



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

О.И. Завьялов, В.П. Павлов

P-718

МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ
РЕАКЦИИ $\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N$
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

ФАН СССР, 1961, т. 139, № 1, с. 79-82.

О.И. Завьялов^{х)}, В.И. Павлов^{х)}

P-718

МАТРИЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ
РЕАКЦИИ $\pi + N \rightarrow \pi + \pi + N$
ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

10.7.8/8 48.

Объединенный институт
средних исследований
ВИАИМТЕКА

^{х)} Математический институт им. Стеклова АН СССР

Интегральные представления Мандельштама^{/1/} совместно с условием унитарности приводят к замкнутой системе уравнений относительно амплитуд рассеяния и дают, по-видимому, объективную информацию о соответствующих матричных элементах. Естественно поэтому привлечь определенные представления о локализации и характере особенностей S -матрицы для описания реакций с участием пяти частиц. Такие исследования имеют двойную цель. С одной стороны, они могут привести к удовлетворительным выражениям для матричных элементов. С другой стороны, хорошие результаты будут служить аргументом в пользу исходных предположений об аналитическом поведении амплитуд этих процессов.

В настоящей работе мы покажем, что учет ближайших особенностей S -матрицы приводит к хорошо уже проверенным формулам, полученным из других соображений, и намечает перспективы для улучшения этих формул.

Мы сосредоточим внимание на рождении добавочного мезона при мезон-нуклонных столкновениях. Однако, тем же методом легко рассмотреть фоторождение двух мезонов на нуклоне и процессы распадного типа, например, τ и τ' распад.

1. Кинематика

Рассмотрим три изотопически связанные между собой реакции рождения добавочного мезона при столкновениях π^- -мезона и протона:



Для упрощения кинематических выкладок будем считать нуклоны скалярными частицами. В этом смысле все изложенное ниже является моделью. Однако, спин нуклонов влияет только на способ выделения инвариантных функций из амплитуды реакции, что несущественно в рамках нашего рассмотрения.

Остановимся подробно на процессе (1). Процессы (2) и (3) могут быть разобраны совершенно аналогичным образом. Пусть P_1 - импульс π^+ мезона, P_2 - импульс конечного π^- -мезона, P_3 - импульс нейтрона, P_4 - импульс начального π^- -мезона, P_5 - импульс протона.

Обычным способом введем инвариантную амплитуду A_1 реакции (1), записав символически $\hat{S} = \hat{I} + i A_1 \delta(\Sigma P) / 2\pi (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5)^{1/2}$, где \hat{S} - матрица рассеяния, ω_i - энергия i -й частицы, $\delta(\Sigma P)$ - дельта-функция, выражающая закон сохранения импульса. Амплитуда A_1 зависит лишь от инвариантных комбинаций импульсов P_i . Из этих пяти импульсов можно составить пятнадцать инвариантов $u_{ik} = u_{ki} = (P_i + P_k)^2$. Диагональные элементы матрицы u просто связаны с массами участвующих в процессе частиц: $u_{ii} = 4m_i^2$ ($m_i^2 = P_i^2$). На остальные десять инвариантов закон сохранения импульса накладывает пять связей:

$$\sum_{i \neq k} u_{ik} = m_k^2 + \sum_i m_i^2 \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Таким образом, из десяти переменных u_{ik} независимыми оказываются только пять. В качестве независимых мы выбираем следующие переменные:

$S_1 = u_{23}$ - энергия в системе центра масс нейтрона и π^- -мезона,

$S_3 = u_{12}$ - энергия в системе центра масс π^+ и π^- мезонов,

$S_2 = u_{13}$ - энергия в системе центра масс нейтрона и π^+ -мезона и две передачи импульса, например:

u_{35} - передача импульса между нуклонами,

u_{14} - передача импульса между мезонами.

Приведем для справок выражения остальных инвариантов через независимые, по-новому обозначив также энергию в главном канале реакции $u_{45} = W$.

$$W = S_1 + S_2 + S_3 - M^2 - 2\mu^2$$

$$u_{15} = 2M^2 + 4\mu^2 - S_2 - S_3 - u_{14}$$

$$u_{25} = 2M^2 + 4\mu^2 - S_1 - u_{35} - u_{14}$$

$$u_{24} = 3\mu^2 - S_3 - u_{35} - u_{14}$$

$$u_{34} = 3M^2 + 3\mu^2 - S_1 - S_2 - u_{35}.$$

Здесь M - масса нуклона, μ - масса мезона.

В дальнейшем все переменные, кроме W , S_1 , S_2 и S_3 , мы будем называть передачами импульса. Приведем также значения переменных S_1 , S_2 и S_3 при пороговой энергии $W = (M + 2\mu)^2$: $S_1^0 = S_2^0 = (M/\mu)^2$; $S_3^0 = 4\mu^2$.

Важным обстоятельством является то, что вблизи энергетического порога реакции передачи импульса U_{iK} существенно меньше наименьшего квадрата массы возможного промежуточного состояния, соответствующего частицам i и K , в то время как S_1, S_2, S_3 достаточно велики. В дальнейшем это даст нам основание пренебречь зависимостью амплитуды A_1 от передач импульса, ограничившись изучением поведения функции A_1 по переменным S_1, S_2 и S_3 при фиксированной энергии.

При энергиях выше пороговой $W > (M + 2\mu)^2$ область физических значений S_1, S_2 и S_3 во всяком случае ограничена условиями $S_1 \geq (M + \mu)^2$, $S_2 \geq (M + \mu)^2$, $S_3 \geq 4\mu^2$ и, ввиду соотношения $S_1 + S_2 + S_3 = W + M^2 + 2\mu^2$, лежит внутри треугольника, заштрихованного на рис. 1. При пороговой энергии $W = (M + 2\mu)^2$ треугольник стягивается в точку.

11. Аналитические свойства и условие унитарности

Наша цель - получить линейные члены разложения матричного элемента по относительным импульсам участвующих в реакции частиц. Предположим, что амплитуда A_1 вблизи порога хорошо аппроксимируется выражением:

$$\begin{aligned}
 A_1(S_1, S_2, S_3) = & A_1(S_1^0, S_2^0, S_3^0) + \\
 & + \frac{S_1 - S_1^0}{\pi i} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \frac{\sigma_1^{(1)}(S') dS'}{(S' - S_1^0)(S' - S_1 - i\varepsilon)} + \frac{S_2 - S_2^0}{\pi i} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} dS' \times \\
 & \times \frac{\sigma_2^{(1)}(S')}{(S' - S_2^0)(S' - S_2 - i\varepsilon)} + \frac{S_3 - S_3^0}{\pi i} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{dS' \sigma_3^{(1)}(S')}{(S' - S_3^0)(S' - S_3 - i\varepsilon)},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $\sigma_1(S_1), \sigma_2(S_2), \sigma_3(S_3)$ определяются из условия унитарности.

В представлении (4) учтены ближайшие особенности амплитуды. Оно следует из "нормального" представления Мандельштама для функции A_1 по переменным S_1, S_2 и S_3 при фиксированной W . В этом смысле (4) является аналогом аппроксимации Чини и Фубини для процессов рассеяния.

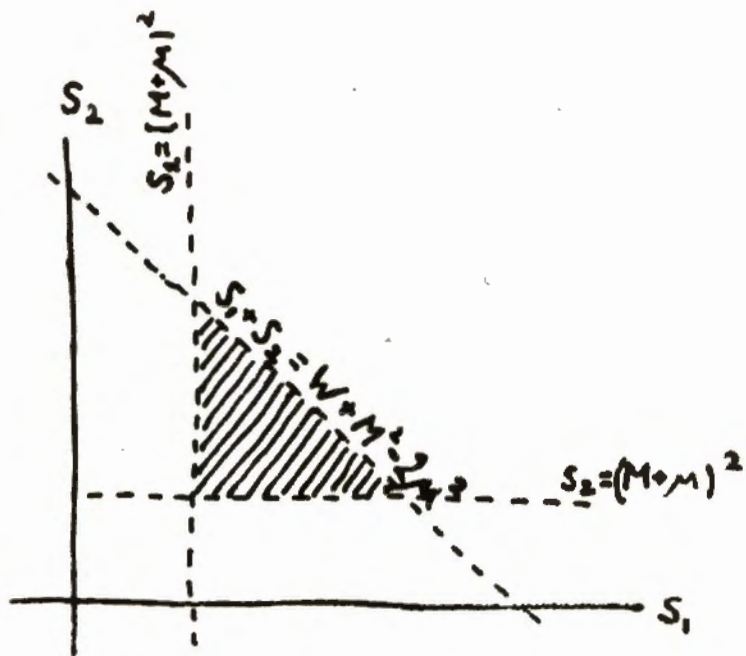


Рис. 1.

Исследование графов теории возмущений показывает, что "нормальное" мандельштамовское представление не выполняется для диаграмм с пятью внешними линиями. Сверх того, выражение (4) не учитывает зависимости A_2 от передач импульса u_{ik} и полюсных членов вида $g^2 (s_i - s_i^0) / (s_i - M^2) (s_i^0 - M^2)$. Однако, все это несущественно для нашего приближения. Действительно, разложение амплитуды по степеням импульсов есть, фактически, разложение по степеням выражений $(s_i - s_i^0)^{1/2}$, где точка s_i^0 лежит в физической области. Но поправки к нормальному представлению Мандельштама порядка $(s_i - s_i^0)$ и, следовательно, второго, неучитываемого нами порядка малости по импульсам. Физические значения передач импульса u_{ik} лежат ниже наименьшего квадрата массы промежуточного состояния, соответствующего частицам i и k . Мы вправе ожидать поэтому, что функция A_2 аналитична по переменным u_{ik} в области физических значений последних. Стало быть, в этой области функция A_2 разложима в ряд по степеням $(u_{ik} - u_{ik}^0)$ и имеет вид $C_1 + C_2(u - u^0) + C_3 + C_4 K^2$. Константа C_1 учтена первым членом правой части (4), а остаток ряда содержит более высокие степени импульса, чем первая. По той же причине мы не учитываем полюсных членов. В качестве точки вычитания в (4) мы выбираем точку пороговых значений S : $s_1^0 = s_2^0 = (M + m)^2$, $s_3^0 = 4m^2$.

$A_1(s)$ есть поэтому амплитуда реакции (1) при пороговой энергии $W = (M + 2m)^2$.

Мнимые добавки в знаменателях правой части указывают на то, что физическая амплитуда реакции (1) понимается как предельное значение функции A_2 при стремлении s_i к действительной оси сверху. Проведем этот предельный переход, воспользовавшись символическим тождеством $\frac{1}{x' - x - i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x' - x} + i\pi \delta(x' - x)$, где \mathcal{P} - символ главного значения. В результате имеем:

$$A_2(s, s_2, s_3) = A_2(s_1^0, s_2^0, s_3^0) + i\sigma_1^{(2)}(s_2) +$$

$$+ i\sigma_2^{(1)}(s_2) + i\sigma_3^{(1)}(s_3) + \sum_{\ell=1}^3 \frac{s_\ell - s_\ell^0}{\pi} \int \frac{\sigma_\ell^{(\ell)}(s')}{s' - s_\ell^0} \mathcal{P} \frac{1}{s' - s_\ell} ds'$$

Рассмотрение процессов (2) и (3) приводит к аналогичным выражениям для соответствующих амплитуд:

$$A_i = A_i(s^0) + i\sigma_2^{(i)} + i\sigma_2^{(ii)} + i\sigma_3^{(ii)} + \sum_i \frac{s_e - s_e^0}{\pi} \int \frac{\sigma_e^{(ii)}(s')}{s' - s_e^0} \rho \frac{ds'}{s' - s_e} \quad (5)$$

Воспользуемся условием унитарности для определения функций $\sigma_k^{(ii)}$. Ясно, что в эти функции входит кинематический множитель, пропорциональный первой степени импульса. Поэтому, если отбросить высшие степени импульсов, то функции σ будут содержать лишь пороговые значения неизвестных амплитуд A_i . Принимая во внимание это обстоятельство и ограничиваясь лишь двухчастичными промежуточными состояниями, запишем для процесса (1):

$$\sigma_2^{(1)} = \frac{K_{23}}{\sqrt{K_{23}^2 + \mu^2} + \sqrt{K_{23}^2 + M^2}} A_1 t_S^+ (K_{23}) \quad (6)$$

Здесь A_1 - амплитуда реакции (1) при пороговой энергии, K_{23} - модуль относительного импульса π^- -мезона и нейтрона в системе их центра масс. K_{23} - определяется из соотношения $2K_{23}^2 + \mu^2 + M^2 + 2\sqrt{K_{23}^2 + \mu^2}\sqrt{K_{23}^2 + M^2} = S_1$, t_S^+ - S волна амплитуды рассеяния $a+b \rightarrow c+d$.

$$\sigma_2^{(2)} = \frac{K_{13}}{\sqrt{K_{13}^2 + \mu^2} + \sqrt{K_{13}^2 + M^2}} \left\{ A_2 t_S^+ (K_{13}) + A_3 t_S^+ (K_{13}) \right\} \quad (6)$$

Здесь A_3 - амплитуда реакции (3) при пороговой энергии, K_{13} - относительный импульс π^+ -мезона и нейтрона в системе их центра масс. K_{13} определяется из соотношения: $2K_{13}^2 + \mu^2 + M^2 + 2\sqrt{K_{13}^2 + \mu^2}\sqrt{K_{13}^2 + M^2} = S_2$.

$$\sigma_3^{(1)} = \frac{K_{12}}{2 \sqrt{K_{12}^2 + 4}} \left\{ A_1 t_S^+ (K_{12})_{\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-} + \frac{1}{2} A_2 t_S^+ (K_{12})_{\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0} \right\}. \quad (6)$$

Здесь A_2 - амплитуда реакции (2) при пороговой энергии. K_{12} - относительный импульс π^+ и π^- мезона в системе их центра масс. K_{12} определяется из соотношения: $K_{12}^2 = \frac{S_3 - 4M^2}{4}$. Переходя к процессу (2), получаем

$$\sigma_1^{(2)} = \frac{q_{23}}{\sqrt{q_{23}^2 + M^2} + \sqrt{q_{23}^2 + M^2}} \left\{ A_2 t_S^+ (q_{23})_{\pi^0 n \rightarrow \pi^0 n} + A_3 t_S^+ (q_{23})_{\pi^0 n \rightarrow p \pi^-} \right\}. \quad (8)$$

Здесь q_{23} - относительный импульс первого π^0 мезона и нейтрона.

$$\sigma_2^{(2)} = \frac{q_{13}}{\sqrt{q_{13}^2 + M^2} + \sqrt{q_{13}^2 + M^2}} \left\{ A_2 t_S^+ (q_{13})_{\pi^0 n \rightarrow \pi^0 n} + A_3 t_S^+ (q_{13})_{\pi^0 n \rightarrow p \pi^-} \right\}. \quad (8)$$

Здесь q_{13} - относительный импульс второго π^0 -мезона и нейтрона.

$$\sigma_3^{(2)} = \frac{q_{12}}{2 \sqrt{q_{12}^2 + M^2}} \left\{ \frac{1}{2} A_2 t_S^+ (q_{12})_{\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0} + A_4 t_S^+ (q_{12})_{\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-} \right\}. \quad (6)$$

Здесь q_{12} - относительный импульс π^0 -мезонов. И, наконец, для процесса (3) имеем:

$$\sigma_1^{(3)} = \frac{P_{23}}{\sqrt{P_{23}^2 + \mu^2} + \sqrt{P_{23}^2 + M^2}} \left\{ A_3 t_{\rho \pi^- \rightarrow \rho \pi^-}^+(P_{23}) + \right. \\ \left. + A_2 t_{\rho \pi^- \rightarrow \pi \pi^0}^+(P_{23}) \right\}. \quad (6)$$

Здесь P_{23} - относительный импульс π^- -мезона и протона.

$$\sigma_2^{(3)} = \frac{P_{13}}{\sqrt{P_{13}^2 + \mu^2} + \sqrt{P_{13}^2 + M^2}} \left\{ A_3 t_{\rho \pi^0 \rightarrow \rho \pi^0}^+(P_{13}) + \right. \\ \left. + A_2 t_{\rho \pi^0 \rightarrow \pi \pi^+}^+(P_{13}) \right\}. \quad (6)$$

Здесь P_{13} - относительный импульс π^0 -мезона и протона.

$$\sigma_3^{(3)} = \frac{P_{12}}{2\sqrt{P_{12}^2 + \mu^2}} A_3 t_{\pi^0 \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^-}^+(P_{12}). \quad (6)$$

Здесь P_{12} - относительный импульс мезонов. Обращает на себя внимание тот факт, что интегральные члены в (5) второго порядка по импульсам. Пренебрегая этими членами, получим

$$A_i = A_i(s^0) + i [\sigma_1^{(i)} + \sigma_2^{(i)} + \sigma_3^{(i)}], \quad (7)$$

где $\sigma_{\kappa}^{(i)}$ определяются соотношениями (6). Разумеется, в (7) следует учесть лишь линейные по импульсам члены функций $\sigma(\kappa)$. Произведя такой учет, получим следующие формулы для матричных элементов процессов (1), (2) и (3) вблизи порога

$$\begin{aligned} \langle \pi^+ \pi^- n | \hat{S} | \pi^- p \rangle = & \rho_1 e^{i\varphi_1} \left\{ 1 + i \frac{\kappa_{23}}{\mu + M} t_{\pi^- n \rightarrow \pi^- n}^+ + \right. \\ & + i \frac{\kappa_{13}}{\mu + M} \left[t_{\pi^- n \rightarrow \pi^+ n}^+ + \rho_{13} e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)} t_{\pi^+ n \rightarrow \pi^0 p}^+ \right] + \\ & \left. + i \frac{\kappa_{12}}{2\mu} \left[t_{\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-}^+ + \frac{1}{2} \rho_{12} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} t_{\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0}^+ \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^0 \pi^0 n | \hat{S} | \pi^- p \rangle = & \rho_2 e^{i\varphi_2} \left\{ 1 + \right. \\ & + i \frac{\rho_{23}}{\mu + M} \left[t_{\pi^0 n \rightarrow \pi^0 n}^+ + \rho_{23} e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)} t_{\pi^0 n \rightarrow \rho \pi^-}^+ \right] + \\ & + i \frac{\rho_{13}}{\mu + M} \left[t_{\pi^0 n \rightarrow \pi^0 n}^+ + \rho_{23} e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)} t_{\pi^0 n \rightarrow \rho \pi^-}^+ \right] + \\ & \left. + i \frac{\rho_{12}}{2\mu} \left[\frac{1}{2} t_{\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0}^+ + \rho_{21} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} t_{\pi^0 \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}^+ \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^0 \pi^- p | \hat{S} | \pi^- p \rangle = & \rho_3 e^{i\varphi_3} \left\{ 1 + \right. \\ & + i \frac{\rho_{23}}{\mu + M} \left[t_{\rho \pi^- \rightarrow \rho \pi^-}^+ + \rho_{32} e^{i(\varphi_2 - \varphi_3)} t_{\rho \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^0}^+ \right] + \\ & + i \frac{\rho_{13}}{\mu + M} \left[t_{\rho \pi^0 \rightarrow \rho \pi^0}^+ + \rho_{31} e^{i(\varphi_1 - \varphi_3)} t_{\rho \pi^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}^+ \right] + \\ & \left. + i \frac{\rho_{12}}{2\mu} t_{\pi^0 \pi^- \rightarrow \pi^0 \pi^-}^+ \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены новые обозначения: матричный элемент реакции (i) при пороговой энергии обозначен через $\rho_i e^{i\varphi_i}$; $\rho_{ik} = \rho_k / \rho_i$.

Выражение (8) содержит три произвольных комплексных константы $\rho_i e^{i\varphi_i}$.

Если теперь составить квадрат модуля матричных элементов (8), то мы придем к формулам, полученным в работе /2/ из квантово-механических соображений. Таким образом, представление (4) автоматически приводит к правильным выражениям для матричных элементов с точностью до членов 1 порядка малости по относительным импульсам.

Формулы (8) определяют не только модуль матричного элемента, но и фазу последнего, что является их преимуществом. Формулы (8) применимы и тогда, когда S волна $\pi\pi$ -рассеяния имеет резонанс вблизи порога. В этом случае необходимо удержать в (8) зависимость амплитуд $\pi\pi$ -рассеяния от импульса. Представляется заманчивым получить квадратичные по импульсам члены амплитуд реакций (1), (2) и (3). При этом уже нужно учитывать зависимость матричных элементов от переменных u_{ik} . Но коэффициенты при вторых степенях импульсов, грубо говоря, обратно пропорциональны расстояниям до особенностей амплитуды по соответствующим переменным. Поэтому можно надеяться, что главными среди квадратичных членов являются интегралы правой части (5). Их можно приближенно найти, подставив в них первое приближение (6) для функций σ . Однако, по-видимому, такая процедура будет иметь смысл лишь при одновременном учете P -волн πN и $\pi\pi$ -рассеяния, не включенных в представление (4).

В заключение выражаем свою искреннюю благодарность А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе, Л.Д. Соловьеву и другим участникам семинара Н.Н. Боголюбова за полезную дискуссию.

Л и т е р а т у р а

1. S. Mandelstam. Phys. Rev., 112/4 (1958).
2. В.Н. Грибов. Nucl. Phys., 5, 653 (1958).