ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Я.СМОРОДИНСКИЙ

ОБ ИЗОТРОПНЫХ МОДЕЛЯХ ВСЕЛЕННОЙ[x)]

1 9 5 7 год

---

x) Доклад на УП Совещании по космогонии 5-7 июня 1957 г.

P-72

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Я.СМОРОДИНСКИЙ

ОБ ИЗОТРОПНЫХ МОДЕЛЯХ ВСЕЛЕННОЙ[x)]

1957 год

x) Доклад на УП Совещании по космогонии 5-7 июня 1957 г.

§ I. Введение.

Из общего принципа относительности, как известно, могут быть сделаны важные заключения о свойстве метрики пространства и времени.

Фундаментальный результат в этой области принадлежит Фридману, который показал, что уравнения тяготения для изотропной модели имеют только нестационарные решения. Старое стационарное решение уравнений с космологической постоянной, полученное Эйнштейном, оказалось неустойчивым и тем самым физически неудовлетворительным.

Открытие красного смещения Хэблом блестящим образом подтвердило нестационарность метрики. С тех пор, по-видимому, нет больше никаких физических оснований для введения в уравнение тяготения космологической постоянной.

Задачей настоящего доклада является анализ того, насколько современные экспериментальные данные о красном смещении описываются изотропной однородной моделью. Следует иметь в виду, что сама гипотеза об однородности и изотропии Вселенной является произвольной и может в принципе не согласоваться с наблюдениями, по крайней мере, на ранних этапах эволюциии модели. Сейчас неясно, в какой мере неоднородности плотности во Вселенной могут исказить результаты анализа, поэтому, рассматривая далее материалы наблюдений с точки зрения однородной и изотропной модели, мы всегда должны помнить об ограниченности такого анализа.

Экспериментальные данные, о которых будет идти речь, были недавно опубликованы в двух работах из Маунт Паломарской обсерватории. Юмасон, Майеле и Сандаж(I) опубликовали данные о красном смещении для скоплений галактик до скоростей 0,2c

(60000 км/сек). Бом[2] продолжил эти измерения до скоростей 0,4с(I20000 км/сек) и заново проанализировал старые данные.

В результате авторы обеих работ проходят к выводу о том, что согласие с наблюдением дает закрытая модель или в крайнем случае, модель плоская (кривизна = 0). Этот вывод представляется неубедительным. Обсуждение этого вопроса и является темой доклада.

§ 2. Основные формулы

Приведем основные формулы изотропной и однородной модели(ср[3]). Метрика такой модели характеризуется линейным элементом:

$$ds^2 = d\tau^2 - g^2(\tau)\left[dx^2 + S^2(x)\,d\Omega\right] \qquad (2.I)$$

Здесь $d\Omega$ - элемент трехмерного телесного угла, скорость света положена равной единице, а функция $S(x)$ есть:

$$S(x) = \begin{cases} \sin x & \text{(закрытая модель)} \\ x & \text{(плоская модель)} \\ \mathrm{Sh}(x) & \text{(открытая модель)} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Таким образом, $S^2(x)\,d\Omega$ - есть элемент поверхности сферы. Вместо времени τ вводится переменная η по формуле:

$$d\tau = g(\eta)\,d\eta \qquad (3.2)$$

Тогда линейный элемент переписывается в симметричном виде:

$$ds^2 = g^2(\eta)\left[d\eta^2 - dx^2 - S^2(x)\,d\Omega\right]. \qquad (2.4)$$

Функция $g(\tau)$ удовлетворяет уравнениям (ср.[4]):

$$2\ddot{g}g + g^2 = -\xi\zeta$$
$$\ddot{g} = -\frac{1}{6}\varkappa\rho g \qquad (2.5)$$

Здесь ζ = +I,0,- I для закрытой, плоской и открытой моделей соответственно. Точка означает дифференцирование по τ, ρ , средняя плотность, $\varkappa$ - гравитационная постоянная (6,67.I0^{-8}.8):

$$\varkappa = 1{,}67\cdot10^{-6}\frac{см^3}{г\ сек^2} \qquad (2.7)$$

Введем "постоянную Хэбла" (функция от τ):

$$h = \dot{g}/g = \frac{1}{g^2}\frac{dg}{d\eta} \qquad (2.8)$$

Тогда тип модели определяется знаком величины:

$$\frac{1}{3}\frac{\varkappa\rho}{h^2} - 1 \lessgtr 0. \qquad (2.9)$$

Знак равенства отвечает плоской модели. Введем величину:

$$\rho_{кр} = \frac{3h^2}{\varkappa} \qquad (2.10)$$

Тип модели определяется соотношением между ρ и $\rho_{кр}$:

$$\rho > \rho_{кр} \quad \text{(закрытая)}$$
$$\rho = \rho_{кр} \quad \text{(плоская)} \qquad (2.11)$$
$$\rho < \rho_{кр} \quad \text{(открытая)}$$

При современном значении $h^{(2)}$ x):

$$h = 150\ \frac{км/сек}{MPS} = 0{,}18\cdot10^{-9}\ лет. \qquad (2.12)$$

---

x) Хьюмасон и др.(I) дают $h = 180 \pm 20\%$

$$\rho = 5,5 \cdot 10^{-29} \frac{г}{см^3} \qquad (2.13)$$

Решения уравнений (2.5) может быть записано в параметрической форме ([3]) для закрытой модели:

$$\begin{aligned} q &= q_0 (1 - \cos\eta) \\ \tau &= \tau (\eta - \sin\eta) \end{aligned} \qquad (2.14)$$

и для открытой модели:

$$\begin{aligned} q &= q_0 (ch\eta - 1) \\ \tau &= \tau (sh\eta - \eta) \end{aligned} \qquad (2.15)$$

В этих решениях q_0 постоянная - интегрированная.

Из формул (2.14) и (2.15) можно вычислить значение постоянной Хэбла (2.8):

$$h = \frac{1}{q^0} \frac{\sin\eta}{(1-\cos\eta)^2}; \qquad (2.16)$$

или

$$h = \frac{1}{q^0} \frac{sh\eta}{(ch\eta - 1)^2}; \qquad (2.17)$$

Для двух моделей соответственно. Из формул получается связь между временем τ и h:

$$\tau = a \frac{1}{h}; \qquad (2.18)$$

где

$$a = \frac{\sin\eta (\eta - \sin\eta)}{(1-\cos\eta)^2}, \qquad (2.19)$$

или

$$a = \frac{\operatorname{sh}\eta(\operatorname{sh}\eta - \eta)}{(\operatorname{ch}\eta - 1)^2}, \tag{2.20}$$

При $\eta \ll 1$ имеем:

$$\tau = \frac{2}{3} h \tag{2.21}$$

независимо от модели. Для закрытой модели $a < 2/3$, для открытой $> 2/3$. Для старой закрытой модели $(\eta \gg 1)$ $a \to 1$ и

$$\tau \approx \frac{1}{h}; \tag{2.22}$$

Отсюда видно, что старая открытая модель дает наибольшую шкалу времени. При значении $h^{-1} = 5 \cdot 10^9$ лет представляется, что только такая модель может быть согласована с другими астрофизическими и геологическими данными. Закрытая модель дает $\tau < 3 \cdot 10^9$ лет, значение явно заниженное.

Для дальнейших обсуждений нам понадобится еще одна величина:

$$q = \frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_{кр}} = -\ddot{g}g/\dot{g}^2 . \tag{2.23}$$

Нетрудно видеть, что имеет место равенство:

$$|1 - 2q| = (gh)^2 \tag{2.24}$$

Если наблюдения определить q и h, то отсюда определяется и g и тем самым определяются все параметры модели. Обозначим (для всех моделей):

$$K = |1 - 2q|^{1/2} . \tag{2.25}$$

Тогда

$$q = (hk)^{-1} \qquad (2.26)$$

$$q_0 = h^{-1} k^{-3} \qquad (2.27)$$

Далее ,

$$(1-q)/q = ch\,\eta \quad \text{или} \quad \cos\eta \qquad (2.28)$$

(в зависимости от того: $(1-q)/q > 1$ или < 1) и

$$\tau = \frac{1}{h}\left(k^{-2} - q \ln\frac{1+k}{1-k}\right) \qquad (2.29)$$

§ 3. Красное смещение

Эффект Хэбла определяется из связи между видимой яркостью скопления галактик и красным смещением. Поток энергии от дальнего светящегося объекта определяется формулой:

$$J = \mathrm{const}\,\frac{q^2(\eta - x)}{q^4(\eta)\,S^2(x)}; \qquad (3.1)$$

Предполагается, что свет излучается в момент времени, отвечающий $\eta - x$ и зарегистрирован наблюдателем в момент η, $S(x)$ определяется формулой (2.2). Красное смещение определяется формулами:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \qquad (3.2)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0}\,\frac{q(\eta - x)}{q(\eta)} \qquad (3.3)$$

где λ_0 видимая длина волны λ - длина волны той же линии для близкого объекта. Нужная для сравнения с опытом формула получается, если исключить из (3.I) - (3.3) переменную χ, представив y в виде ряда по степеням z. Такое выражение с точностью до членов $1/z$ получено Робертсоном и носит название - формула Робертсона [5]. При разложении надо пользоваться формулой:

$$\frac{dq}{d\eta} = q\dot{q} \qquad (3.4)$$

Кроме того, надо использовать формулы:

$$\dot{q} = qh; \quad \ddot{q} = -qqh^2; \quad \dddot{q} = 2qqh^3 \qquad (3.5)$$

Последняя формула следует их (2.5)[xx].

Будучи выражены через h и q, все формулы становятся применимыми как для закрытой, так и для открытой (и для плоской мо~~д~~делей). Для z получаем:

$$z = h(x) + \frac{1}{2}(1+q)(hx)^2 + \frac{1}{6}(1+4q)^2(hx)^2.$$

Решая относительно χ и используя (2.24):

$$\chi = z(1-2q)^{1/2}\left\{1 - \frac{1}{2}(1-q)z + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{1}{2}(1+q)^2 - \frac{1}{6}(1+4q)\right]z^2 + \cdots\right\}$$

---

x) Очевидно, что в первом приближении $y \sim z^{-2}$, так как z пропорционально в этом приближении расстоянию. Поэтому разложение начинается с члена $1/z^2$.

xx) В литературе я встречал вывод, не использующий этих формул γ ср^6 /, что лишает результат практического смысла. Мне не известно, была ли когда-нибудь опубликована простая формула (3.8).

подставляя в (3.I), найдем:

$$\mathcal{J} = \mathrm{Const}\,\frac{h^2}{z^2}\left[1-(1-q)z+\frac{1}{4}(3-2q-q^2)z^2+\cdots\right]$$

Из этой формулы видно, что отбрасывать член с z^2 при $z \sim 0{,}4$ нельзя. Если представить $M = -2{,}5 \log_{10} \mathcal{J} + \mathrm{const}$, то придем к обычной записи этой формулы.

Обратимся к экспериментальным данным.

Упомянутые выше авторы указывают, что их данные укладываются на кривую, описываемую двучленной формулой (без члена cz^2, со следующим значением q:

$$\begin{aligned} &\mathrm{HMS}^{(1)} && q \simeq 2{,}6 \\ &\mathrm{Баum}^{(2)} && q \simeq 1 \pm 0{,}5 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Данные HMS, по-видимому, завышены: это утверждает Бом, с этим согласен и профессор Д.Я.Мартынов, докладывающий на настоящем совещании.

При интерпретации данных (3.9) следует иметь в виду, как это указано в (I), что значение q получено в предположении, что абсолютная яркость объекта не меняется и что не происходит заметного поглощения излучения в межгалактическом пространстве (и что, кроме того, правильно произведен пересчет к болометрическим величинам).

Очевидно, что сейчас нет никаких данных, которые позволили бы оценить эти ошибки. Можно лишь заметить, что, если абсолютная яркость меняется так, что $|\dot{\mathcal{J}}/\mathcal{J}| \ll h$, то этим изменением можно пренебречь. Предположение о $\dot{\mathcal{J}} > 0$ эквивалентно увеличению q ("закрытые" модели), $\dot{\mathcal{J}} < 0$ эквивалентно уменьшению q ("открытые" модели). Поглощение также приводит к увеличению q.

Результат Бома (3.9) можно сформулировать так. Если откладывать величину $\frac{y\tau^2}{h^2}$ как функцию z (в произвольных единицах), то все экспериментальные точки укладываются в интервале $0 < z < 0,4$ между двумя прямыми:

$$y_1 = 1 - 1/2\, z$$

и

$$y_2 = 1 + 1/2\, z$$

Отсюда Бом делает вывод, что этот опыт говорит в пользу закрытой модели. Однако, если учесть член, пропорциональный z^2, то, как видно из рис.I, нижняя кривая лежит в области открытой модели. Поэтому из данных Бома делать вывод о том, что модель закрытая, нельзя.

Если принять во внимание соображения, высказанные в конце § 2 о шкале времени, то открытая модель оказывается более вероятной.

В пользу открытой модели говорят и данные о плотности ρ x). Как показала дискуссия на этом совещании, почти все оценки плотности дают значение $\rho < \rho_{кр}$ (2.I3).

Таким образом, можно заключить, что существующие опытные данные могут быть согласованы в рамках открытой модели. Вопрос же о применимости самой изотропной и однородной модели требует для своего анализа значительно большего числа наблюдений.

---

x) К сожалению, из-за малой точности наблюдений нельзя еще оценить из (3.9) величину плотности и значение параметра η. Можно лишь утверждать, что $\eta > I$ и $\rho < \rho_{кр}$.

Л и т е р а т у р а

I. H.L. Humasen, N.U. Mayall. a. A.R. Sandage, A.J. 61, 97 (1956).

2. W.A. Bamm, A.J. 62, 6 (1957).

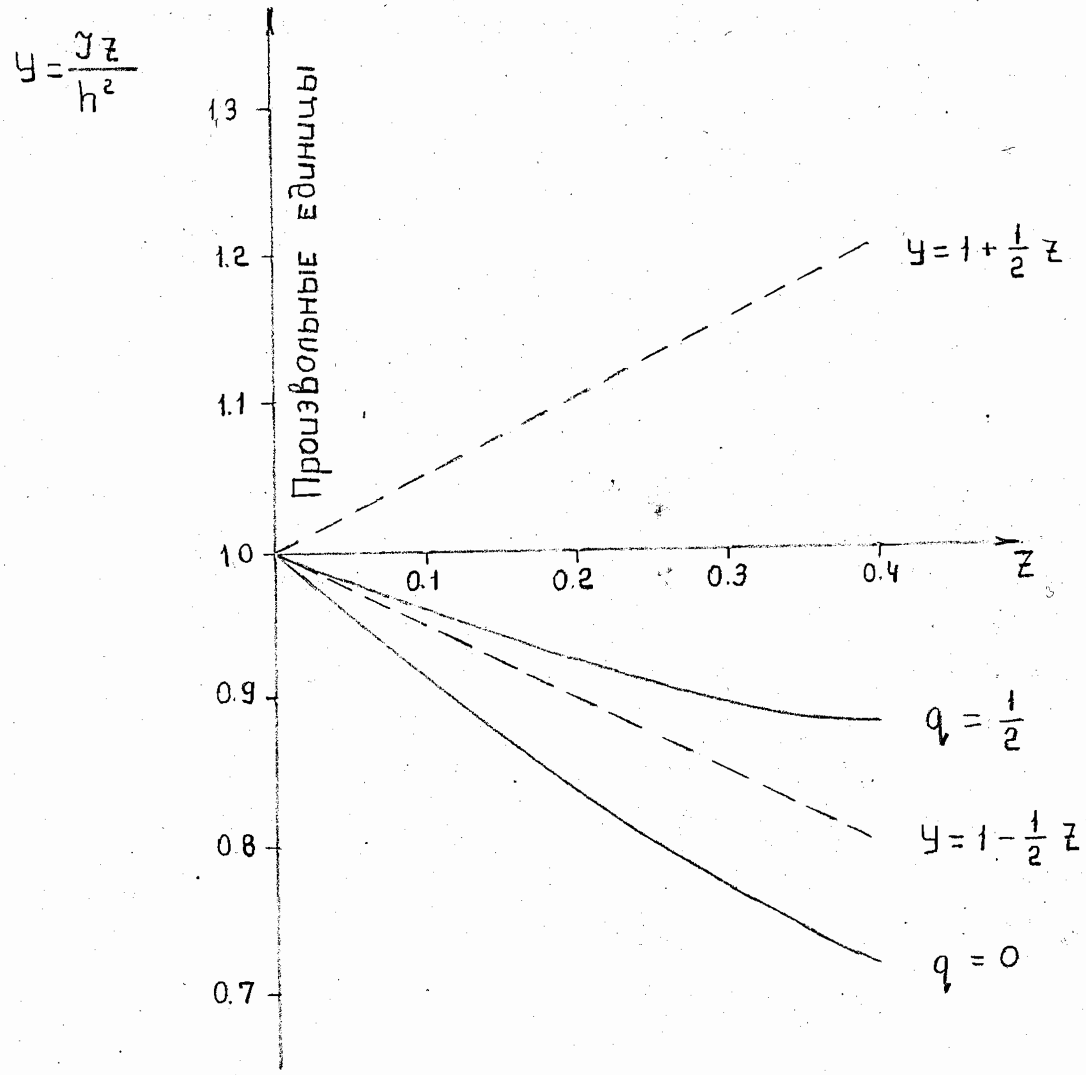
3. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Теория поля, гл.XI М-Л 1948.

4. А.Эйнштейн, Сущность теории относительности. Приложение I, Москва, 1955.

5. Robertson, Publ. A.S.P. 67, 82 (1955).

6. Heckman, Theorie der Kosmologie.

Рис.I. Схематический график зависимости видимой яркости от красного смещения. Кривые нарисованы в предположении, что уменьшение яркости связано лишь с удалением объекта - форм. (3.8). Пунктирные линии ограничивают область, в которой (по Бому) лежит экспериментальная кривая. Кривая $q = 0$ отвечает старому ($\eta \gg 1$) открытому миру. Кривая $q = 1/2$ разграничивает области закрытой и открытой моделей.



$y = \frac{\mathfrak{I} z}{h^2}$
Произвольные единицы
1,3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.1
0.2
0.3
0.4
Z
$y = 1 + \frac{1}{2} z$
$q = \frac{1}{2}$
$y = 1 - \frac{1}{2} z$
$q = 0$