_c), то $\widetilde{M}_0(x,y)$, а следовательно, и $\widetilde{M}(x,y)$ будут аналитическими функциями x и y в некоторой окрестности точки (x_c, y_c). Покажем, что $M(x,y) \equiv \widetilde{M}(x,y)$. Действительно, нетрудно проверить, что $N(x,y) = M(x,y) : \widetilde{M}(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} f_0(x,y) + \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} g_0(x,y) = 0.$$

Это означает, что $N(x,y)$ постоянна на каждой траектории, лежащей в достаточно малой окрестности точки (x_c, y_c). По построению на каждой траектории, лежащей в достаточно малой окрестности точки (x_c, y_c),

$$\int\limits_0^{T(x,y)} M(x_0(t,x,y),y_0(t,x,y))\,dt \equiv \int\limits_0^{T(x,y)} \widetilde{M}(x_0(t,x,y),y_0(t,x,y))\,dt,$$

что было бы невозможно, если бы в этой окрестности на какой-нибудь траектории $N(x,y)$ была бы отлична от единицы. Следовательно, $M(x,y)$ аналитична всюду в области G_c.

Из того факта, что $M(x,y)$ непрерывна всюду в замкнутой области G_c следует, что $\iint\limits_{G_c} M(x,y)\,dx\,dy < \infty$. Следовательно, умножением на подходящим образом выбранную константу мы получим новую функцию $M(x,y)$ такую, что $\iint\limits_{G_c} M(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_c} dx\,dy$.

Лемма доказана.

Лемма 21. Пусть даны ограниченная замкнутой кривой Жордана одно - связная область G_c и определенная в этой области аналитическая функция $M(x,y) > 0$ такая, что, во-первых, $M(x,y)$ продолжается непрерывно на границу области G_c, а во-вторых, $\iint\limits_{G_c} M(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_c} dx\,dy$. Тогда существует аналитическое взаимно-однозначное отображение $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ области G_c на себя такое, что $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = M(x,y)$.

Доказательство:

Пусть $z = x + iy$ и пусть $w = f(z)$ конформное отображение области G_c на квадрат $0 < \operatorname{Re} f(z) < 1$, $0 < \operatorname{Im} f(z) < 1$; такое отображение существует по теореме Римана (см. [15], стр. 27-34). В силу теоремы Каратеодори (см. [15], стр. 49-50) $f(z)$ продолжается непрерывно на границу области G_c, причем соответствие между точками границы области G_c и точками границы квадрата будет взаимно-однозначным. Таким образом, мы получили непрерывную в замкнутом квадрате $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$ функцию $M(p,q) = M(x(p,q),y(p,q))$; $p = \operatorname{Re} f(z)$, $q = \operatorname{Im} f(z)$, а $x = x(p,q)$, $y = y(p,q)$ отображение, обратное к $f(z)$. Легко проверить, что $\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2$. Так как отображение $f(z)$ конформное, то $f'(z)$ не обращается в нуль в области G_c, следовательно, $\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)}$ также не обращается в нуль.

Определим теперь аналитическое взаимно-однозначное отображение квадрата $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$ на себя с помощью формул:

$$\alpha_M = \frac{\displaystyle\int_0^p \frac{M(x(\bar p,q),\, y(\bar p,q))}{|f'(x(\bar p,q)+i\,y(\bar p,q))|^2}\, d\bar p}{\displaystyle\int_0^1 \frac{M(x(p,q),\, y(p,q))}{|f'(x(p,q)+i\,y(p,q))|^2}\, dp},$$

$$\beta_M = \frac{\displaystyle\int_0^q\int_0^1 \frac{M(x(p,\bar q),\, y(p,\bar q))}{|f'(x(p,\bar q)+i\,y(p,\bar q))|^2}\, dp\, d\bar q}{\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{M(x(p,q),\, y(p,q))}{|f'(x(p,q)+i\,y(p,q))|^2}\, dp\, dq}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial(\alpha_M,\beta_M)}{\partial(p,q)} = \frac{M(x(p,q),\, y(p,q))}{|f'(x(p,q)+i\,y(p,q))|^2}\cdot\frac{1}{\iint\limits_{G_c} M(x,y)\,dx\,dy}.$$

Определим взаимно-однозначное отображение $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ замкнутой области G_c на единичный квадрат $0 \le \xi \le 1$, $0 \le \eta \le 1$, как суперпозицию отображения $W = f(z)$ и отображения $\alpha_1 = \alpha_1(p,q)$, $\beta_1 = \beta_1(p,q)$, которое получается из (α_M, β_M) при $M(x,y) \equiv 1$; пусть $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$ – обратное отображение. Нетрудно проверить, что $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \iint\limits_{G_c} dx\,dy$. Пусть, наконец, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ есть суперпозиция отображения $W = f(z)$, отображения $\alpha_M = \alpha_M(x,y)$, $\beta_M = \beta_M(x,y)$ и отображения $x = x(\xi,\eta)$,

$y = y(\xi, \eta)$. Нетрудно проверить, что полученное отображение удовлетворяет всем требованиям леммы. Лемма доказана.

§ 7. Периодические решения системы (I_ε); решения системы (I_ε), асимптотические к периодическим и образуемые ими "каналы"

В настоящем параграфе нас будут интересовать периодические и асимптотические к периодическим решениям системы (I_ε). Как будет видно из последующего, этот класс решений играет важную роль в структуре областей, из которых выходят колеблющиеся решения. Из соображений удобства мы будем изучать этот вопрос для системы:

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x, y, t, \varepsilon),$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x, y, t, \varepsilon), \qquad (\overline{II}_\varepsilon)$$

где $H = H(x, y)$ аналитическая функция x и y, а функции $f(x, y, t, \varepsilon)$ и $g(x, y, t, \varepsilon)$ аналитические по x, y и ε, непрерывно дифференцируемые по t и периодические по t с периодом 2π (согласно теореме 6 к такому виду может быть приведена система (I_ε) с помощью аналитической замены переменных).

В дальнейшем нам потребуются некоторые понятия, возникающие при рассмотрении системы $(\overline{II}_0)$ (система $(\overline{II}_0)$ получается из системы $(\overline{II}_\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$). Для системы $(\overline{II}_0)$ $H(x, y)$ есть первый интеграл, т.е. $H(x, y)$ постоянно на каждой траектории системы $(\overline{II}_0)$. Нетрудно проверить, что при наших предположениях всюду в области G_c, кроме точки (x_c, y_c), $\frac{dH}{dn} \neq 0$ ($\frac{dH}{dn}$ в точке (x, y) означает производную по нормали к траектории системы $(\overline{II}_0)$, проходящей через точку (x, y)). Действительно,

$$\frac{dH}{dn} = \frac{d}{ds} H\left(x + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{s}{|\operatorname{grad} H|},\ y + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{s}{|\operatorname{grad} H|}\right)$$

при $S = 0$, т.е. $\frac{dH}{dn} = |\operatorname{grad} H| \neq 0$. Таким образом, задание H однозначно определяет в области G_c единственное (с точностью до сдвига по t) решение $(x_0(t,H), y_0(t,H))$ системы $(\overline{\underline{II}}_0)$ такое, что $H(x_0(t,H), y_0(t,H)) \equiv H$.

Пусть $T(H)$ период решения $(x_0(t,H), y_0(t,H))$, а $H_{m,n}$ удовлетворяет уравнению: $T(H_{m,n}) = 2\pi \frac{m}{n}$. Хорошо известна следующая теорема Пуанкаре (см., например,[13] стр. 175-193): пусть $(x_0(t, H_{m,n}), y_0(t, H_{m,n}))$ периодическое с периодом $2\pi \frac{m}{n}$ решение системы $(\overline{\underline{II}}_0)$ и пусть $T'(H) \neq 0$ при $H = H_{m,n}$; тогда для каждого простого корня уравнения:

$$P_1(\tau) = \int_0^{2m\pi} \{ f(x_0(t+\tau, H_{m,n}), y_0(t+\tau, H_{m,n}), t, 0)\, \dot{y}_0(t+\tau, H_{m,n}) -$$

$$- g(x_0(t+\tau, H_{m,n}), y_0(t+\tau, H_{m,n}), t, 0)\, \dot{x}_0(t+\tau, H_{m,n}) \} dt = 0$$

существует единственное аналитическое по ε в некотором круге $|\varepsilon| < \varepsilon_p$ периодическое с периодом $2m\pi$ решение $(x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K), y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K))$ системы $(\overline{\underline{II}}_\varepsilon)$, такое, что при $\varepsilon \to 0$

$$x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K) \to x_0(t+\tau_K, H_{m,n}),\ y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K) \to y_0(t+\tau_K, H_{m,n}),$$

где τ_K соответствующий корень уравнения $P_1(\tau) = 0$. На основании этой теоремы периодическое решение $(x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K), y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K))$ системы $(\overline{\underline{II}}_\varepsilon)$ может быть получено в виде рядов:

$$x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K) = x_0(t+\tau_K, H_{m,n}) + \sum_{p=1}^{\infty} x_p(t, H_{m,n}, \tau_K)\, \varepsilon^p, \tag{7.1}$$

$$y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_\kappa) = y_0(t+\tau_\kappa, H_{m,n}) + \sum_{p=1}^{\infty} y_p(t, H_{m,n}, \tau_\kappa)\,\varepsilon^p,$$

где $(x_p(t, H_{m,n}, \tau_\kappa), y_p(t, H_{m,n}, \tau_\kappa))$ при $p \geq 1$ есть периодическое с периодом $2m\pi$ решение системы:

$$\dot{x}_p = -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} x_p - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} y_p + f_p(t, x_0(t+\tau_\kappa, H_{m,n}), \dots, y_{p-1}(t, H_{m,n}, \tau_\kappa))$$

$$\dot{y}_p = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} x_p + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} y_p + g_p(t, x_0(t+\tau_\kappa, H_{m,n}), \dots, y_{p-1}(t, H_{m,n}, \tau_\kappa)). \tag{7.2}$$

А.М.Кацем[16] рассмотрен случай, когда функции

$$P_s(\tau) = \int_0^{2m\pi} \{ f_s(t, x_0(t+\tau, H_{m,n}), \dots, y_{s-1}(t, H_{m,n}, \tau))\, \dot{y}_0(t+\tau, H_{m,n}) -$$

$$- g_s(t, x_0(t+\tau, H_{m,n}), \dots, y_{s-1}(t, H_{m,n}, \tau))\, \dot{x}_0(t+\tau, H_{m,n}) \}\, dt$$

равны тождественно нулю для $s = 1, 2, \dots, r$. В этом случае процедура нахождения периодического решения, описанная в [13], неприменима. А.М.Кац показал, что если $P_s(\tau) \equiv 0$ для $s = 1, 2, \dots, r$, а $P_{r+1}(\tau) \not\equiv 0$, то для каждого простого корня уравнения $P_{r+1}(\tau) = 0$ могут быть построены формальные ряды вида (7.1). Однако, сходимость, полученных рядов им не доказана. Исходя из этого, в дальнейшем мы будем всюду предполагать, что $P_1(\tau) \not\equiv 0$. Не желая усложнять доказательства второстепенными трудностями, мы будем в дальнейшем предполагать, что все корни уравнения $P_1(\tau) = 0$ простые. Однако, при желании некоторые основные результаты этого параграфа могут быть доказаны и без этого ограничения.

Пусть $(x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K), y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K))$ периодическое с периодом $2m\pi$ решение системы $(\underline{II}_\varepsilon)$, полученное с помощью теоремы Пуанкаре. Сделаем в системе $(\underline{II}_\varepsilon)$ замену: $x = x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K) + u$, $y = y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_K) + v$. В результате замены получим систему для определения (u, v):

$$\dot{u} = \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \varepsilon f'_x\right) u + \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \varepsilon f'_y\right) v + P(t, u, v, \varepsilon),$$
$$\dot{v} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \varepsilon g'_x\right) u + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \varepsilon g'_y\right) v + Q(t, u, v, \varepsilon), \tag{7.3}$$

где $P(t, u, v, \varepsilon)$ и $Q(t, u, v, \varepsilon)$ аналитические функции u, v, ε, непрерывные и периодические с периодом $2m\pi$ по t; разложение функций $P(t, u, v, \varepsilon)$ и $Q(t, u, v, \varepsilon)$ в ряд по степеням u и v не содержит членов первого порядка. Отбросив в системе (7.3) нелинейные члены по u и v, получим следующую линейную систему с периодическими коэффициентами:

$$\dot{u} = \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \varepsilon f'_x\right) u + \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \varepsilon f'_y\right) v,$$
$$\dot{v} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \varepsilon g'_x\right) u + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \varepsilon g'_y\right) v. \tag{7.4}$$

Как известно /13/, такая система имеет фундаментальную систему решений вида:

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t} \xi_1(t), \quad v_1(t) = e^{\lambda_1 t} \eta_1(t),$$
$$u_2(t) = e^{\lambda_2 t} \xi_2(t), \quad v_2(t) = e^{\lambda_2 t} \eta_2(t),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \xi_1(t), \xi_2(t), \eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ будут аналитическими функциями $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, причем, функции $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ -периодические по t с периодом $2m\pi$. В дальнейшем нам потребуются несколько первых членов разложения функций λ_1, λ_2, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ в ряд по степеням μ. Для того, чтобы найти их, сделаем в системе (7.4) замену: $u=e^{\lambda t}\xi$, $v=e^{\lambda t}\eta$. После замены получим систему для определения периодических функций ξ и η:

$$\dot{\xi} = \left(-\lambda - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \varepsilon f'_x\right)\xi + \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \varepsilon f'_y\right)\eta,$$
$$\dot{\eta} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \varepsilon g'_x\right)\xi + \left(-\lambda + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \varepsilon g'_y\right)\eta. \tag{7.5}$$

Будем искать решение в виде:

$$\xi_\mu(t) = \xi_0(t) + \mu\xi_1(t) + \mu^2\xi_2(t) + \ldots,$$
$$\eta_\mu(t) = \eta_0(t) + \mu\eta_1(t) + \mu^2\eta_2(t) + \ldots,$$
$$\lambda_\mu = \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \ldots,$$

где $(\xi_i(t), \eta_i(t))$ периодические с периодом $2m\pi$ функции t. Подставив в (7.5), получим следующие три пары уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\xi_0 - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\eta_0, \\ \eta_0 &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\xi_0 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\eta_0; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\xi_1 - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\eta_1 - \lambda_1 \xi_0 ,\\
\dot{\eta}_1 &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\xi_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\eta_1 - \lambda_1 \eta_0 ;
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\xi}_2 &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\xi_2 - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\eta_2 - \lambda_1 \xi_1 + \Big(-\lambda_2 - \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y}x_1 - \\
&\quad - \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2}y_1 + f'_x\Big)\xi_0 + \Big(-\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2}x_1 - \frac{\partial^3 H}{\partial y^3}y_1 + f'_y\Big)\eta_0 ,\\
\dot{\eta}_2 &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\xi_2 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\eta_2 - \lambda_1 \eta_1 + \Big(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3}x_1 + \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y}y_1 + \\
&\quad + g'_x\Big)\xi_0 + \Big(-\lambda_2 + \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y}x_1 + \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2}y_1 + g'_y\Big)\eta_0 .
\end{aligned}\right\}$$

Из первой пары уравнений получаем, что $\xi_0(t) = \dot{x}_0(t+\tau_K,\, H_{m,n})$, $\eta_0(t) = \dot{y}_0(t+\tau_K,\, H_{m,n})$.

Для того, чтобы найти периодическое решение второй пары уравнений воспользуемся следующим фактом. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 1, нетрудно убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial H} x_0(t,H) = p(t,H) - t\,\frac{T'(H)}{T(H)}\,\dot{x}_0(t,H) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial H} y_0(t,H) = q(t,H) - t\,\frac{T'(H)}{T(H)}\,\dot{y}_0(t,H)\,,$$

где $p(t,H)$ и $q(t,H)$ периодические с периодом $T(H)$ функции t. Пользуясь тем, что $\frac{\partial}{\partial H} x_0(t,H)$ и $\frac{\partial}{\partial H} y_0(t,H)$ являются решением системы в вариациях, без труда находим, что $p(t,H)$ и $q(t,H)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\dot{p} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} p - \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} q + \frac{T'(H)}{T(H)}\,\dot{x}_0(t,H)\,,$$

$$\dot{q} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} p + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} q + \frac{T'(H)}{T(H)}\,\dot{y}_0(t,H)\,.$$

Сравнивая вторую пару уравнений с полученной системой, получаем, что

$$\xi_1(t) = -\lambda_1 \frac{T(H_{m,n})}{T'(H_{m,n})}\, p(t+\tau_K, H_{m,n})\,,$$

$$\eta_1(t) = -\lambda_1 \frac{T(H_{m,n})}{T'(H_{m,n})}\, q(t+\tau_K, H_{m,n})\,,$$

где λ_1 пока еще неопределенно. Определим его их условия существования периодического решения у третьей пары уравнений. Это условие, как нетрудно убедиться, имеет вид:

$$\int_0^{2m\pi} \Big\{ \Big[-\lambda_1 \xi_1(t) + \Big(-\lambda_2 - \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y}\, x_1(t, H_{m,n}, \tau_K) -$$

$$-\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2} y_1(t, H_{m,n}, \tau_K) + f'_x \Big) \xi_0(t) + \Big(-\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2} x_1(t, H_{m,n}, \tau_K) -$$

$$-\frac{\partial^3 H}{\partial y^3} y_1(t, H_{m,n}, \tau_K) + f'_y \Big) \eta_0(t) \Big] \dot{y}_0(t+\tau_K, H_{m,n}) -$$

$$-\Big[-\lambda_1 \eta_1(t) + \Big(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} x_1(t, H_{m,n}, \tau_K) + \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y} y_1(t, H_{m,n}, \tau_K) +$$

$$+ g'_x \Big) \xi_0(t) + \Big(-\lambda_2 + \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y} x_1(t, H_{m,n}, \tau_K) +$$

$$+ \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2} y_1(t, H_{m,n}, \tau_K) + g'_y \Big) \eta_0(t) \Big] \dot{x}_0(t+\tau_K, H_{m,n}) \Big\} dt = 0.$$

Заменив $\xi_0(t)$, $\eta_0(t)$, $\xi_1(t)$ и $\eta_1(t)$ ранее найденными выражениями, мы можем записать наше условие в следующем виде:

$$\lambda_1^2 \frac{T}{T'} \int_0^{2m\pi} \big[q(t+\tau_K, H_{m,n}) \dot{x}_0(t+\tau_K, H_{m,n}) - p(t+\tau_K, H_{m,n}) \dot{y}_0(t+\tau_K, H_{m,n})\big] dt +$$

$$+ \int_0^{2m\pi} \big[(g'_x \dot{x}_0 + g'_y \dot{y}_0) \dot{x}_0 - (f'_x \dot{x}_0 + f'_y \dot{y}_0) \dot{y}_0\big] dt +$$

$$+ \int_0^{2m\pi} \Big\{ \Big[\Big(\frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \dot{x}_0 + \frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y} \dot{y}_0\Big) x_1 + \Big(\frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y} \dot{x}_0 + \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2} \dot{y}_0\Big) y_1\Big] \dot{x}_0 +$$

$$+ \Big[\Big(\frac{\partial^3 H}{\partial x^2 \partial y} \dot{x}_0 + \frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2} \dot{y}_0\Big) x_1 + \Big(\frac{\partial^3 H}{\partial x \partial y^2} \dot{x}_0 + \frac{\partial^3 H}{\partial y^3} \dot{y}_0\Big) y_1\Big] \dot{y}_0 \Big\} dt = 0$$

Проинтегрируем по частям члены, содержащие $x_1(t)$ и $y_1(t)$. Пользуясь тем, что $x_1(t)$ и $y_1(t)$ имеют период, равный $2m\pi$, получим:

$$\lambda_1^2 \frac{T}{T'} \int_0^{2m\pi} (q\dot{x}_0 - p\dot{y}_0)\,dt +$$

$$+ \int_0^{2m\pi} [(g'_x \dot{x}_0 + g'_y \dot{y}_0)\dot{x}_0 - (f'_x \dot{x}_0 + f'_y \dot{y}_0)\dot{y}_0]\,dt -$$

$$- \int_0^{2m\pi} [(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} x_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} y_1)\ddot{x}_0 + (\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} x_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} y_1)\ddot{y}_0 +$$

$$+ (\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \dot{x}_0 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \dot{y}_0)\dot{x}_1 + (\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \dot{x}_0 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \dot{y}_0)\dot{y}_1]\,dt = 0.$$

Заменив теперь $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} x_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} y_1$ на $\dot{y}_1 - g$,

$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} x_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} y_1$ на $-\dot{x}_1 + f$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \dot{x}_0 + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \dot{y}_0$

на $\ddot{y}_0$ и $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \dot{x}_0 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \dot{y}_0$ на $-\ddot{x}_0$.

После приведения подобных членов получим: $\lambda_1^2 \frac{T}{T'} \int_0^{2m\pi} (q\dot{x}_0 - p\dot{y}_0)\,dt =$

$$= \int_0^{2m\pi} [(f'_x \dot{x}_0 + f'_y \dot{y}_0)\dot{y}_0 + f\ddot{y}_0 - (g'_x \dot{x}_0 + g'_y \dot{y}_0)\dot{x}_0 - g\ddot{x}_0]\,dt =$$

$$= \frac{d}{d\tau} \int_0^{2m\pi} \{ f(x_0(t+\tau, H_{m,n}), y_0(t+\tau, H_{m,n}), t, 0)\, \dot{y}_0(t+\tau, H_{m,n}) -$$

$$- g(x_0(t+\tau, H_{m,n}), y_0(t+\tau, H_{m,n}), t, 0)\, \dot{x}_0(t+\tau, H_{m,n}) \} dt$$

при $\tau = \tau_K$. Как нетрудно проверить, $q(t)\,\dot{x}_0(t) - p(t)\,\dot{y}_0(t) \equiv -1$. Следовательно, $\lambda_1^2 = -\frac{T'}{2m\pi T} P_1'(\tau_K)$.

Сделаем теперь в системе (7.3) замену: $u = \xi_1(t)\varphi + \xi_2(t)\psi$, $v = \eta_1(t)\varphi + \eta_2(t)\psi$. Используя уравнения (7.5), нетрудно показать, что (φ, ψ) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\dot{\varphi} = \lambda_1 \varphi + [P(t, \xi_1(t)\varphi + \xi_2(t)\psi, \eta_1(t)\varphi + \eta_2(t)\psi, \mu^2)\, \eta_2(t) -$$

$$- Q(t, \xi_1(t)\varphi + \xi_2(t)\psi, \eta_1(t)\varphi + \eta_2(t)\psi, \mu^2)\, \xi_2(t)] \cdot \frac{1}{W(t,\mu)},$$

$$\dot{\psi} = \lambda_2 \psi + [-P(t, \xi_1(t)\varphi + \xi_2(t)\psi, \eta_1(t)\varphi + \eta_2(t)\psi, \mu^2)\, \eta_1(t) +$$

$$+ Q(t, \xi_1(t)\varphi + \xi_2(t)\psi, \eta_1(t)\varphi + \eta_2(t)\psi, \mu^2)\, \xi_1(t)] \cdot \frac{1}{W(t,\mu)},$$

где

$$W(t,\mu) = \begin{vmatrix} \xi_1(t,\mu) & \xi_2(t,\mu) \\ \eta_1(t,\mu) & \eta_2(t,\mu) \end{vmatrix}.$$

Используя явные выражения для $\xi_i(t,\mu)$, $\eta_i(t,\mu)$, нетрудно убедиться, что $W(t,\mu) = -2\lambda \frac{T}{T'}\mu + \ldots$, где $\lambda = \left(-\frac{T'}{2m\pi T} P_1'(\tau_K)\right)^{\frac{1}{2}}$ (многоточием обозначены члены более высокого порядка по μ). Таким образом, получаем, что (φ,ψ) удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{\varphi} = \lambda_1 \dot{\varphi} + \frac{1}{\mu} R(t,\varphi,\psi,\mu),$$

$$\dot{\psi} = \lambda_2 \psi + \frac{1}{\mu} S(t,\varphi,\psi,\mu),$$

где $R(t,\varphi,\psi,\mu)$ и $S(t,\varphi,\psi,\mu)$ аналитические функции φ , ψ и μ в окрестности точки $\varphi=\psi=\mu=0$, периодические по t с периодом $2m\pi$; разложение функций $R(t,\varphi,\psi,\mu)$ и $S(t,\varphi,\psi,\mu)$ в ряд по степеням φ и ψ не содержит членов первого порядка. Сделаем, наконец, замену: $\varphi = \mu\delta u$, $\psi = \mu\delta v$, $t = \frac{\sigma}{\mu} + t'$ $(\mu > 0)$. Окончательно получим:

$$\frac{du}{d\sigma} = \lambda u + A\left(t' + \frac{\sigma}{\mu}, u, v, \mu, \delta\right),$$

$$\frac{dv}{d\sigma} = -\lambda v + B\left(t' + \frac{\sigma}{\mu}, u, v, \mu, \delta\right), \tag{7.6}$$

где $\lambda = \sqrt{-\frac{T'}{2m\pi T} P_1'(\tau_K)}$, функции $A(t,u,v,\mu,\delta)$ и $B(t,u,v,\mu,\delta)$ аналитические по u , v , μ , δ и периодические по t' с периодом $2m\pi$; $A(t,u,v,0,0) = B(t,u,v,0,0) = A(t,0,0,\mu,\delta) = B(t,0,0,\mu,\delta) \equiv 0$.
В зависимости от знака произведения $T'(H_{m,n}) P_1'(\tau_K)$ λ будет либо действительным, либо чисто мнимым. В первом случае с помощью поворота системы координат на угол, равный $-\frac{\pi}{4}$, система (7.6) приводится к системе типа (3.2) с той только разницей, что в полученной системе независимое переменное

σ входит в виде произведения с большим сомножителем $\frac{1}{\mu}$. Тем не менее теорема 3 к полученной системе применима и, следовательно, для любого достаточно малого $\mu > 0$ существует два однопараметрических семейства решений $(u_\mu(\sigma, t'), v_\mu(\sigma, t'))$ системы (7.5) таких, что $|u_\mu(\sigma, t')| + |v_\mu(\sigma, t')| \to 0$ при $\sigma \to \infty$. Таким образом, доказано, что в этом случае система $(\overline{II}_\varepsilon)$ имеет два однопараметрических семейства решений, асимптотически приближающихся к решению $(x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_\kappa), y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_\kappa))$ при $t \to \infty$, и два однопараметрических семейства решений, асимвтотически приближающихся к решению $(x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_\kappa), y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_\kappa))$ при $t \to -\infty$. Во втором случае (т.е., когда λ чисто мнимое) решение $(u_\mu(\sigma, t'), v_\mu(\sigma, t'))$ системы (7,5), вышедшее при $\sigma = 0$ из достаточно малой окрестности точки (0,0) будет колеблющимся относительно точки (0,0) на сколь угодно большом промежутке $[0, \sigma_1]$. Таким образом, вследствие того, что в соседних корнях уравнения $P_1(\tau) = 0$ $P_1'(\tau_\kappa)$ имеет противоположные знаки, при изменении τ от нуля до $2m\pi$, мы получим перемежающуюся последовательность периодических решений первого и второго типа, причем все решения этой последовательности распадаются на группы по m решений так, что любое решение каждой группы получается из какого-нибудь одного решения этой группы сдвигом по t на $2k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$.

Обозначим через $\gamma_\mu(t_0)$ множество точек на плоскости (x_0, y_0) таких, что выходящие из них при $t = t_0$ решения системы $(\overline{II}_\varepsilon)$ будут при $t \to \infty$ асимптотически приближаться к периодическим решениям первого типа. Мы займемся сейчас выяснением вопроса о расположении ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$, ибо как станет ясно из последующего, в структуре областей, из которых выходят колеблющиеся решения, расположение ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ играет решающую роль.

Для облегчения дальнейших рассуждений нам удобно в системе $(\overline{II}_\varepsilon)$ заменить переменные (x, y) на переменные (H, τ), где $\tau = \tau(x, y)$ определяется следующим образом. Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) на кривой, определяемой уравнением $H(x, y) = H_{m,n}$, и пусть $(\alpha(\xi), \beta(\xi))$ решение системы:

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \frac{\partial H}{\partial \beta}$$

со следующими начальными условиями: $\alpha(0) = x_0$, $\beta(0) = y_0$. Пусть далее $(x_0(t,\xi), y_0(t,\xi))$ решение системы (II_0) со следующими начальными условиями: $x_0(0,\xi) = \alpha(\xi)$, $y_0(0,\xi) = \beta(\xi)$; тогда $\tau(x,y)$ равно моменту времени, за которое решение $(x_0(t,\xi), y_0(t,\xi))$, проходящее через точку (x,y), выйдя при $t=0$ из точки $(\alpha(\xi), \beta(\xi))$, попадет в точку (x,y); этим определением $\tau(x,y)$, очевидно, определена с точностью до целого кратного периоду решения $(x_0(t,\xi), y_0(t,\xi))$. Как и раньше, нетрудно убедиться, что существует $\Delta H > 0$ такое, что в окрестности каждой точки (x,y) из полосы $H_{m,n} - \Delta H < H(x,y) < H_{m,n} + \Delta H$ $\tau(x,y)$ есть аналитическая функция, удовлетворяющая уравнению:

$$-\tau'_x(x,y)H'_y(x,y) + \tau'_y(x,y)H'_x(x,y) = 1.$$

Запишем теперь уравнения движения в переменных (H,τ). С учетом $(\mathrm{II}_\varepsilon)$ имеем:

$$\dot{H} = \varepsilon(H'_x f + H'_y g),$$
$$\dot{\tau} = 1 + \varepsilon(\tau'_x f + \tau'_y g). \tag{7.7}$$

Возьмем произвольную точку (H,τ) из полосы $H_{m,n} - \Delta H < H < H_{m,n} + \Delta H$ и вычислим приращение величин H и τ за время $t_1 = 2m\pi$. Имеем:

$$\delta H = \varepsilon\int_0^{2m\pi}\{H'_x(x_\varepsilon(t,H,\tau), y_\varepsilon(t,H,\tau))f(x_\varepsilon(t,H,\tau), y_\varepsilon(t,H,\tau), t, \varepsilon) +$$
$$+ H'_y(x_\varepsilon(t,H,\tau), y_\varepsilon(t,H,\tau))g(x_\varepsilon(t,H,\tau), y_\varepsilon(t,H,\tau), t, \varepsilon)\}\,dt,$$

$$\delta\tau = 2m\pi - nT(H) + \varepsilon\int_0^{2m\pi}\{\tau'_x(x_\varepsilon(t,H,\tau), y_\varepsilon(t,H,\tau))f(x_\varepsilon(t,H,\tau), y_\varepsilon(t,H,\tau), t, \varepsilon) + \tag{7.8}$$

$$+\tau'_y(x_\varepsilon(t,H,\tau),y_\varepsilon(t,H,\tau))g(x_\varepsilon(t,H,\tau),y_\varepsilon(t,H,\tau),t,\varepsilon)\}\,dt,$$

где $(x_\varepsilon(t,H,\tau),\ y_\varepsilon(t,H,\tau))$ есть решение системы $(\mathrm{II}_\varepsilon)$, удовлетворяющее условиям:

$$H(x_\varepsilon(0,H,\tau),y_\varepsilon(0,H,\tau))=H\ ,\ \tau(x_\varepsilon(0,H,\tau),y_\varepsilon(0,H,\tau))=\tau\ .$$

Из (7.8) видно, что δH – аналитическая функция ε, равная нулю при $\varepsilon=0$, а $\delta\tau$, будучи аналитической функцией ε, при $\varepsilon=0$ обращается в $2m\pi-nT(H)$. Если ограничиться узкой полосой $H_{m,n}-\Delta H<H<H_{m,n}+\Delta H$, где $\Delta H>0$ мало, то $\delta\tau$ будет малой величиной порядка $\max(\varepsilon,\Delta H)$.

Нам нужно будет определить изменение величин H и τ за большое число периодов $t_1=2m\pi$. С этой целью рассмотрим относительное приращение δH к $\delta\tau$. Из (7.8) имеем:

$$\frac{\delta H}{\delta\tau}=\frac{\varepsilon\int\limits_0^{2m\pi}\{H'_x f+H'_y g\}\,dt}{2m\pi-nT(H)+\varepsilon\int\limits_0^{2m\pi}\{\tau'_x f+\tau'_y g\}\,dt}\ . \tag{7.9}$$

Сделаем в (7.9) замену: $H=\tilde H(\tau,\varepsilon)+\mu h$, где $\tilde H(\tau,\varepsilon)$ есть корень уравнения $\delta\tau=0$, а $\mu=\sqrt{\varepsilon}$. Из теоремы о неявных функциях следует (см.[7], стр. 80-85), что $\tilde H(\tau,\varepsilon)$ есть аналитическая функция ε в некотором круге $|\varepsilon|<\varepsilon_1$, причем, разложение ее в ряд по степеням ε имеет вид: $\tilde H(\tau,\varepsilon)=H_{m,n}+\varepsilon H_1(\tau)+\dots$. После замены получим:

$$\frac{\delta h}{\delta\tau}=-\frac{P_1(\tau)+\mu f(\tau,h,\mu)}{nT'(H_{m,n})h+\mu g(\tau,h,\mu)h}\ , \tag{7.10}$$

где $f(\tau,h,\mu)$ и $g(\tau,h,\mu)$ – аналитические функции τ, h и μ, когда τ, h и μ заключены в пределах $|h|<h_0$, $|\mu|<\mu_0$, а τ произвольно. Из (7.8) следует, что $f(\tau,0,0)\equiv 0$.

Вместе с (7.10) рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dh}{d\tau}=\frac{P_1(\tau)+\mu f(\tau,h,\mu)}{nT'(H_{m,n})h+\mu g(\tau,h,\mu)h}. \tag{7.11}$$

Очевидно, что (7.10) получается из (7.11) при интегрировании по методу ломаных Эйлера, когда закон изменения шага интегрирования задается с помощью (7.8). Это позволяет надеяться, что при μ достаточно малых, результаты, полученные из (7.10) и (7.11), будут мало отличаться друг от друга. Однако, здесь имеются некоторые тонкости. Действительно, пусть при $\tau=\tau_K$ $T'(H_{m,n})P_1'(\tau_K)<0$, т.е. в системе (7.6) $\lambda>0$. Сделаем в системе (7.6) замену: $u=x+y$, $v=-x+y$. После замены получим:

$$\frac{dx}{d\sigma}=\lambda y+F\left(t'+\frac{\sigma}{\mu},x,y,\mu,\delta\right),$$
$$\frac{dy}{d\sigma}=\lambda x+G\left(t'+\frac{\sigma}{\mu},x,y,\mu,\delta\right). \tag{7.12}$$

Система (7.12) отличается от системы (3.2) тем, что независимое переменное σ в системе (7.12) входит с большим множителем $\frac{1}{\mu}$. Однако, при малых действительных $\mu\neq0$ это не приносит никаких неприятностей, так как в некоторой области $|x|<C_1$, $|y|<C_2$, $|\delta|<\delta_0$ (C_1, C_2 и δ_0 от μ не зависят) $F(t'+\frac{\sigma}{\mu},x,y,\mu,\delta)$ и $G(t'+\frac{\sigma}{\mu},x,y,\mu,\delta)$ будут ограниченными функциями σ при всех действительных σ и всех достаточно малых действительных $\mu\neq0$. На основании вышесказанного теорема 3 оказывается справедливой для системы (7.12), хотя ее доказательство должно быть изменено в деталях, связанных с тем, что система (7.12) при $\mu=0$, а $\delta\neq0$ не определена. Более того, при $|\mu|+|\delta|\to0$ решение $(x_\mu(\sigma,t',\delta),y_\mu(\sigma,t',\delta))$ системы (7.12), удовлетворяющее условиям:

$$x_\mu(0,t',\delta)=1,\quad |x_\mu(\sigma,t',\delta)|+|y_\mu(\sigma,t',\delta)|\to0$$

при $\sigma \to \infty$, при всех $\sigma \geq 0$ $\frac{d}{d\sigma}|x_\mu(\sigma,t',\delta)|<0$ и $\frac{d}{d\sigma}|y_\mu(\sigma,t',\delta)|<0$, стремится к соответствующему решению системы: $\frac{dx}{d\sigma} = \lambda y$, $\frac{dy}{d\sigma} = \lambda x$. Это, в частности, означает, что при $|\mu| + |\delta| \to 0$ $y_\mu(0,t',\delta) \to -1$. Возьмем теперь точку $(x_0 = x_\mu(0,t',\delta) = 1,\ y_0 = y_\mu(0,t',\delta))$ и определим значение h_0 и τ_0 в точке (x_0, y_0). Путем несложных вычислений находим, что

$$h_0 = -2\mu\delta\left[\lambda\frac{T}{T'}x_0 - \delta\left(H''_{xx}H'^2_y - 2H''_{xy}H'_xH'_y + H''_{yy}H'^2_x\right)y_0^2\right] + O_1(\mu^2),$$

$$\tau_0 = \tau_K(\mu) + 2\mu\delta y_0 + O_2(\mu^2), \tag{7.13}$$

где $\tau_K(\mu)$ равно значению τ в точке пересечения кривых, определенных уравнениями $\delta H = 0$ и $\delta\tau = 0$, и с точностью до членов второго порядка по μ совпадает с корнем уравнения $P_1(\tau) = 0$. Таким образом, мы видим, что начальные данные интересующего нас решения уравнения (7.11) лежат вблизи от особой точки $h = 0$, $\tau = \tau_K(\mu)$. Поэтому мы должны предварительно выяснить, насколько сильно отличается точное решение уравнения (7.11) с начальными данными, близкими к особой точке, от решения по методу ломаных Эйлера, когда шаг интегрирования берется согласно (7.8). Здесь имеет место следующая лемма.

Лемма 22. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{7.14}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – аналитические функции x и y в некоторой окрестности начала координат. Пусть далее

$$P(0,0) = Q(0,0) = 0, \quad Q'_x(0,0)P'_y(0,0) - Q'_y(0,0)P'_x(0,0) < 0$$

и λ_1, равное одному из корней уравнения

$$Q'_y(0,0)\lambda^2 + \left(Q'_x(0,0) - P'_y(0,0)\right)\lambda - P'_x(0,0) = 0,$$

удовлетворяет неравенству: $0 < \lambda_1 < \infty$. Обозначим через $y(x, x_0, y_0)$ точное решение уравнения (7.14), удовлетворяющее условию $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, а через $y_h(x, x_0, y_0)$-приближенное решение по методу ломаных Эйлера с переменным шагом, подчиняющимся закону: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = Q(x_n, y_n)\,h$, где $h>0$ – постоянно. Тогда существуют постоянные $h_0>0$, $C>0$, $\Delta\lambda>0$ и $X_1>X_0$ такие, что для всех $X\in[X_0, X_1]$ $|y(x,x_0,y_0)-y_h(x,x_0,y_0)|<C\mu|\ln\mu|$ если только $h<\min(h_0, \sqrt{x_0^2+y_0^2})$, $\lambda_1-\Delta\lambda<\frac{y_0}{x_0}<\lambda_1+\Delta\lambda$ и $x_0>0$.

Доказательство:

Нетрудно видеть, что заданный метод приближенного интегрирования эквивалентен тому, что мы заменили уравнение (7.14) системой:

$$\dot x = Q(x,y), \qquad \dot y = P(x,y) \tag{7.15}$$

и интегрируем ее по методу ломаных Эйлера с постоянным шагом $\Delta t = h$. Нам остается показать, что существуют $h_0>0$, $C>0$, $\Delta\lambda>0$ и $X_1>X_0$ такие, что в течение всего промежутка времени, необходимого для того, чтобы X увеличилось на X_1-X_0, будет справедлива приведенная оценка.

Не нарушая общности, предположим, что $Q'_x(0,0)-P'_y(0,0)=0$ (см. доказательство леммы 2). Далее предположим для определенности, что $P'_x(0,0)+Q'_y(0,0)>0$; $P'_x(0,0)+Q'_y(0,0)\neq 0$, так как $Q'_x(0,0)P'_y(0,0)-Q'_y(0,0)P'_x(0,0)=Q'^2_x(0,0)-Q'_y(0,0)P'_x(0,0)<0$, следовательно, если $P'_x(0,0)+Q'_y(0,0)<0$, то заменой t на $-t$ мы достигнем желаемого результата.

Сделаем теперь в системе (7.15) замену переменных: $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. После замены получим:

$$\dot r = [Q'_x(0,0) + (P'_x(0,0)+Q'_y(0,0))\sin\varphi\cos\varphi]r + r^2 R(r,\varphi),$$

$$\dot\varphi = P'_x(0,0)\cos^2\varphi - Q'_y(0,0)\sin^2\varphi + r\,\Phi(r,\varphi),$$

где $R(r,\varphi)$ и $\Phi(r,\varphi)$ аналитические функции r и φ в окрестности $r=0$. Из того, что

$$2d = Q'_x(0,0) + (P'_x(0,0)+Q'_y(0,0))\sin\varphi\cos\varphi > 0$$

при $\varphi = \varphi_1 = \operatorname{arctg} \lambda_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{P_x'(0,0)}{Q_y'(0,0)}}$ следует, что существуют $\Delta\varphi > 0$ и $r_1' > 0$ такие, что

$$Q_x'(0,0) + (P_x'(0,0) + Q_y'(0,0)) \sin\varphi \cos\varphi + r R(r,\varphi) \geq d$$

для всех $\varphi \in [\varphi_1 - \Delta\varphi, \varphi_1 + \Delta\varphi]$ и $r \in [0, r_1']$. Далее из того, что при $\varphi = \varphi_1$

$$P_x'(0,0)\cos^2\varphi - Q_y'(0,0)\sin\varphi = 0, \quad \text{а} \quad \frac{d}{d\varphi}\left[P_x'(0,0)\cos^2\varphi - Q_y'(0,0)\sin^2\varphi\right] < 0$$

следует, что существуют $\delta\varphi > 0$ $(\delta\varphi \leq \Delta\delta)$ и $r_1'' > 0$ такие, что

$$P_x'(0,0)\cos^2(\varphi_1 + \delta\varphi) - Q_y'(0,0)\sin^2(\varphi_1 + \delta\varphi) + r\Phi(r, \varphi_1 + \delta\varphi) < 0,$$

а

$$P_x'(0,0)\cdot\cos^2(\varphi_1 - \delta\varphi) - Q_y'(0,0)\sin^2(\varphi_1 - \delta\varphi) + r\Phi(r, \varphi_1 - \delta\varphi) > 0$$

при всех $r \in [0, r_1'']$. Все это взятое вместе означает, что существует $\Delta\lambda > 0$ такое, что любое решение $(x(t), y(t))$ системы (7.15), вышедшее при $t = 0$ из произвольной точки (x_0, y_0) области $\lambda_1 - \Delta\lambda < \frac{y_0}{x_0} < \lambda_1 + \Delta\lambda$, $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < r_1 = \min(r_1', r_1'')$, $x_0 > 0$ при $t > 0$ будет удовлетворять неравенствам

$$\lambda_1 - \Delta\lambda < \frac{y(t)}{x(t)} < \lambda_1 + \Delta\lambda, \quad \dot{r}(t) \geq d\cdot r(t)$$

до тех пор пока $r(t) \leq r_1$. Следовательно, существует момент времени $t_1 < \frac{1}{d}(\ln r_1 + |\ln h|)$ такой, что $x(t_1) = x_1 = \frac{r_1}{\sqrt{1 + (\lambda_1 + \Delta\lambda)^2}}$.

Окончание доказательства основано на том, что погрешность на каждом шагу интегрирования имеет порядок h^2, а количество шагов равно $\left[\frac{t_1}{h}\right] < \frac{1}{hd}(\ln r_1 + |\ln h|)$. Ввиду элементарности эта часть доказательства опущена. Лемма доказана.

Используя лемму 22, мы можем проследить за изменением h и τ на некотором конечном промежутке изменения τ с погрешностью порядка $\mu|\ln\mu|$. Этого оказывается достаточно для доказательства следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть $H(x,y)$ монотонно убывает при удалении от точки (x_c, y_c) (это предположение эквивалентно тому, что с возрастанием t движение по траекториям системы $(\underline{\Pi}_0)$, лежащим в области G_c, происходит по часовой стрелке; если это не так, то заменой t на $-t$ всегда можно добиться выполнения этого условия). Тогда среди периодических решений $(x_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_k), y_\varepsilon(t, H_{m,n}, \tau_k))$ первого типа существует такое решение, для которого расположение ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ при достаточно малых $\mu > 0$ имеет вид, указанный на рисунках 4, 5, 6, 7, соответственно, если выполнены условия:

1. $T'(H_{m,n}) < 0, \quad \int_0^{2\pi} P_1(\tau)\,d\tau > 0;$
2. $T'(H_{m,n}) > 0, \quad \int_0^{2\pi} P_1(\tau)\,d\tau > 0;$
3. $T'(H_{m,n}) < 0, \quad \int_0^{2\pi} P_1(\tau)\,d\tau < 0;$
4. $T'(H_{m,n}) > 0, \quad \int_0^{2\pi} P_1(\tau)\,d\tau < 0.$

Сплошной линией на этих рисунках изображены части соответствующих ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ для системы $(\underline{\Pi}_\varepsilon)$, пунктиром – части соответствующих ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ для системы, полученной из $(\underline{\Pi}_\varepsilon)$ заменой t на $-t$.

Из рисунков видно, что в первых двух случаях траектории системы $(\underline{\Pi}_\varepsilon)$ втекают по "каналам", образованным ветвями множества $\gamma_\mu(t_0)$, в область больших значений H, а в двух последних случаях, наоборот, вытекают.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 23. Пусть периодическая с периодом 2π функция $f(\tau)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(\tau)$ непрерывна вместе с первой производной;
2. $f(\tau)$ принимает значения обоих знаков, причем, все нули функции $f(\tau)$ простые;

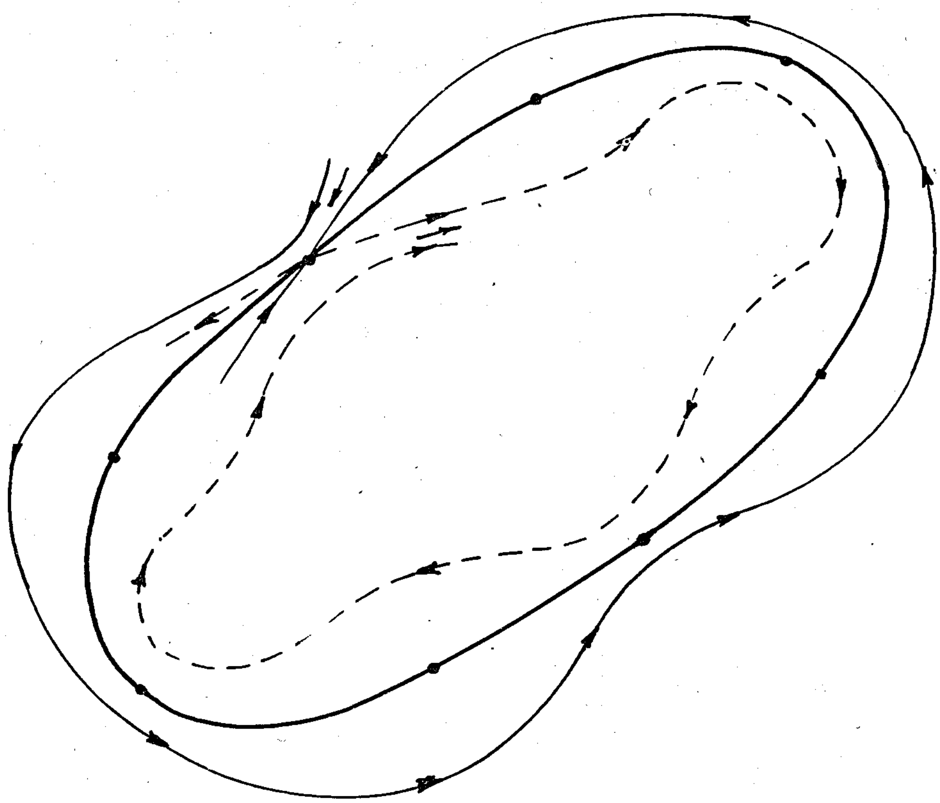


Рис. 4.

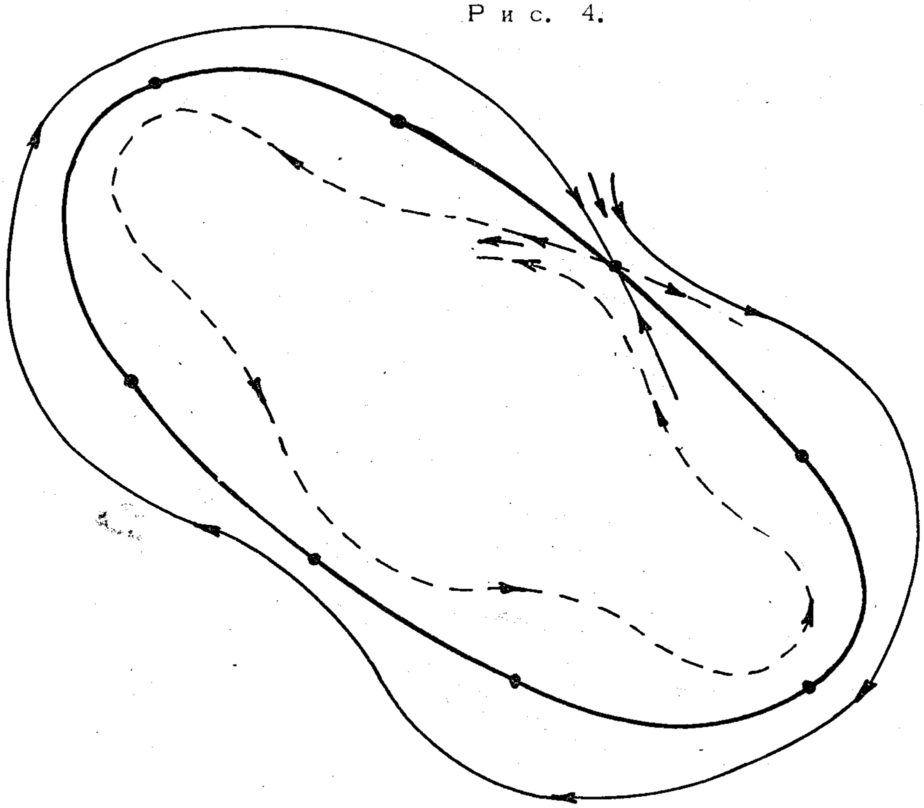
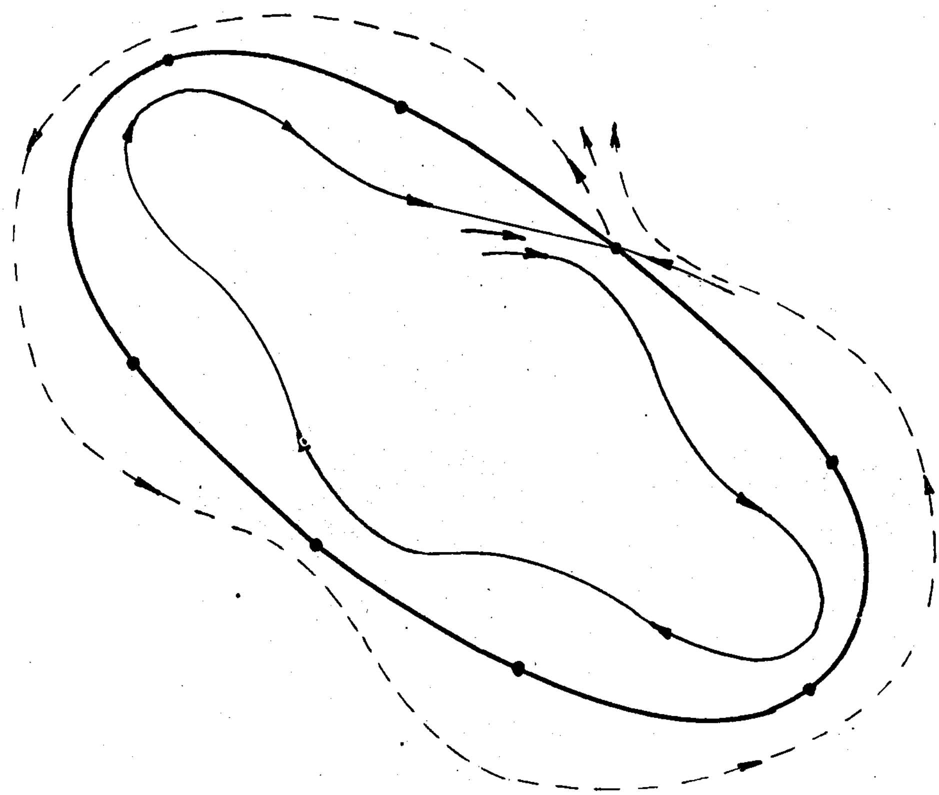
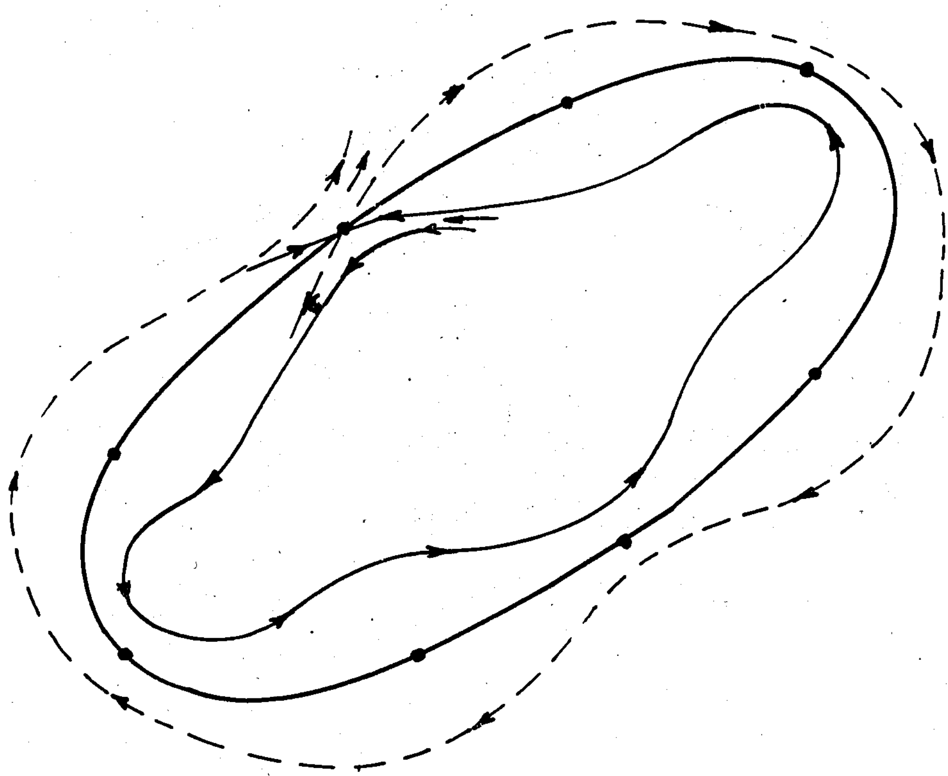


Рис. 5.



Р и с. 6.



Р и с. 7.

3. $\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau > 0$;

тогда существует нуль τ_s функции $f(\tau)$ и точка $\tau = \tau' > \tau_s$ такие, что:

1) $f'(\tau_s) > 0$;

2) $f(\tau) > 0$ для любого $\tau \in (\tau_s, \tau']$;

3) для любых $\tau_0 \in [\tau_s, \tau']$ и τ

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} f(\xi)\,d\xi \geqslant \int\limits_{\tau_0}^{\tau'} f(\tau)\,d\tau + \frac{\tau - \tau'}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau .$$

Доказательство:

Пусть $\tilde{f}(\tau) = f(\tau) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau$, а $\mathcal{F}(\tau) = \int\limits_0^{\tau} \tilde{f}(\xi)\,d\xi$.

Пусть далее $\tau' \in [0, 2\pi]$ таково, что $\mathcal{F}(\tau) - \mathcal{F}(\tau') \geqslant 0$ при любом τ. Это означает, что при любом τ

$$\int\limits_{\tau'}^{\tau} \Big(f(\xi) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau \Big)\,d\xi \geqslant 0$$

т.е. $\int\limits_{\tau'}^{\tau} f(\xi)\,d\xi \geqslant \frac{\tau - \tau'}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau$. Из последнего неравенства следует, что $f(\tau') > 0$. Пусть τ_s ближайший слева от $\tau = \tau'$ нуль функции $f(\tau)$. Очевидно, что $f'(\tau_s) > 0$ и для любого $\tau \in (\tau_s, \tau']$ $f(\tau) > 0$. Тогда при любом $\tau_0 \in [\tau_s, \tau']$

$$\int\limits_{\tau_0}^{\tau} f(\xi)\,d\xi \geqslant \int\limits_{\tau_0}^{\tau'} f(\tau)\,d\tau + \frac{\tau - \tau'}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\,d\tau .$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы:

Мы проведем подробное доказательство только для первого случая. В остальных трех случаях доказательство отличается незначительными деталями.

Для доказательства теоремы нам нужны некоторые сведения о расположении нулей функции $P_1(\tau)$. Из определения этой функции следует, что она имеет период, равный $2\pi\frac{m}{n}$, т.е.

$$P_1(\tau) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(a_q \sin q\frac{nt}{m} + b_q \cos q\frac{nt}{m}\right).$$

С другой стороны, заменив под интегралом, с помощью которого $P_1(\tau)$ определена, $t+\tau$ на t, мы получаем, что

$$P_1(\tau) = \int_0^{2m\pi}\{ f(x_0(t,H_{m,n}), y_0(t,H_{m,n}), t-\tau, 0)\,\dot{y}_0(t,H_{m,n}) -$$

$$- g(x_0(t,H_{m,n}), y_0(t,H_{m,n}), t-\tau, 0)\,\dot{x}_0(t,H_{m,n})\}\,dt,$$

и, следовательно, $P_1(\tau)$ имеет период 2π. Таким образом,

$$P_1(\tau+2\pi) - P_1(\tau) = \sum_{q=0}^{\infty}\Big\{\Big[a_q\Big(\cos q\frac{2n\pi}{m} - 1\Big) -$$

$$- b_q \sin q\frac{2n\pi}{m}\Big]\sin q\frac{n\tau}{m} + \Big[a_q \sin q\frac{2n\pi}{m} +$$

$$+ b_q\Big(\cos q\frac{2n\pi}{m} - 1\Big)\Big]\cos q\frac{n\tau}{m}\Big\} \equiv 0.$$

Из теоремы о единственности разложения в ряд Фурье следует, что

$$a_q\left(\cos q\frac{2n\pi}{m}-1\right)-b_q\sin q\frac{2n\pi}{m}=0,$$

$$a_q\sin q\frac{2n\pi}{m}+b_q\left(\cos q\frac{2n\pi}{m}-1\right)=0$$

для всех $q\geqslant 0$. Определитель этой системы равен $2\left(1-\cos q\frac{2n\pi}{m}\right)$ и, следовательно, для всех q, отличных от mp, где p – целое, отличен от нуля. Это означает, что все a_q и b_q для $q\neq mp$ равны нулю, т.е.

$$P_1(\tau)=\sum_{p=0}^{\infty}\left(a_{mp}\sin pnt+b_{mp}\cos pnt\right).$$

Таким образом, $P_1(\tau)$ имеет период $\frac{2\pi}{n}$, т.е. на промежутке $\left[0,2\pi\frac{m}{n}\right]$ укладывается ровно m периодов $P_1(\tau)$.

Пусть $\tau=\tau_{K'}$ нуль функции $f(\tau)=P_1(\tau)$, удовлетворяющий лемме 23. Так как

$$f'(\tau_{K'})=P_1'(\tau_{K'})>0,\ \text{то}\quad \lambda=\sqrt{-\frac{T'(H_{m,n})P_1'(\tau_{K'})}{2m\pi T(H_{m,n})}}$$

будет действительным. Следовательно, для периодического решения $(x_\varepsilon(t,H_{m,n},\tau_{K'}),\ y_\varepsilon(t,H_{m,n},\tau_{K'}))$ будет существовать два однопараметрических семейства решений, которые при $t\to\infty$ стремятся к решению $(x_\varepsilon(t,H_{m,n},\tau_{K'}),\ y_\varepsilon(t,H_{m,n},\tau_{K'}))$.

Возьмем теперь решение уравнения (7.11) с начальными данными (7.13). Как было замечено раньше, $\frac{y_0}{x_0}\to-1$ при $|\mu|+|\delta|\to 0$. Следовательно, при $|\mu|+|\delta|\to 0$

$$\frac{h_0}{\tau_0-\tau_{K'}(\mu)} \to \lambda\frac{T}{T'} = -\sqrt{-\frac{P_1'(\tau_{K'})}{n\,T'(H_{m,n})}}\,,$$

что совпадает с направлением одной из сепаратрисс уравнения (7.11) при $\mu=0$. Это означает, что существуют $\delta_0>0$ и $\mu_0>0$ такие, что при любых действительных μ и δ таких, что $0<|\delta|<\delta_0$, $0<|\mu|<\mu_0$

$$-\sqrt{-\frac{P_1'(\tau_{K'})}{n\,T'(H_{m,n})}}-\Delta\lambda<\frac{h_0}{\tau_0-\tau_{K'}(\mu)}<-\sqrt{-\frac{P_1'(\tau_{K'})}{n\,T'(H_{m,n})}}+\Delta\lambda,$$

где $\Delta\lambda>0$ удовлетворяет лемме 22. Возьмем $\mu>0$, а $\delta<0$. На основании формул (7.13) это означает, что существуют $\delta_1>0$ и $\mu_1>0$ такие, что для всех $-\delta_1<\delta<0$ и $0<\mu<\mu_1$ $h_0<0$ и $\tau_0-\tau_{K'}(\mu)>0$, так как при $|\mu|+|\delta|\to 0$ $y_0\to -1$. Следовательно, на основании леммы 22 при любом $-\delta_1<\delta<0$ существует промежуток $[\tau_0,\tau_1]$ изменения τ $(\tau_1>\tau_0)$, на котором разность между (7.8) и точным решением уравнения (7.11) не превосходит $C\mu|\ln\mu|$, где $C>0$ и τ_1 от μ не зависят. Таким образом, с помощью уравнения (7.11) мы из точки (h_0,τ_0) попали в точку (h_1,τ_1) $(h_1<0)$, которая отличается не более чем на $C\mu|\ln\mu|$ от некоторой точки (X_1,y_1), в которую попадает решение системы $(\underline{II}_\varepsilon)$ с начальными данными, полученными из (7.13), через некоторый промежуток времени, по порядку величины, равный $-\frac{1}{\mu}|\ln\mu|$, но которая находится на конечном (т.е. не стремящемся к нулю при $\mu\to 0$) расстоянии от особых точек уравнения (7.11). Далее мы можем воспользоваться обычной теоремой о решении уравнения (7.11) по методу ломаных Эйлера, которая будет справедлива до тех пор, пока мы снова не приблизимся к какой-нибудь особой точке уравнения (7.11). Покажем, что при наших предположениях о $P_1(\tau)$ решение $h_\mu(\tau)$ уравнения (7.11), удовлетворяющее условию $h_\mu(\tau_0)=h_0$, где h_0 и τ_0 заданы формулами (7.13), при изменении τ на промежутке $[\tau_1,\tau_0+2m\pi]$ находится на конечном расстоянии от особых точек уравнения (7.11). Для этого возьмем τ_0', равное $\frac{1}{2}(\tau_{k'}+\min(\tau',\tau_1))$, где τ' взято из леммы 23 и пусть $h_0' = h_\mu(\tau_0')$, где $h_\mu(\tau)$ решение уравнения (7.11), удовлетворяющее условию $h_\mu(\tau_0) = h_0$. Пусть далее

$$h_0(\tau) = -\sqrt{h_0'^2 - \frac{2}{nT'(H_{m,n})}\int_{\tau_0'}^{\tau} P_1(\xi)\,d\xi}\,.$$

Согласно лемме 23 $-h_0(\tau) \geqslant |h_0'|$ при всех $\tau \in [\tau_0', \tau_0'+2m\pi]$. Из теоремы о дифференцируемости решения по параметру μ следует, что существуют $\mu_2 > 0$ и $A > 0$ такие, что решение $h_\mu(\tau)$ уравнения (7.11), удовлетворяющее условию $h_\mu(\tau_0') = h_0'$, при всех $\tau \in [\tau_0', \tau_0'+2m\pi]$ и $0 < \mu < \mu_2$ удовлетворяет неравенству $|h_\mu(\tau) - h_0(\tau)| < \mu A$. Отсюда следует, что при малых $\mu > 0$ и $\tau \in [\tau_0', \tau_0'+2m\pi]$ $h_\mu(\tau)$ действительно находится на конечном расстоянии от особых точек уравнения (7.11) и что

$$-\sqrt{h_0'^2 - \frac{2K}{n^2T'(H_{m,n})}\int_0^{2\pi} P_1(\tau)\,d\tau} - \mu A < h_\mu\left(\tau_0' + 2\pi\frac{K}{n}\right) <$$

$$< -\sqrt{h_0'^2 - \frac{2K}{n^2T'(H_{m,n})}\int_0^{2\pi} P_1(\tau)\,d\tau} + \mu A \quad (K = 1, 2, \dots, mn).$$

С другой стороны, используя теорему об интегрировании уравнения (7.11) по методу ломаных Эйлера, получаем, что существуют постоянные $\mu_3 > 0$ и $B > 0$ такие, что для $0 < \mu < \mu_3$, $\tau \in [\tau_0', \tau_0' + 2m\pi]$ разность между точным решением уравнения (7.11) и решением по методу ломаных Эйлера не превосходит μB. Пусть теперь $\tilde{\mu}_0 > 0$ настолько мало, что, во-первых, $\tilde{\mu}_0 < \min(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$, а, во-вторых, для всех целых K от единицы до mn

$$\tilde{\mu}_0(A+B) < \frac{1}{4}\left(\sqrt{h_0'^2 - \frac{2k\int_0^{2\pi} P_1(\tau)d\tau}{n^2 T'(H_{m,n})}} - \sqrt{h_0'^2 - \frac{2(k-1)\int_0^{2\pi} P_1(\tau)d\tau}{n^2 T'(H_{m,n})}}\right).$$

Из полученных оценок следует, что при $0<\mu<\tilde{\mu}_0$ рассматриваемая ветвь множества $\gamma_\mu(t_0)$ имеет расположение, указанное на рис. 4. Теорема доказана.

Доказанная теорема не дает ответа на вопрос о расположении ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ в том случае, когда $\int_0^{2\pi} P_1(\tau)\,d\tau=0$. Нетрудно видеть, что в этом случае расположение ветвей множества $\gamma_\mu(t_0)$ существенно зависит от членов более высокого порядка по ε. К сожалению, в данной статье мы не имеем возможности рассмотреть этот вопрос более детально.

Литература

1. Анри Пуанкаре. "О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями", Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1947г.
2. Н.А.Сахарников. "Качественная картина поведения траекторий вблизи границы области устойчивости, содержащей особую точку вида центр", ПММ, ХУ, вып. 3, 1951, 349-354.
3. G.Sansone 'Sopra un'equazione che si presenta nella determinazione delle orbite in un sincrotrone' Rend.Acc.Naz. dei XI, Serie IV, vol. VIII, 1–74 (1957).
4. C.Olech 'Sur un probléme de M.C.Sansone lie a la théorie du synchrotrone', Annali di Mat., Serie IV, vol. XLIV, 317–329.
5. В.К.Мельников. "Определение области захвата для уравнения второго порядка, близкого к консервативному", Математический сборник, 49 (91), вып.4, 1959, 353-380.

6. Ю.С.Саясов и В.К.Мельников. "Теория захвата частиц в синхронный режим ускорения с учетом неконсервативности уравнений движения", ЖТФ, XXX, вып. 6, 1960, 656-664.

7. Э.Гурса. "Курс математического анализа",том 1, часть 11, Москва-Ленинград, ГТТИ, 1933.

8. В.В.Голубев. "Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений", Москва-Ленинград, Госиздат, 1950 г.

9. H.Weyl 'Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen' Göttinger Nachr., 37–63 (1909).

10. A.Wintner 'On almost free linear motions', Amer.Journ.Math., 71, 595–602 (1949).

11. Витольд Гуревич и Генри Волман "Теория размерности", Москва, Госиздат ИЛ, 1948 г.

12. И.Г.Петровский. "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений", Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1952 г.

13. И.Г.Малкин . "Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний", Москва - Ленинград, Гостехиздат, 1949.

14. Н.А.Сахарников. "Об условиях существования центра и фокуса", ПММ, Х1У, вып. 5, 1950, 513-526.

15. Г.М.Голузин. "Геометрическая теория функций комплексного переменного", Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1952 .

16. А.М.Кац. "Вынужденные колебания нелинейных систем с одной степенью свободы, близких к консервативным", ПММ, Х1Х. вып.1, 1955, 13-32.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 апреля 1961 года.