# ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Н.А. Черников

Р-723

# СВЯЗЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ С ГЕОМЕТРИЕЙ ЛОБАЧЕВСКОГО

Дубна 1961 год

Н.А. Черников

Р-723



# СВЯЗЬ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ С ГЕОМЕТРИЕЙ ЛОБАЧЕВСКОГО

## I. Геометрия Лобачевского и её отношение к релятивистской механике

Здесь мы ставим своей целью осветить глубокую связь теории относительности с геометрией Лобачевского. Наше изложение рассчитано на физиков, хорошо знающих теорию относительности, но мало знакомых с геометрией Лобачевского. Поэтому оно с необходимостью должно начаться с ответа на возникающий у читателя вопрос : что такое геометрия Лобачевского ?

Геометрия Лобачевского возникла в процессе решения вопроса о пятом постулате Евклида. Два тысячелетия назад Евклид ( $\approx$ 330-275 г. до н.э. ) дал полное и систематическое изложение геометрии. Его "Начала" на протяжении веков являлись образцом математической строгости и единственным серьёзным учебником по геометрии. Среди прочих основных положений "Начал" Евклида видное место занимал пятый постулат, который уместно привести здесь полностью.

Пятый постулат Евклида : Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Два тысячелетия умы математиков занимала проблема, как вывести приведенное утверждение из остальных положений Евклида. Решение этой проблемы было настолько неожиданным, что даже в кругу геометров оно долгое время считалось абсурдным. Оказалось, что пятый постулат не зависит от остальных положений Евклида. Доказать независимость пятого постулата можно было, лишь создав новую геометрию, построенную на отрицании утверждения, содержащегося в пятом постулате. Но сама мысль об отрицании пятого постулата представлялась в то время абсурдом.

Для решения проблемы требовался смелый гений, способный порвать с мировоззрением, сложившимся на протяжении всей истории человечества. Этот великий научный подвиг совершил русский учёный Николай Иванович Лобачевский (1792-1856). Допустив отрицание пятого постулата, он создал новую геометрию. Первая его публикация по новой геометрии относится к 1829 году. Ещё ранее, 11 февраля по старому стилю 1826 года, он выступил на физико-математическом факультете Казанского университета с докладом, в котором сообщил об открытии новой геометрии.

Ничего не зная о Лобачевском, к такой же геометрии пришёл и венгерский математик Янош Бойяи (1802-1860). Его замечательное исследование было опубликовано в 1832 году в качестве приложения к большому сочинению его отца - Фаркаша Бойяи.

К идеям о новой геометрии пришел также и Карл Фридрих Гаусс (1777-1855), занимавшийся теорией параллельных независимо от Лобачевского и Бойяи. Однако, боясь остаться непонятым, он не опубликовал своих взглядов на основы геометрии.

В геометрии Лобачевского через каждую точку $a$ , лежащую вне заданной прямой $L$ (см. рис. I), проходит бесконечное семейство прямых, лежащих в плоскости $aL$ и не пересекающих прямую $L$ .

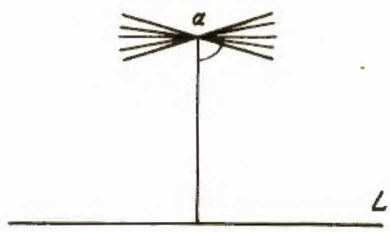


Рис. I.

Две граничные прямые этого семейства Лобачевский назвал прямыми, параллельными в одну и в другую её стороны. Угол, образованный такой прямой и перпендикуляром, опущенным из точки $a$ на прямую $L$ , он назвал углом параллельности. Отметим некоторые другие замечательные факты этой геометрии. В пространстве Лобачевского нет подобных фигур. Имеется абсолютная длина $k$ . Она входит в большинство формул. Приведём четыре из них. Первая относится к зависимости угла параллельности $\Pi(s)$ от расстояния $s$ точки $a$ до прямой $L$ :

$$\Pi(s) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{s}{k}} . \qquad (I)$$

Вторая выражает длину окружности $l$ в зависимости от её радиуса $r$ :

$$l = 2\pi k \operatorname{sh} \frac{r}{k} . \qquad (2)$$

Третья определяет площадь круга $\sigma$ с таким радиусом :

$$\sigma = 2\pi k^2 \left\{ ch\frac{r}{k} - 1 \right\}. \qquad (3)$$

Наконец, четвёртая связывает три стороны и угол треугольника (рис. 2.) :

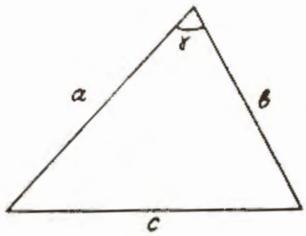


Рис. 2.

$$ch\frac{c}{k} = ch\frac{a}{k}\, ch\frac{b}{k} - sh\frac{a}{k}\, sh\frac{b}{k} \cos\gamma . \qquad (4)$$

Последняя формула указывает на то, что величина $ik$ является радиусом кривизны пространства Лобачевского, так как для сферического треугольника (треугольника на сфере, образованного большими дугами) аналогичная формула имеет вид

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\gamma , \qquad (5)$$

где $R$ - радиус сферы. Таким образом, кривизна пространства Лобачевского равна $-\frac{1}{k^2}$.

После краткого знакомства с геометрией Лобачевского уместно спросить, имеет ли она отношение к теории относительности. Чтобы ответить на этот вопрос и при том утвердительно, достаточно рассмотреть относительную скорость двух частиц, движущихся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ . Эта скорость равна

$$v_{12} = \frac{\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{1}{c^2}[\vec{v}_1 \times \vec{v}_2]^2}}{1 - \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{c^2}} . \qquad (6)$$

Введём величину $s$ , связанную со скоростью $v$ согласно следующей формуле

$$v = c\, th \frac{s}{c} \quad . \tag{7}$$

Обозначим через $\theta$ угол между $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ . После несложных выкладок получим

$$ch \frac{s_{12}}{c} = ch \frac{s_1}{c}\, ch \frac{s_2}{c} - sh \frac{s_1}{c}\, sh \frac{s_2}{c} \cos\theta . \tag{8}$$

Нетрудно заметить совпадение только что полученной формулы с формулой треугольника (4). Сравнение этих формул указывает на то, что величину $S$ следует истолковать как длину отрезка в пространстве Лобачевского с кривизной $-\frac{1}{c^2}$ . Мы можем заключить, таким образом, что пространство скоростей материальной точки в релятивистской механике является пространством Лобаческого, радиус кривизны которого с точностью до мнимой единицы равен скорости света $c$ .

В нерелятивистской механике пространство скоростей материальной точки евклидово. Ниже мы покажем, что пространство скоростей материальной точки может быть либо пространством Евклида, либо пространством Лобачевского. Таким образом, утвердительная формулировка пятого постулата Евклида для пространства скоростей материальной точки приводит к нерелятивистской механике, а его отрицательная формулировка приводит к релятивистской механике.

Ряд предложений геометрии не зависит от истинности или ложности пятого постулата. Совокупность таких предложений Я. Бойяи назвал абсолютной геометрией. Ряд предложений механики также не зависит от скорости света. Следуя Бойяи, совокупность таких предложений можно назвать абсолютной механикой. Приведём некоторые предложения абсолютной механики.

Пусть $m$ -масса покоя материальной точки, $v$ - её скорость, $p$ - импульс, $\varepsilon$ -кинетическая энергия. Согласно (7),

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc\, sh \frac{s}{c} \quad , \qquad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2 \left\{ ch \frac{s}{c} - 1 \right\} . \tag{9}$$

Отношение импульса $p$ к $\frac{m}{2\pi}$ равно длине окружности в пространстве скоростей радиуса $s$ (см. (2)), отношение кинетической энергии $\varepsilon$ к $\frac{m}{2\pi}$ равно площади круга этого же радиуса (см. (3)). Последние утверждения справедливы и в нерелятивистской механике, а потому они относятся к абсолютной механике.

Далее, обозначим через $w$ отношение кинетической энергии к импульсу. Получаем

$$w = \frac{\mathcal{E}}{p} = c\, th \frac{s}{2c} \quad . \tag{10}$$

Таким образом, величина $w$ равна скорости, соответствующей половине отрезка длины $s$. Это также относится к абсолютной механике. Величину $w$ назовём полускоростью.

Приведём более сложный пример. Пусть частица с массой покоя $m_1$ и полускоростью $w_0$ претерпевает упругое столкновение с покоящейся частицей, масса которой равна $m_2$. Полускорость $w$ первой частицы после столкновения следующим образом связана с её углом рассеяния $\theta$ в лабораторной системе отсчёта :

$$\cos\theta = \frac{m_1 + m_2}{2m_1}\,\frac{w}{w_0} + \frac{m_1 - m_2}{2m_1}\,\frac{w_0}{w} \quad . \tag{11}$$

Формула (II) принадлежит абсолютной механике. Из неё следует, что при $m_1 > m_2$ имеется предельный угол рассеяния $\theta^*$, равный

$$\theta^* = \arcsin \frac{m_2}{m_1} \quad . \tag{12}$$

Последнее утверждение также относится к абсолютной механике.

Введя в рассмотрение пространство скоростей материальной точки, мы получили возможность определить скорость материальной точки безотносительно к какой-либо системе отсчёта. Такая скорость является точкой пространства скоростей. Инерциальная система отсчёта также полностью определяется точкой пространства скоростей материальной точки. Пусть теперь заданы скорость частицы, изображаемая точкой $a$, и инерциальная система отсчёта, изображаемая точкой $O$. Величина $s$, определенная по формуле (7), равна расстоянию между точками $O$ и $a$.

После того как мы в достаточной мере уяснили себе, что геометрия Лобачевского содержится в теории относительности, мы можем заметить, что с созданием теории относительности открылись неожиданные перспективы для экспериментального подтверждения геометрии Лобачевского. Такие эксперименты, как опыт Майкельсона, обнаружение дефекта массы и многие другие, являются прямыми экспериментальными указаниями на осуществление геометрии Лобачевского в природе.

Мы видим, что геометрия Лобачевского, в своё время представлявшаяся многим далёкой от жизни и даже абсурдной, ныне оказалась важнейшим элементом в основаниях теоретической физики. Её сознательное применение в физических исследованиях, несомненно, принесет свои плоды.

## 2. Законы рычага Архимеда

Рассмотрим соединение двух частиц $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в одну частицу $\gamma$ (или распад частицы $\gamma$ на две частицы $\gamma_1$ и $\gamma_2$ ). Пусть $a_1$ и $a_2$ - скорости частиц $\gamma_1$ и $\gamma_2$ (взятые безотносительно к какой-либо системе отсчёта), $m_1$ и $m_2$ - их массы покоя. Требуется найти скорость $a$ и массу покоя $m$ частицы $\gamma$ .

Скорость $a$ определяет инерциальную систему отсчёта, в которой импульсы частиц $\gamma_1$ и $\gamma_2$ равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно, точка $a$ находится на отрезке $a_1 a_2$ и делит его таким образом, что длины окружностей с радиусами $aa_1$ и $aa_2$ относятся как $m_2 : m_1$ . Такое определение можно рассматривать как архимедовский закон рычага первого рода. Этот закон можно записать следующим образом

$$\overline{a_1 a} + \overline{a a_2} = \overline{a_1 a_2}$$

$$m_1 c \,\mathrm{sh}\, \frac{\overline{aa_1}}{c} = m_2 c \,\mathrm{sh}\, \frac{\overline{aa_2}}{c} \quad (13)$$

Знак $\overline{ab}$ означает расстояние между точками $a$ и $b$ . В инерциальной системе отсчёта, определяемой точкой $a_2$ , импульсы частиц $\gamma$ и $\gamma_1$ равны. Отсюда следует, что масса покоя $m$ равна произведению массы покоя $m_1$ на отношение длин окружностей с радиусами $a_1 a_2$ и $aa_2$ . Это определение можно рассматривать как архимедовский закон рычага второго рода. Его можно записать в виде

$$mc \,\mathrm{sh}\, \frac{\overline{aa_2}}{c} = m_1 c \,\mathrm{sh}\, \frac{\overline{a_1 a_2}}{c} \quad (14)$$

Сформулированные законы рычага Архимеда относятся к абсолютной механике. Их можно принять в качестве исходных вместо закона сохранения четырехмерного импульса. В самом деле, определим четырехмерный импульс частицы как пару $(a, m)$ , составленную из скорости частицы и её массы покоя. Суммой двух таких пар $(a_1, m_1)$ и $(a_2, m_2)$ назовём пару $(a, m)$ , определенную законами рычага Архимеда. Нетрудно убедиться, что это соответствует сложению четырехмерных импульсов.

Из (I3) следует

$$th\,\frac{\overline{aa_1}}{c} = \frac{m_2\, sh\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}{m_1 + m_2\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}\,, \quad th\,\frac{\overline{aa_2}}{c} = \frac{m_1\, sh\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}{m_2 + m_1\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}\,, \qquad (I5\ а)$$

откуда

$$sh\,\frac{\overline{aa_1}}{c} = \frac{m_2\, sh\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}}\,, \quad sh\,\frac{\overline{aa_2}}{c} = \frac{m_1\, sh\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}}\,, \qquad (I5\ б)$$

$$ch\,\frac{\overline{aa_1}}{c} = \frac{m_1 + m_2\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}}\,, \quad ch\,\frac{\overline{aa_2}}{c} = \frac{m_2 + m_1\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}}\,. \qquad (I5\ в)$$

Из (I4) и (I5 б) получаем массу покоя :

$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\, ch\,\frac{\overline{a_1a_2}}{c}}\,. \qquad (I6)$$

Докажем теперь, что для любой системы отсчёта $o$ справедливы следующие равенства :

$$m_1\, ch\,\frac{\overline{oa_1}}{c} + m_2\, ch\,\frac{\overline{oa_2}}{c} = m\, ch\,\frac{\overline{oa}}{c}\,, \qquad (I7\ а)$$

$$m_1 c\, sh\,\frac{\overline{oa_1}}{c}\cos\angle eoa_1 + m_2 c\, sh\,\frac{\overline{oa_2}}{c}\cos\angle eoa_2 = mc\, sh\,\frac{\overline{oa}}{c}\cos\angle eoa\,, \qquad (I7\ б)$$

где $e$ - любая точка пространства скоростей, не совпадающая с $o$ .

Сначала докажем равенство (I7 а) в случае, когда точка $o$ совпадает с точкой $a$ . Оно непосредственно следует из (I5 в) и (I6). Имеем

$$m_1\, ch\,\frac{\overline{aa_1}}{c} + m_2\, ch\,\frac{\overline{aa_2}}{c} = m. \qquad (I8)$$

Перейдём к случаю общего положения точки $o$ (рис. 3). На основании (4) из треугольников $\Delta\, oaa_1$ и $\Delta\, oaa_2$ имеем

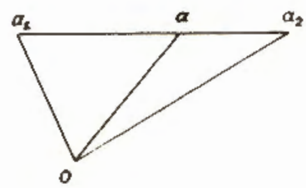


Рис. 3.

$$\operatorname{ch}\frac{\overline{oa_1}}{c} = \operatorname{ch}\frac{\overline{aa_1}}{c}\operatorname{ch}\frac{\overline{oa}}{c} - \operatorname{sh}\frac{\overline{aa_1}}{c}\operatorname{sh}\frac{\overline{oa}}{c}\cos\angle oaa_1 , \tag{19}$$

$$\operatorname{ch}\frac{\overline{oa_2}}{c} = \operatorname{ch}\frac{\overline{aa_2}}{c}\operatorname{ch}\frac{\overline{oa}}{c} - \operatorname{sh}\frac{\overline{aa_2}}{c}\operatorname{sh}\frac{\overline{oa}}{c}\cos\angle oaa_2 .$$

Так как

$$\angle oaa_1 + \angle oaa_2 = \pi ,$$

то в виду (18) отсюда следует (17 а).

Чтобы доказать (17 б), применим формулу (17 а) к системе отсчёта, движущейся со скоростью $e$ :

$$m_1 \operatorname{ch}\frac{\overline{ea_1}}{c} + m_2 \operatorname{ch}\frac{\overline{ea_2}}{c} = m \operatorname{ch}\frac{\overline{ea}}{c} . \tag{20}$$

Но из треугольников $\Delta eoa_1$ , $\Delta eoa_2$ и $\Delta eoa$ (рис.4) получаем

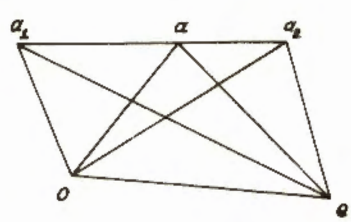


Рис. 4.

$$\operatorname{ch}\frac{\overline{ea_1}}{c} = \operatorname{ch}\frac{\overline{oe}}{c}\operatorname{ch}\frac{\overline{oa_1}}{c} - \operatorname{sh}\frac{\overline{oe}}{c}\operatorname{sh}\frac{\overline{oa_1}}{c}\cos\angle eoa_1 ,$$

$$\operatorname{ch}\frac{\overline{ea_2}}{c} = \operatorname{ch}\frac{\overline{oe}}{c}\operatorname{ch}\frac{\overline{oa_2}}{c} - \operatorname{sh}\frac{\overline{oe}}{c}\operatorname{sh}\frac{\overline{oa_2}}{c}\cos\angle eoa_2 , \tag{21}$$

$$\operatorname{ch}\frac{\overline{ea}}{c} = \operatorname{ch}\frac{\overline{oe}}{c}\operatorname{ch}\frac{\overline{oa}}{c} - \operatorname{sh}\frac{\overline{oe}}{c}\operatorname{sh}\frac{\overline{oa}}{c}\cos\angle eoa .$$

Подставляя эти формулы в (20), получаем (I7 б).

Формула (I7 а) означает, что в любой системе отсчёта сумма масс движения частиц $\gamma_1$ и $\gamma_2$ равна массе движения частицы $\gamma$. Действительно, масса движения частицы равна

$$m_{дв.} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\, ch\, \frac{s}{c}\,. \tag{22}$$

Формула (I7 б) означает, что в любой системе отсчёта сумма проекций импульсов частиц $\gamma_1$ и $\gamma_2$ на любую ось равна проекции импульса частицы $\gamma$ на ту же ось.

Выберем в пространстве скоростей три единичных взаимно перпендикулярных отрезка $oe_1$, $oe_2$ и $oe_3$. Четыре величины

$$P_1 = mc\, sh\, \frac{\overline{oa}}{c} \cos\angle aoe_1\,, \quad P_2 = mc\, sh\, \frac{\overline{oa}}{c} \cos\angle aoe_2\,, \quad P_3 = mc\, sh\, \frac{\overline{oa}}{c} \cos\angle aoe_3\,, \quad P_4 = m\, ch\, \frac{\overline{oa}}{c} \tag{23}$$

являются ортогональными проекциями четырехмерного импульса $(a, m)$ частицы на оси $x$, $y$, $z$, $t$. Они связаны равенством

$$P_4^2 - \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{c^2} = m^2\,. \tag{24}$$

Заметим, ещё, что в нерелятивистской механике закон сохранения массы (являющийся законом сохранения проекции четырехмерного импульса на ось $t$) следует из законов рычага Архимеда ( в формулах (I6) или (I7 а) надо выполнить предельный переход $c \to \infty$).

## 3. Столкновение частиц

Здесь мы должны отказаться от изложения ряда интересных результатов и ограничиться наиболее простыми задачами о столкновении двух частиц.

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц с массами покоя $m_1$ и $m_2$.

Если известны их скорости $a_{-1}$ и $a_{-2}$ до столкновения, то нетрудно найти их возможные скорости $a_1$ и $a_2$ после столкновения. В самом деле, по законам рычага найдём скорость $a$ системы двух частиц как целого (рис. 5.). Скорость $a_1$ первой частицы после столкновения находится на сфере с центром $a$, проходящей через точку $a_{-1}$. Скорость $a_2$ находится на сфере с центром $a$, проходящей через точку $a_{-2}$.

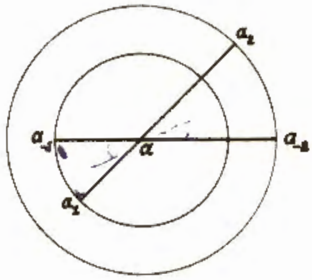


Рис. 5.

При этом отрезок $a_1 a_2$ проходит через точку $a$ .

Пусть теперь заданы скорости $a_{-1}$ и $a_1$ первой частицы до и после столкновения и требуется найти возможные скорости $a_{-2}$ и $a_2$ второй частицы до и после столкновения. Так как точка $a$ равноудалена от точек $a_{-1}$ и $a_1$ , то она лежит в плоскости $\mathcal{P}$ , перпендикулярной к отрезку $a_{-1} a_1$ и проходящей через его середину (см. рис. 6.). Положение

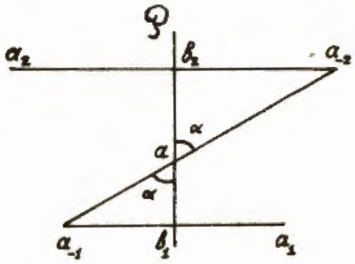


Рис. 6.

точки $a$ на этой плоскости ничем не ограничено. Продолжим отрезок $a_{-1} a$ до некоторой точки $a_{-2}$ , так чтобы соблюдалась пропорция (см. (13))

$$sh\,\frac{\overline{aa_{-2}}}{c} : sh\,\frac{\overline{aa_{-1}}}{c} = m_1 : m_2 \ . \tag{25}$$

Очевидно, точка $a_{-2}$ является возможной скоростью второй частицы до столкновения. Из точек $a_{-1}$ и $a_{-2}$ опустим перпендикуляры $a_{-1} b_1$ и $a_{-2} b_2$ на плоскость $\mathcal{P}$ . Из прямоугольных треугольников $\Delta a_{-1} b_1 a$ и $\Delta a_{-2} b_2 a$ следует

$$sh\,\frac{\overline{a_{-1} b_1}}{c} = sh\,\frac{\overline{aa_{-1}}}{c}\sin\alpha \ , \quad sh\,\frac{\overline{a_{-2} b_2}}{c} = sh\,\frac{\overline{aa_{-2}}}{c}\sin\alpha \ . \tag{26}$$

Таким образом, независимо от выбора точки $a$

$$sh\,\frac{\overline{a_{-2} b_2}}{c} = \frac{m_1}{m_2}\, sh\,\frac{\overline{a_{-1} b_1}}{c} \ . \tag{27}$$

Итак, геометрическим местом возможных скоростей второй частицы до столкновения является поверхность, равноудаленная от плоскости $\mathcal{P}$ . Такая поверхность называется эквидистантной поверхностью. В пространстве Евклида эквидистантная поверхность является плоскостью, тогда как в пространстве Лобачевского она отличается от плоскости.

Скорость второй частицы после столкновения является зеркальным отображением в плоскости $\mathcal{P}$ её скорости до столкновения.

Рассмотрим ещё распад частицы $\gamma$ на лету на две частицы $\gamma_1$ и $\gamma_2$ . Пусть известна скорость частицы $\gamma$ и направления скоростей частиц $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в лабораторной системе отсчёта $O$ (рис. 7). Следовательно, в пространстве скоростей заданы

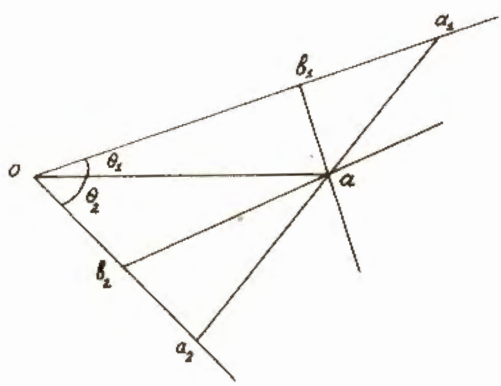


Рис. 7.

два луча $L_1$ и $L_2$ , выходящих из точки $O$ , и точка $a$ , расположенная в углу, образованном этими лучами. Точка $a_1$ расположена на луче $L_1$ , а точка $a_2$ - на луче $L_2$ так, что отрезок $a_1 a_2$ проходит через точку $a$ . Проведём через точку $a$ две прямых $ab_1$ и $ab_2$ параллельно лучам $L_2$ и $L_1$ . Очевидно, точка $a_1$ удалена от точки $O$ более, чем точка $b_1$ , а точка $a_2$ - более чем точка $b_2$ . Используя формулы (I) и (4), нетрудно найти отрезки $ob_1$ и $ob_2$ .

### 4. Пространство скоростей как основа аксиоматики механики

Пространство скоростей материальной точки может быть положено в основу аксиоматики механики. В данном параграфе от читателя потребуется значительно большая математическая подготовка, нежели в четырех других параграфах.

Будем считать, что пространственно-временной мир является четырехмерным многообразием. Это значит, что достаточно малую окрестность любой точки можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить на четырехмерный евклидов куб. Движение материальной точки (без учёта квантовых явлений) изображается кривой в пространственно-временном многообразии - мировой траекторией. Ньютон установил, что мировая траектория определяется дифференциальными уравнениями второго порядка. Учитывая это, мы должны потребовать, чтобы пространственно-временное многообразие было дважды дифференцируемым. Так как уравнения Ньютона имеют второй порядок, то состояние материальной точки определяется касательной прямой к её мировой траектории в некоторой её точке. Подчеркнём, что касательная прямая расположена в касательном пространстве.

Отвлекаясь от мировой траектории, получаем, что состояние материальной точки определяется прямой, касательной к пространственно-временному многообразию в какой-нибудь его точке. Точка касания определяет пространственно-временное положение материальной точки, а место касательной прямой в касательном пространстве определяет скорость материальной точки. Что скорость определяется касательной прямой, легко понять, так как она не изменяется при умножении дифференциалов всех четырех координат на любое общее для них число. Совокупность состояний материальной точки, определяемых касательными прямыми с общей точкой касания $P$ , назовём пространством скоростей материальной точки, отнесенным к точке $P$ .

Так как касательное пространство к четырехмерному дифференцируемому многообразию является четырехмерным центроаффинным пространством, то совокупность касательных прямых с общей точкой касания является трехмерным проективным пространством. Таким образом, пространство скоростей материальной точки обладает проективным инвариантом--ангармоническим отношением четырех точек. С другой стороны, пространство скоростей является трехмерным однородным и изотропным пространством с положительно определенной метрикой. Наличие метрики выражает существование относительной скорости между двумя состояниями материальной точки с общим пространственно-временным положением. Как показал Феликс Клейн, такое пространство с проективными свойствами является пространством постоянной кривизны, а именно : либо пространством Лобачевского, либо пространством Евклида, либо пространством Римана.

Временные отношения в пространственно-временном многообразии, естественно, играют особую роль. Это проявляется в том, что не всякая касательная прямая может представлять состояние материальной точки. Пространство Римана в проективной схеме содержит все точки проективного пространства. Следовательно, пространство скоростей материальной точки не может иметь геометрии Римана. Таким образом, это пространство имеет либо геометрию Евклида, либо геометрию Лобачевского.

Отсюда следует, что пространство, касательное к пространственно-временному многообразию, имеет, соответственно, геометрию либо однородной группы Галилея, либо однородной группы Лоренца, если условиться, что это пространство эквиаффинное, т.е. что оно имеет элемент объёма.

В отсутствии гравитации допускается, что пространственно-временное многообразие является аффинным пространством. Из сказанного следует, что тогда оно имеет геометрию либо неоднородной группы Галилея, либо неоднородной группы Лоренца. В первом случае мы получаем механику Галилея-Ньютона, а во втором - механику Эйнштейна-Минковского (в отсутствии гравитации).

## 5. Несколько замечаний исторического характера

Связь теории относительности с геометрией Лобачевского была замечена вскоре после открытия теории относительности. Первая публикация Альберта Эйнштейна о теории относительности относится к I905 году. Уже в I909 г. появилась работа А. Зоммерфельда, в которой эйнштейновский закон сложения скоростей истолкован на основе геометрии сферы мнимого радиуса. Но ещё Лобачевский и Бойяи отмечали, что созданная ими неевклидова геометрия совпадает с геометрией сферы мнимого радиуса. В I9I0 г. В. Варичак опубликовал статью, в которой указал на аналогию между сложением скоростей в теории относительности и сложением отрезков на плоскости Лобачевского. Кроме того, Варичак интерпретировал с точки зрения геометрии Лобачевского преобразования Лоренца и релятивистские формулы для аберрации, эффекта Допплера и отражения света от движущегося зеркала. Ф. Клейн указал, что группа однородных преобразований Лоренца изоморфна группе движений пространства Лобачевского. В. Паули заметил, что связь теории относительности с геометрией Лобачевского очевидна, если последнюю рассматривать в проективной схеме Кэли-Клейна.

Однако понятие пространства скоростей впервые было отчётливо сформулировано А.П. Котельниковым. Скорость материальной точки А.П. Котельников представлял бесконечно удаленной точкой пространства событий (в отсутствии гравитации). Средствами проективной геометрии он доказал, что совокупность возможных скоростей материальной точки в теории относительности является пространством Лобачевского , радиус кривизны которого (с точностью до мнимой единицы) равен скорости света, а в дорелятивистской механике является пространством Евклида. Кроме того, он заметил, что совокупность возможных скоростей частицы с массой покоя, равной нулю, представляется абсолютом пространства скоростей материальной точки с массой покоя, большей нуля.

Эти результаты содержались в докладе, с которым А.П. Котельников выступил на заседании Московского математического общества 29 апреля 1923 г. Указанный доклад опубликован в 1927 г. Замечательно, что А.П. Котельников - сын коллеги Лобачевского и пропагандиста его идей - П.И. Котельникова.

В монографии "Теория пространства, времени и тяготения" В.А. Фок также вводит пространство скоростей и, исходя из понятия относительной скорости, доказывает, что в релятивистской механике оно является пространством Лобачевского. С точки зрения геометрии Лобаческого в этой книге подробно исследован вопрос об астрономической аберрации.

В диссертации автора отдельная глава посвящена рассмотренному здесь вопросу (1957 г.). Там содержится большой материал, полученный на основе геометрии Лобачевского в приложении к столкновениям частиц. Четвёртый параграф данного обзора является извлечением из этой диссертации.

Л И Т Е Р А Т У Р А :


1. Н.И. Лобачевский. Полное собрание сочинений, т.т. I-3. ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1946,1949,1951 гг.
2. Янош Больаи (Я.Бойяи). Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную... ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950 г.
3. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей . ГИТТЛ, Москва, 1956 г.
4. Н.В. Ефимов. Высшая геометрия. ГИТТЛ, Москва, 1953 г.
5. В. Паули. Теория относительности. ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1947 г. (Здесь имеются ссылки на работы А. Зоммерфельда и В. Варичака ).
6. А.П. Котельников. Принцип относительности и геометрия Лобачевского - сборник In memoriam N.I. Lobatshevsckii т. 2. Казань, 1927 г., стр. 37-66.
7. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, Москва, 1955 г.
8. Б.А. Розенфельд, Александр Петрович Котельников. Историко-математические исследования. Вып. IX. ГИТТЛ, Москва, 1956 г.
9. Н.А. Черников. Диссертация, Дубна. 1957 г. Научные доклады высшей школы. Физ. мат. науки , № 2, 158, 1958 г.
10. Е.В. Майков и Н.А. Черников. Научные доклады высшей школы. Физ.-мат. науки, № 4, 129, 1958 г.