ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Л.Г. Заставенко

Р-717

# ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Изв. АН СССР. сер. мат., 1962, т 26, н 5, стр. 687-720.

Дубна 1961

Л.Г. Заставенко

Р-717

# ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Рассмотрено обращение интегрального преобразования /1.3/ для класса ядер $\psi(x)$ "близких" к $e^{-x}$.

The inversion of the integral transform has been considered /1.3/ for the class of kernals $\psi(x)$ which are "close" to $e^{-x}$.

## § 1. В в е д е н и е

Известно, что, если

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \qquad /1.1/$$

то при $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{б-i\infty}^{б+i\infty} F(p) e^{pt}\,dp. \qquad /1.2/$$

В настоящей работе рассматривается обобщение преобразования /1.1/

$$F(p) = \int_0^\infty \psi(pt) f(t)\,dt, \qquad /1.3/$$

где ядро $\psi(z)$ принадлежит классу $C_{\alpha\beta}$, определенному в § 2; про этот класс можно сказать, что его функции /в некотором отношении/ "похожи" на $e^{-z}$; в качестве примера функций этого класса можно привести $z^{-z}$, $1/\Gamma(1+z)$ и т.д.

Результатом работы являются теоремы об обращении преобразования /1.3 /, излагаемые в § 6. Рассмотренное нами обращение осуществляется посредством функции

$$\tilde{\psi}(z) = \sum_{n=n_{min}}^{\infty} z^n / \gamma(1+n); \qquad /1.4/$$

здесь

$$\gamma(z) = \int_0^\infty \psi(t) t^{z-1}\,dt, \qquad /1.5/$$

которую мы называем взаимной к ядру $\psi(z)$.

В простейшем случае / § 5, пункт 1/, когда $f(t)$ регулярна в некотором угле $|\arg t|<\delta$, обращение преобразования /1.3/ имеет вид

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \tilde{\psi}(pt)F(p)\,dp. \qquad /1.6/$$

Здесь контур $L$ состоит из лучей $\arg(p-a)=\pm\left(\frac{\pi}{2}+\delta_1\right)$, $0<\delta_1<\delta$ и число $a$ таково, что справа от контура $L$ $F(p)$ регулярна.

В случае, когда $f(t)$ – не аналитическая функция, обращение преобразования 1.3. дается двойным предельным переходом:

$$f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\sigma}^{\sigma+i\infty}\tilde{\psi}(pe^{i\varepsilon}t)F(pe^{-i\varepsilon})\,dp+\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma}\tilde{\psi}(pe^{-i\varepsilon}t)F(pe^{i\varepsilon})\,dp\right\} \qquad /1.7/$$

/см. теорему 6.2/.

Необходимо отметить, что наша теорема 6.2. об обращении преобразования /1.3/ слабее соответствующей теоремы для преобразования Лапласа, по крайней мере в том, что формула /1.7/ содержит двойной предельный переход.

Этот недостаток связан со слабостью наложенных нами на ядро ограничений и может быть устранен усилением этих ограничений; мы приведем в этой связи /без доказательства/ следующую установленную нами, но не включенную в основной текст, теорему:

пусть 1/ $\psi(t)$ принадлежит некоторому классу $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$, $\alpha>\frac{\pi}{2}$, $\beta>0$, и есть числа A,B,C D, $\frac{\pi}{2}<C<\alpha$, такие, что $0<A<|\psi(t)|<B$ при $\arg t=C$, $|t|\geq D$;

2/ есть число $\lambda$ такое, что функция $\gamma(z)$ / см. /1.5// регулярна при $\operatorname{Re} z>\lambda+1$ /это определение числа $\lambda$, но не условие на $\psi(t)$ — см. следствие 4.5.1 /;

3/ при $t>0$ дана непрерывная вместе с $n$ своей производной функция $f(t)$, такая, что $\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)\right|<Me^{\alpha t}$ при $t>0$, $k=0,1,2\ldots n$; здесь $n=\max\{1,[\lambda]+1\}$

4/ $F(p)=\int\limits_0^\infty \psi(pt)f(t)dt$

при $\mathrm{Re}\,p>\alpha$.

Тогда $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\tilde{\psi}(pt)F(p)dp=f(t)$

при $t>0$ ; здесь $b>\alpha$. /Основная тяжесть доказательства этой теоремы заключается в доказательстве /абсолютной/ сходимости интеграла $\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\tilde{\psi}(pt)F(p)dp$ ; после того, как эта сходимость установлена, остается лишь воспользоваться тем, что этот интеграл как раз и есть предел последовательности интегралов, рассматриваемой в теореме 6.2./

Отметим, что формулы комплексного обращения, рассмотренные в книге Хиршмана и Уиддера /1/ /см. ниже/, также содержат двойной предельный переход, подобный /1.7/.

Дадим схему нашего доказательства основной теоремы 6.2 на примере преобразования /1.1/. В этом случае

$\psi(z)=e^{-z}$, $\tilde{\psi}(z)=e^{+z}$ ; обозначим

$$\int\limits_b^{b\pm i\infty}\tilde{\psi}(pte^{\pm i\varepsilon})\psi(p\tau e^{\mp i\varepsilon})dp=\frac{\exp[bte^{\pm i\varepsilon}-b\tau e^{\mp i\varepsilon}]}{-te^{\pm i\varepsilon}+\tau e^{\mp i\varepsilon}}\equiv \qquad /1.8/$$

$$\equiv \varphi_\pm(\varepsilon,b,t,\tau).$$

Подставив это в правую часть /1.7/, получаем для нее

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty f(\tau)d\tau\left[\varphi_+(\varepsilon,b,t,\tau)-\varphi_-(\varepsilon,b,t,\tau)\right].$$

Легко показать, что это выражение стремится к $f(t)$ при $\varepsilon\to 0+$, если $t>0$ и $f(\tau)$ непрерывна при $\tau=t$. Таким образом, наша основная теорема доказывается очень просто.

Большой объем работы объясняется тем, что функции $\psi(z)$ нашего класса, будучи в основном похожи на $e^{-z}$, не обладают ее простыми свойствами, так что, например, вместо $|e^{az}||e^{bz}|=|e^{(a+b)z}|$ нам придется пользоваться громоздкими оценками леммы 3.8.; вместо соотношения $\psi(z)\tilde{\psi}(z)=1$, верного при $\psi(z)=e^{-z}$, нам приходится пользоваться формулой /5.2/, доказывать обобщение формулы Стирлинга /4.2/ и т.д.

Для удобства ознакомления с работой перечислим содержание отдельных параграфов.

§ 2. Дается определение класса ядер, для которого мы в дальнейшем рассматриваем обращение преобразования /1.3/; иначе-даны условия, достаточные для того, чтобы $\psi'(z)$ обладала асимптотическими свойствами, при которых мы можем обосновать избранную нами процедуру обращения /1.3/, т.е., чтобы для $\psi(z)$ имела место теорема 3.6.

Не могут ли условия §2 пункт 1 быть ослаблены так, чтобы теорема 3.6 все же имела место? Легко показать, что, если угол в условии 2.1.3/ заменить на меньший: $\frac{\pi}{2}+\delta_1 < |\arg t| < \alpha-\delta$, где угол $\delta$ -любой более 0, а угол $\delta_1$ -некий фиксированный угол /$\delta_1>0$/, то теорема 3.6. нарушается. Точно так же она нарушается, если в условии 2.1.2/ угол $|\arg t|<\delta$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ заменить на меньший $0<\delta<\delta_1<\frac{\pi}{2}$.

Необходимость ограничения типа 2.1.4/ на $|\psi(z)|$ сверху вытекает из следующего: рассмотрим целую функцию

$$\psi_1(z)=\int_0^{\infty} e^{+zs}ds/\Gamma(1+s).$$

Легко показать, что

$$z\psi_1(z)\longrightarrow 1 \quad при \quad |z|\longrightarrow\infty \qquad /1.9/$$

равномерно в любом угле $|\arg(z)|<\delta<\pi$ и что $\psi_1(z)$ стремится к плюс бесконечности при $z\to-\infty$ сильнее любой функции $\exp[z^n]$. Пусть $\psi(z)\in e_{\alpha\beta}$. Тогда функция $\tilde{\psi}(z)=\psi(z)\exp\psi_1(iz)$ удовлетворяет условиям 2.1.1/, 2.1.2/, 2.1.3/; однако теорема 3.6 для нее не выполняется. Заметим также, что функция $\tilde{\psi}(z)=\psi(z)\exp\psi_1(e^{i\alpha'}z)$, где $\frac{\pi}{2}<\alpha'<\alpha$, не удовлетворяет условию 2.1.3/ ибо гармоническая функция $Re\,\psi_1(e^{i\alpha'}z)$ на луче $\arg z=-\alpha'$ принимает очень большие положительные значения и поэтому по известному свойству гармонических функций /и с учетом/1.9// вблизи от этого луча принимает очень большие отрицательные значения.

Таким образом, надо ожидать, что теорема 3.6. остается в силе, если оставить условия 2.1.1/,2.1.2/, 2.1.3/ без изменений, а условие 2.1.4/ заменить на более слабое: есть положительные $\delta_1$ и $q$ такие, что $\psi(z)=O[\exp|z|^q]$ при $|z|\to\infty$ равномерно в углах $||\arg z|-\frac{\pi}{2}|<\delta_1$. Доказать это утверждение нам не удалось.

Переходим к параграфу 3. Как ясно уже из предыдущего, основная в нем теорема 3.6 об асимптотических свойствах функций класса $e_\alpha$ ; ее доказательство занимает п.п. 32-6. Теоремы 3.7 и 3.8 весьма просто вытекают из теоремы 3.6. Оценки, содержащиеся в следствии 3.7 и весьма неизящном следствии 3.8 , необходимы для дальнейшего.

В §4 основная - теорема 4.2 об асимптотике функции $\gamma(z)$, см. /1.5/; ее доказательство занимает п.п. 4.2.5 .

Пункты 4.6 и 4.7 не имеют отношения к основной линии работы, поэтому изложены весьма сжато; они нужны нам, чтобы указать подкласс ядер из класса, рассмотренного в книге[1], для которого применим наш метод обращения.

В пунктах 1 и 2 §5 мы исследуем асимптотические свойства функции $\tilde{\psi}(z)$ /см. /1.4//. Лемма 5.4 содержит доказательство формулы, аналогичной формуле /1.8/; на этой формуле в дальнейшем основано доказательство нашей основной теоремы 6.2 . Попутно отметим не включенную в текст формулу $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \tilde{\psi}(x)x^{-z}dx = 1/\gamma(z)$ при $Re\,z > 1+\lambda$; здесь $L$ -контур, начинающийся и кончающийся в $-\infty$ и обходящий вокруг точки $x=0$ против часовой стрелки. Формула эта аналогична интегральному представлению Ганкеля для $1/\Gamma(z)$ и легко доказывается по теореме Карлсона /см.[4] стр. 213/.

О содержании §6 уже говорилось выше. Далее мы остановимся на отношении нашей работы к другим работам. Для ядер

$$\psi_\nu(t)=\sqrt{t}\,K_\nu(t) \quad \text{и} \quad \psi_{km}(t)=e^{-\frac{t}{2}}t^{-k}W_{km}(t)$$

/здесь $K_\nu(t)$-экспоненциально убывающее решение уравнения Бесселя с мнимым аргументом, а $W_{km}(t)$-функция Уиттекера/ теоремы комплексного обращения преобразования /1.3/ были найдены Мейером[3]. Они могут быть получены, хотя и при более тяжелых ограничениях на гладкость преобразуемой функции $f(z)$ , и по нашему способу: для $\psi_{km}(t)$ взаимная/по нашей терминологии/ функция, использованная Мейером, совпадает с функцией $\tilde{\psi}_\nu(x)$

/формула /5.1.3/[1]/ при определенном выборе $V$ ; в случае $\psi(t)=\sqrt{t}K_\nu(t)$ формула обращения, использованная Мейером, связана с нашей наподобие того, как формула

$$f(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} sh\,pt\,F(p)dp$$

обращения преобразования Лапласа связана с обычной

$$\left(\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-pt}F(p)dp = 0\ !\ \right).$$

В книге Хиршмана и Уиддера[1] рассмотрен класс ядер, который характеризуется тем общим свойством, что, если $F(p)=\int_0^\infty\psi(pt)f(t)dt$ и ядро $\psi(z)$ принадлежит этому классу, то функция $F(p)$ имеет при $p>0$ нулей не больше, чем их имеет функция $f(t)$ при $t>0$. Каждое ядро этого класса может быть представлено в виде

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\gamma(u)u^{-z}du, \qquad /1.10/$$

где

$$\frac{1}{\gamma(1-s)}=e^{-cs^2+bs}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_k}\right)e^{\frac{s}{a_k}} \qquad /1.11/$$

$\sum\frac{1}{a_k^2}<\infty$ , числа $a_k$ , $b$ , $c$ вещественны, $\psi(t)$ и $\gamma(z)$ связаны формулой /1.5/. Нами показано /п.п. 4.6–7/, что, если все числа $a_k$ более $-1$ и $a_k/k\longrightarrow 1$ при $k\to\infty$, то функция $\psi(z)$, определенная /1.10/ и /1.11/, принадлежит к любому классу $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ с $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

С другой стороны, ясно, что функция $\gamma(z)$ , определенная /1.11/, вообще говоря, не обладает асимптотическими свойствами, утверждаемыми теоремой 4.2 . Таким образом, классы ядер, рассмотренные в[1] и в нашей работе, пересекаются, но не совпадают. Относительно методов, применяемых нами и в[1], следует определенно сказать, что наш метод несравненно беднее и слабее, чем используемые в[1]; это различие имеет непосредственное отношение к силе полученных результатов: результаты, излагаемые в[1], по силе соответствуют, например, наиболее точной форме теории преобразования Лапласа; наши же – слабее, чем излагаемая обычно в учебниках элементарная форма этой теории.

К этому надо добавить, что, по нашему мнению, полученный нами результат не может быть существенно усилен без наложения дальнейших ограничений на класс ядер. Относительно результатов, полученных нами и излагаемых в /1/, следует сказать, что они не пересекаются: теория комплексного обращения, весьма похожая на нашу, развита в /1/ для подкласса, который не имеет общих точек с рассмотренным нами классом ядер; для подкласса же, по которому классы ядер наш и из /1/ пересекаются, в /1/ не дано формулы комплексного обращения. В этом смысле наша работа дополняет /1/ x/.

Наконец, мы дадим краткий комментарий к приложению, где излагается задача из области расходящихся рядов, приведшая к нашей работе, и еще одна задача из той же области, смежная с этой. При ознакомнлении с доказательством теоремы М.Л. Картрайт /неполная теорема включения для абелевых средних/ напрашивается мысль, что теорема такого типа может быть установлена и для других методов суммирования, получаемых из /$A, \varphi$/ заменой $e^{-z}$ на близкие к ней функции. Из попытки такого обобщения теоремы Картрайта и возникла наша работа; само обобщение дано в приложении 1; оно имеет место для некоторого подкласса из рассмотренного нами класса ядер.

Другое красивое свойство функций этого подкласса при использовании их как суммирующих функций дано в приложениях 2 и 3. Приложение 2 содержит обобщение результата приложения 1. Теорема 1 Приложения 3 дает самостоятельный, не связанный с основной работой, результат: показано, как по виду функции $\varphi(x,\alpha)$,

$$\left( \varphi(x,\alpha) \longrightarrow 1 \quad \text{при} \quad \alpha \longrightarrow 0+ \right)$$

определить область переменного $z$, в которой /ср /10/, гл 8, §2 и 3/

$$\sum_{0}^{\infty} \varphi(n,\alpha) z^{n} \longrightarrow 1/(1-z) \qquad \text{при} \quad \alpha \longrightarrow 0+ .$$

Теорема 2. Приложение 3 на основании теоремы 1 устанавливает обычным образом по расположению особых точек функции $f(z)$ $\left[ f(z) = \right.$ $\left. = \sum a_n z^n \text{ при } |z| < R \right]$ область, в которой

x/ Наш способ комплексного обращения, несколько измененный, применим и в случае: $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k/k) = \Omega > 0$.

$$\sum a_n z^n \varphi(n,\alpha) \to f(z) \quad \text{при} \quad \alpha \to 0+.$$

Основная в Приложении 3–теорема 3, в которой с помощью теоремы из приложения 2 показано, что, если $\psi(z)$ принадлежит к классу, определенному в теореме 3 Приложения 1, то

$$\lim_{\alpha \to 0+} \sum a_n z^n \psi(\alpha n)$$

не существует ни в одной точке вне звезды, указанной в теореме 2 Приложения 3. Теорема типа теоремы 3 известна, например, для метода Бореля B'.

## §2. Определение классов $\mathcal{C}_\alpha$ и $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$.

2.1

Мы будем говорить, что функция $\psi(t)$ принадлежит классу $\mathcal{C}_\alpha$, $\psi(t) \in \mathcal{C}_\alpha$ / у нас всегда $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ /, если:

2.1.1/ $\psi(t)$ регулярна в области $-\alpha < \arg t < \alpha$, $|t| > 0$ и не имеем нулей в части $|t| > L$, $L \geq 0$ этой области,

2.1.2/ $\psi(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$ равномерно в любом угле $|\arg t| \leq \delta < \frac{\pi}{2}$,

2.1.3/

Для любого $\delta$, $0 < \delta < (\alpha - \frac{\pi}{2})/2$ и любого $a > L$ / $L$ – число, входящее в условие 2.1.1// есть число $M > 0$ такое, что

$$|\psi(t)| > M \quad \text{при} \quad |t| \geq a, \quad \delta + \frac{\pi}{2} \leq \arg t \leq \alpha - \delta,$$

2.1.4/.

Есть число $q > 1$ такое, что $\psi(t) = O[\exp|t|^q]$ при $|t| \to \infty$ равномерно во всем угле $|\arg t| \leq \alpha$.

2.2

Мы будем говорить, что функция $\psi(t)$ принадлежит классу $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$, $\psi(t) \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$, если $\psi(t) \in \mathcal{C}_\alpha$ и есть число $\beta$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, такое, что функция $\varphi(\tau) \equiv \psi(e^\tau)$ регулярна внутри угла $|\pi - \arg \tau| \leq \beta$ и ограничена во всем этом угле.

## § 3. Свойства функций класса $\mathcal{C}_\alpha$.

### 3.1

В этом пункте мы приведем некоторые известные результаты, на которых основано дальнейшее изложение этого параграфа.

Лемма 3.1.1

Если аналитическая функция $\mathcal{H}(t)$ регулярна в области $|\arg t| < \alpha$, $|t| > a$, а функция $Re\,\mathcal{H}(t)$ ограничена в этой области сверху /или снизу/, то $\mathcal{H}(t) = O\left[|t|^{\pi/(2\alpha)}\right]$ при $|t| \to \infty$ равномерно в любом угле $|\arg t| \leq \alpha' < \alpha$. /см. [2], стр. 372/.

Мы будем пользоваться интегралами Шварца и Пуассона для круга и полуплоскости. Пусть $f(z)$ регулярна при $|z| < 1$, $U(z) = Re\,f(z)$, $V(z) = \Im m\, f(z)$, $U(z)$ непрерывна при $|z| \leq 1$, $|z-1| > 0$ и

$$|U(z)| < H\,|1-z|^{-\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < 1 \qquad /3.1.1/$$

при $|z| \leq 1$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\varepsilon|=1} \frac{U(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\varepsilon - z} - \overline{f(0)} \qquad /3.1.2/$$

$$U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{U(e^{i\alpha})\,d\alpha\,(1-r^2)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)} \qquad /3.1.2'/$$

$$V(re^{i\theta}) = V(0) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{U(e^{i\alpha})\,2r\sin(\theta-\alpha)\,d\alpha}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)} \qquad /3.1.2''/$$

при $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$; $\theta$ — вещественное /чтобы доказать эти формулы, можно написать такие же формулы [3] для круга $|\varepsilon| = \rho < 1$ и затем перейти к пределу $\rho \to 1$ с учетом /3.1.1//.

Пусть $z = (\tau-1)/(\tau+1)$ и $\tau = x+iy$,

$$f(z) = f_1(\tau), \quad U(z) = U_1(\tau), \quad V(z) = V_1(\tau).$$

Преобразуя формулы /3.1.2–2''/ получаем:

$$f_1(\tau) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} U_1(p)\frac{(\tau+1)\,dp}{(p-\tau)(p+1)} - \overline{f}_1(1) \qquad /3.1.3/$$

$$U_1(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(is)\frac{x}{x^2+(s-y)^2}\,ds \qquad /3.1.3'/$$

$$V_1(\tau) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(is)\frac{s(r^2-1)-y(s^2-1)}{(1+s^2)[x^2+(y-s)^2]}\,ds + V_1(1) \qquad /3.1.3''/$$

Здесь $r^2 = x^2+y^2$ Согласно/3.1.1/ для того, чтобы эти формулы имели место, достаточно, чтобы при $Re\,\tau \geqslant 0$

$$|U_1(\tau)| < H\,(1+|\tau|)^{\gamma}, \quad 0 \leqslant \gamma < 1. \qquad /3.1.4/$$

Нам понадобится следующее тривиальное обобщение принципа максимума /вытекающее из/3.1.2/.

Л е м м а 3.1.2

Пусть 1/ $U(z)$ гармоническая функция /см. /7/, стр. 437/ в круге $|z|<1$;
2/ $|U(z)| \leqslant H|1-z|^{-\gamma}$ при $|z|<1$ ; $0<\gamma<1$ ;
3/ $U(z) \leqslant M$ при $|z|=1$ ;
4/ функция $U(z)$ непрерывна при $|z| \leqslant 1$ , $|z-1|>0$ . Тогда $U(z) \leqslant M$ при $|z| \leqslant 1$ . Заметим также следующее обобщение свойства непрерывности гармонических функций.

Л е м м а 3.1.3

Пусть 1/ $U_1(\tau)$ есть гармоническая при $Re\,\tau>0$ и непрерывная при $Re\,\tau \geqslant 0$ функция, удовлетворяющая условию /3.1.4/;
2/ $U_1(\tau) \longrightarrow +\infty$ при $|\tau| \longrightarrow \infty$ , $Re\,\tau = 0$ .
Тогда $U_1(\tau) \longrightarrow \infty$ при $|\tau| \longrightarrow \infty$ равномерно при $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg\tau \leqslant \frac{\pi}{2}$ .
Наконец,

Л е м м а 3.1.4

является обобщением теоремы 2 на стр. 194 [3]: пусть гармоническая при $Re\tau > 0$ и непрерывная при $Re\tau \geqslant 0$ функция $U_1(\tau)$ удовлетворяет условию 3.1.4 и $U_1(\tau) \to -\infty$ при $Im\tau \to -\infty$, $Re\tau = 0$, $U_1(\tau) < M$ при $Re\tau = 0$. Тогда $U_1(\tau) \to -\infty$ при $|\tau| \to \infty$ равномерно в любом угле $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg\tau \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}$

Л е м м а 3.1.5

Пусть

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} a(s)\,ds\,\frac{s(r^2-1) - y(s^2-1)}{(1+s^2)[x^2+(s-y)^2]} \qquad /3.1.5/$$

здесь $r^2 = x^2 + y^2$ ; пусть $N > 0$ и пусть $|a(s)| \leqslant 1$ при $-N \leqslant s \leqslant N$ и $a(s) = 0$ при $|s| > N$ . Тогда $V(x,y) = O(1)$ при $r \to \infty$ равномерно при $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg}(y/x) \leqslant \frac{\pi}{2}$ .

Доказательство очевидно.

Л е м м а 3.1.6

Пусть в формуле/3.1.5/ $-1 \leqslant a(s) \leqslant 1$ для всех вещественных $s$ . Тогда для любого $\delta$ , $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ , есть число $H$ такое, что $|V(x,y)| < \ln r + H$ при $r \geqslant 1$ , $-\delta \leqslant \operatorname{arctg}(y/x) \leqslant \delta$ ; здесь $r = \sqrt{x^2+y^2}$ . Из лемм 3.1.5 и 3.1.6 вытекает

Л е м м а 3.1.7

Пусть в формуле /3.1.5/ $-1 \leqslant a(s) \leqslant 1$ для всех вещественных $s$ и $a(s) \to 0$ при $s \to \pm\infty$ . Тогда $V(x,y) = \bar{\bar{o}}(\ln r)$ при $r \to \infty$ равномерно в любом угле $|\operatorname{arctg}(y/x)| \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}$ ; здесь $r = \sqrt{x^2+y^2}$ .

Л е м м а 3.1.8

Пусть 1/ $a(s)$ -вещественная функция вещественной переменной $s$ такая, что $|a(s)| < H(1+|s|)^{\gamma}$, $0 \leqslant \gamma < 1$ , для всех $s$

2/ $a(s) < M$ при $s > 0$

3/ $a(s) \longrightarrow +\infty$ при $s \longrightarrow -\infty$

4/ $V(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(s)\frac{s(x^2-1)}{(1+s^2)(x^2+s^2)}ds$

Тогда $V(x) \longrightarrow +\infty$ при $x \longrightarrow +\infty$. Доказательство этой леммы может быть получено комбинированием предыдущих лемм с учетом формулы:

$$\int\limits_0^\infty \frac{sds\,(x^2-1)}{(1+s^2)(x^2+s^2)} = \ln x. \qquad /3.1.6/$$

В заключение приведем следующее утверждение, вытекающее из формулы типа /3.1.2/.

Л е м м а 3.1.9

Пусть функция $f(t)$ регулярна при $|t| > N, |\arg t| < \alpha$ и $\operatorname{Im} f(t) = O(1)$ при $|t| \longrightarrow \infty$ равномерно в любом угле $|\arg t| \leqslant \alpha' < \alpha$. Тогда для любого целого $k \geqslant 1$ $\left(t\frac{d}{dt}\right)^k f(t) = O(1)$ при $|t| \longrightarrow \infty$ равномерно в любом угле $|\arg t| \leqslant \alpha' < \alpha$. Заметим, что в условии и заключении этой леммы можно одновременно заменить $O(1)$ на $\bar{\bar{o}}(1)$.

3.2 Теперь приступим к исследованию свойств функций класса $C_\alpha$. Введем функцию

$$\mathcal{X}(t) = -\ln \psi(t). \qquad /3.2.1/$$

В силу 2.1.1/ $\mathcal{X}(t)$ регулярна при $|t| > L$, $|\arg t| < \alpha$.

Из 2.1.2/ следует, что функция $\operatorname{Re}\mathcal{X}(t)$ ограничена снизу в любой области $|t| \geqslant a > L$, $|\arg t| \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}$. Применяя лемму 3.1.1 легко получаем: каковы бы ни были числа $\varepsilon$ и $\delta$; $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{X}(t) = O(|t|^{1+\varepsilon}) \quad \text{при } |t| \longrightarrow \infty \qquad /3.2.2/$$

равномерно при $|\arg t| \leqslant \delta$. Точно таким путем из 2.1.3/ и леммы 3.1.1 следует:

$$\mathcal{X}(t) = O\left(|t|^{\frac{\pi}{\alpha - \frac{\pi}{2}} + \varepsilon}\right) \quad \text{при } |t| \longrightarrow \infty \qquad /3.2.3/$$

равномерно при $\frac{\pi}{2}+\delta \leq \arg t \leq \alpha-\delta$ для любого $\varepsilon>0$ и любого $\delta$, $0<\delta<\frac{1}{2}(\alpha-\frac{\pi}{2})$. Остается рассмотреть поведение $\mathcal{X}(t)$ при $|t|\to\infty$ в секторах $\frac{\pi}{2}-\delta \leq \arg t \leq \frac{\pi}{2}+\delta$.

Пусть $0<\delta<\frac{\pi}{2q}$. Тогда есть число $h$ такое, что $h\,Re(-it)^q > |t|^q$ при $|\frac{\pi}{2}-\arg t|\leq\delta$.

Пусть, кроме того, $\delta<\alpha-\frac{\pi}{2}$. Согласно/2.1.4/ /с учетом регулярности $\mathcal{X}(t)$ при $|\arg t|<\alpha$ / есть число $B$ такое, что $Re\,\mathcal{X}(t)+h\,Re(-it)^q>B$ при $|\frac{\pi}{2}-\arg t|\leq\delta, |t|>a>L$

Отсюда по лемме 3.1.1 получаем: $\mathcal{X}(t)+h(-it)^q = O(|t|^{\frac{\pi}{2\delta}})$ при $t\to\infty$ равномерно во всяком угле $|\arg t-\frac{\pi}{2}|\leq\delta_1<\delta$.

Таким образом, есть число $\ell>0$ такое, что $\mathcal{X}(t)=O(t^\ell)$ при $|t|\to\infty$ равномерно во всяком угле $|\frac{\pi}{2}-\arg t|\leq\delta_1<\delta$. Аналогично находим $\mathcal{X}(t)=O(t^\ell)$ при $|t|\to\infty$ равномерно во всяком угле $|\frac{\pi}{2}+\arg t|\leq\delta_1<\delta$. Принимая во внимание /3.2.2/ и /3.2.3/ по теореме Фрагмен-Линделефа /[4], стр. 204/, заключаем:

$$\mathcal{X}(t)=O\left[|t|^{\varepsilon+\pi/(\alpha-\frac{\pi}{2})}\right] \text{ при } |t|\to\infty \qquad /3.2.4/$$

равномерно в любом угле $|\arg t|\leq\alpha'<\alpha$.

<u>3.3</u> В этом пункте мы покажем, что $Im\,\mathcal{X}(t)\to+\infty$ при $|t|\to\infty$, равномерно в любом угле $|\arg t-\frac{\pi}{2}|\leq\gamma$ и $Im\,\mathcal{X}(t)\to-\infty$ при $|t|\to\infty$, равномерно в любом угле $|\frac{\pi}{2}+\arg t|\leq\gamma$; здесь $0<\gamma<\frac{1}{2}(\alpha-\frac{\pi}{2})$. Доказательство мы проведем, опираясь на леммы 3.1.3 и 3.1.8 и исходя из того, что 1/согласно 2.1.2/ $Re\,\mathcal{X}(t)\to+\infty$ при $|t|\to\infty$, если $|\arg t|<\frac{\pi}{2}$ и 2/ согласно 2.1.3/ $Re\,\mathcal{X}(t)<M$, если $\frac{\pi}{2}+\delta\leq|\arg t|\leq\alpha-\delta$, $|t|\geq a>L$.

Возьмем число $\alpha'$, $\frac{\pi}{2}<\alpha'<\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\alpha-\frac{\pi}{2})$ и число $\ell$, $\alpha'-\frac{\pi}{2}<\ell<\frac{1}{2}(\alpha-\frac{\pi}{2})$. Рассмотрим угол $|\alpha'-\arg(t-ia)|\leq\ell$.

В п. 3.2 показано, что $\mathcal{X}(t)$ регулярна внутри него. Из 2.1.2/, 2.1.3/ следует, что есть $M'$ такое, что $Re\,\mathcal{X}(t)\leq M'$ на луче $\arg(t-ia)=\alpha'+\ell$ и $Re\,\mathcal{X}(t)\to+\infty$ при $|t|\to\infty$ вдоль луча $\arg(t-ia)=\alpha'-\ell$. Пусть $t=ia+e^{i\alpha'}\tau_1^{2\ell/\pi}$ и $\mathcal{X}(t)=\varphi_1(\tau_1)$. Ввиду/3.2.4/ и нашего выбора $\ell$ есть число $\gamma_1$ , $0<\gamma_1<1$ такое, что $\varphi_1(\tau_1)=O(\tau_1^{\gamma_1})$ при $|\tau_1|\to\infty$ равномерно при $|\arg\tau_1|\le\frac{\pi}{2}$ ; далее, $Re\,\varphi_1(\tau_1)\le M'$ при $\arg\tau_1=\pi/2$ и $Re\,\varphi_1(\tau_1)\to+\infty$ при $\tau_1\to\infty$ , $\arg\tau_1=-\pi/2$ ; отсюда по лемме 3.1.8 с учетом /3.1.2/ находим: $Im\,\varphi_1(\tau_1)\to+\infty$ при $\tau_1>0$ , $\tau_1\to\infty$ ; таким образом, $Im\,\mathcal{X}(t)\to+\infty$ при $t=ia+re^{i\alpha'}$, $r\to\infty$.

Точно таким способом доказывается, что $Im\,\mathcal{X}(t)\to+\infty$ при $t=ia+re^{i\tilde\alpha'}$ , $r\to+\infty$ ; здесь $\tilde\alpha'=\pi-\alpha'$ . Преобразовав угол $|\frac{\pi}{2}-\arg(t-ia)|\le\alpha'-\pi/2$ в полуплоскость, мы можем воспользоваться леммой 3.1.3 . Так получаем: $Im\,\mathcal{X}(t)\to+\infty$ при $|t|\to\infty$ равномерно при $|\arg(t-ia)-\pi/2|\le\alpha'-\pi/2$ . С учетом нашего выбора $\alpha'$ отсюда вытекает первое из высказанных в начале этого пункта утверждений. Второе доказывается аналогично.

## 3.4

Теперь займемся рассмотрением функции

$$f(t)=\ln\mathcal{X}(t). \qquad /3.4.1/$$

На основании 2.1.1/ и пункта 3.3 имеем:

$$|\mathcal{X}(t)|\to\infty \quad \text{при} \quad |t|\to\infty \qquad /3.4.2/$$

равномерно в любом угле $|\arg t|\le\alpha'<\frac{1}{2}(\alpha+\frac{\pi}{2})$. Для дальнейшего мы фиксируем некоторое $\alpha'$, $\frac{\pi}{2}<\alpha'<\frac{1}{2}(\alpha+\frac{\pi}{2})$. Из /3.4.2/ /и регулярности $\mathcal{X}(t)$/ следует, что есть число $R\ge0$ такое, что $f(t)$ регулярна при $|\arg t|<\alpha'$, $|t|>R$ . Из /3.2.4/ следует, что есть число $h>0$ такое, что

$Re\,f(t)=\ln|\mathcal{X}(t)|<h\ln|t|$ при $|t|\ge a>R$, $|\arg t|\le\alpha'$.

Отсюда тем же путем, что в п. 3.2 из леммы 3.1.1 выводим:

$$f(t)=O(|t|^{\pi/(2\alpha')}) \quad \text{при} \quad |t|\to\infty , \qquad /3.4.3/$$

равномерно в любом угле $|\arg t|\le\alpha''<\alpha'$ . Из /3.4.3/ следует, что значение функции $f(t)$ внутри угла

$$0<\arg(t-ia)\le\alpha'',\quad \alpha''<\alpha',\quad a>R \qquad /3.4.4/$$

/ $R$ – число, определяющее область регулярности $f(t)$ / можно выразить через ее значение на границах этого угла при помощи интеграла Пуассона /3.1.3/ /разогнув угол в полуплоскость и т.д./. Мы покажем, что в каждой из областей

$$|\arg t| < \delta,\ |t| \geq a,\ 0 < \delta < \frac{\pi}{2},\ a > R \qquad /3.4.5/$$

$$\delta + \frac{\pi}{2} \leq |\arg t| \leq \alpha' - \delta,\ |t| \geq a > R,\ 0 < \delta < (\alpha' - \frac{\pi}{2})/2 \qquad /3.4.6/$$

$\operatorname{Im} f(t)$ ограничена. Отсюда и из возможности применения интеграла Пуассона к углу /3.4.4/ следует /лемма 3.1.2/, что $\operatorname{Im} f(t)$ ограничена во всей области $|\arg t| \leq \alpha' - \delta$, $|t| \geq a > R$. Рассмотрим область /3.4.5/. Из регулярности $f(t)$ в этой области и того, что согласно 2.1.1/ $\operatorname{Re} \mathcal{X}(t) \to +\infty$ при $|t| \to +\infty$ равномерно при $|\arg t| \leq \delta < \frac{\pi}{2}$ очевидно следует: 1/ $\operatorname{Im} f(t)$ ограничена во всякой ограниченной части этой области, 2/ есть число $a_1 > a$ такое, что $\cos \operatorname{Im} f(t) > 0$ при $|t| \geq a_1$, $|\arg t| \leq \delta$. В свою очередь из 2/ и непрерывности $f(t)$ следует, что есть целое число $k_1$ такое, что

$$2\pi k_1 - \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Im} f(t) \leq 2\pi k_1 + \frac{\pi}{2} \qquad /3.4.7/$$

при $|t| \geq a_1$, $|\arg t| \leq \delta$. Таким образом, ограниченность $\operatorname{Im} f(t)$ в области /3.4.5/ доказана. Теперь рассмотрим область /3.4.6/. Рассуждение, аналогичное вышеизложенному, показывает, что есть целые числа $k_2$ и $k_3$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $N$ такое, что

$$|\operatorname{Im} f(t) - \pi(2k_2 + 1)| < \varepsilon + \frac{\pi}{2} \qquad /3.4.8/$$

если $|t| > N$ и $t$ лежит в верхнем секторе области /3.4.6/, и

$$|\operatorname{Im} f(t) - \pi(2k_3 - 1)| < \varepsilon + \frac{\pi}{2} \qquad /3.4.9/$$

если $|t| > N$ и $t$ лежит в нижнем секторе области /3.4.6/. Как уже говорилось, из /3.4.7-9/ следует ограниченность функции $\operatorname{Im} f(t)$ в любой области $|t| \geq a > R$, $|\arg t| \leq \alpha'' < \alpha'$. Отсюда по лемме 3.1.9 следует: $t\frac{d}{dt}f(t) = O(1)$ при $|t| \to \infty$ /3.4.10/

равномерно в любом угле $|\arg t| < \alpha'' < \alpha'$. Теперь мы покажем, что из /3.4.7/ и /3.4.10/ следует: $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \operatorname{Im} f(ir) \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi K_1$.

Действительно, пусть есть неограниченно растущая последовательность

$r_1;\ r_2,\ \dots\ r_n \dots \quad (r_{n-1} < r_n)$ такая, что

$\operatorname{Im} f(ir_n) > \frac{\pi}{2} + 2\pi K_1 + V$, где $V > 0$ / $V$ не зависит от $n$/.

Тогда из /3.4.10/ следует, что есть числа $N$ и $\delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, такие, что $\operatorname{Im} f(ir_n e^{-i\delta}) > \frac{\pi}{2} + 2\pi K_1 + \frac{V}{2}$ при всех $n > N$, что противоречит /3.4.7/.

Аналогичным образом доказывается, что при $r \to \infty$

$$\varliminf \operatorname{Im} f(ir) \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi K_1$$

$$\varlimsup \operatorname{Im} f(ir) \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi K_2$$

$$\varliminf \operatorname{Im} f(ir) \geq \frac{\pi}{2} + 2\pi K_2 .$$

Из этих соотношений и из /3.4.10/ следует, что либо $K_2 = K_1$ и

$\operatorname{Im} f(ir) \to \frac{\pi}{2} + 2\pi K_1$ при $r \to \infty$ /3.4.11'/

либо $K_2 = K_1 - 1$ и

$\operatorname{Im} f(ir) \to -\frac{\pi}{2} + 2\pi K_1$ при $r \to \infty$. /3.4.11''/

Аналогичным образом находим, что либо $K_3 = K_1$ и

$\operatorname{Im} f(-ir) \to -\frac{\pi}{2} + 2\pi K_1$ при $r \to \infty$ /3.4.12'/

либо $K_3 = K_1 + 1$ и

$\operatorname{Im} f(-ir) \to \frac{\pi}{2} + 2\pi K_1$ при $r \to \infty$. /3.4.12''/.

Соотношения /3.4.11/, /3.4.12/ позволяют сравнительно быстро довести до конца наше исследование функции $f(t)$. В дальнейшем мы считаем $K_1 = 0$.

3.5

Формулы /3.4.11/ и /3.4.12/ допускают четыре различные возможности. В этом пункте мы покажем, что три из них несовместны с принадлежностью к $\psi(t)$ классу $\mathcal{C}_\alpha$. Простейшая возможность:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Im} f(t) \to -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im} f(-t) \to +\frac{\pi}{2}\end{array}\right\} \quad \text{при} \quad t = ir,\ r \to \infty \qquad /3.5.1/$$

Из /3.4.10/ следует, что в этом случае

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Im} f(x+iy) \to -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im} f(x+-iy) \to +\frac{\pi}{2}\end{array}\right\} \quad \text{при} \quad y \to +\infty \qquad /3.5.1'/$$

для всех $x$. . В п. 3.4 показано, в частности, что $f(t)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} t > R$ . Так как в /3.4.3/ $\alpha' > \frac{\pi}{2}$ , то /с учетом /3.1.3''/ / при $t > x > R$ имеем:

$$\operatorname{Re} f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} f(x+is) \frac{s(t^2-1)\,ds}{(1+s^2)(s^2+x^2)} .$$

Отсюда по лемме 3.17 и формуле 3.1.6 /и принимая во внимание /3.5.1'/ находим $\operatorname{Re} f(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$ . Это противоречит условию 2.1.2/. Сложнее исключаются возможности:

$$\operatorname{Im} f(\pm ir) \to \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad r \to +\infty \qquad /3.5.2/$$

$$\operatorname{Im} f(\pm ir) \to -\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad r \to +\infty . \qquad /3.5.3/$$

Рассмотрим /3.5.2/. Прежде всего заметим, что из /3.5.2/ /вместе с доказанной нами ограниченностью функции $\operatorname{Im} f(t)$ при $|t| \geq a > R$, $|\arg t| \leq \alpha' < \frac{1}{2}(\alpha + \frac{\pi}{2})$ следует /[2], стр. 418/, что

$$\operatorname{Im} f(t) \to \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad |t| \to \infty \qquad /3.5.4/$$

равномерно при $-\frac{\pi}{2} \leq \arg t \leq \frac{\pi}{2}$ . Покажем теперь, что /3.5.4/ имеет место /причем равномерно/ и в любом угле $|\arg t| \leq \alpha' < \frac{1}{2}(\alpha + \frac{\pi}{2})$ . Действительно, пусть $t = (\tau + a)e^{i(\alpha' \mp \frac{\pi}{2})}$ и $f(t) = f_1(\tau)$; тогда при $x > 0$ имеем $\operatorname{Im} f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty} \operatorname{Im} f_1(is)\,ds\,x/(x^2+s^2)$. Согласно /3.5.4/ $\operatorname{Im} f_1(x) \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ . Так как отсюда следует: $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \operatorname{Im} f_1(is)\,ds\,x/(x^2+s^2) \to \frac{\pi}{4}$ при $x \to +\infty$, то

$$\frac{1}{\pi x}\int_0 \operatorname{Im} f_1(is) \frac{ds}{1+(s/x)^2} \to \frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad x \to +\infty .$$

Относительно $\operatorname{Im} f_1(is)$ нам известно: 1/ что она ограничена при $s \geq 0$, 2/ и что функция $s\frac{d}{ds}\,\mathrm{Im}\,f_1(is)$ тоже ограничена. Так как $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty s^{ix}\frac{ds}{1+s^2}=$ $=\left[ch\,\frac{\pi x}{2}\right]^{-1}\neq 0$ при $\mathrm{Im}\,x=0$, то выполнены условия теоремы 233 из /5/; эта теорема дает нам:

$$\mathrm{Im}\,f_1(is)=\mathrm{Im}\,f\left[(is+a)e^{i(\alpha'-\frac{\pi}{2})}\right]\longrightarrow\frac{\pi}{2}$$

при $s\to+\infty$; аналогично получаем

$$\mathrm{Im}\,f\left[(-is+a)e^{-i(\alpha'-\frac{\pi}{2})}\right]\longrightarrow\frac{\pi}{2}\quad\text{при}\quad s\to+\infty.$$

Отсюда /[2], стр. 418/ следует, что /3.5.4/ имеет место равномерно в любом угле $|\arg t|\leq\alpha'<\frac{1}{2}(\alpha+\frac{\pi}{2})$. Пусть далее число $A$ таково, что $f(t)$ регулярна в угле $|\arg(t-A)|<\alpha'$; $|t-A|>0$

/область регулярности $f(t)$ указана в начале пункта 3.4/. Пусть $\sigma=(t-A)^{\pi/(2\alpha')}$ и $f_2(\sigma)=f(t)-i\pi/2$. Из предыдущего рассмотрения следует: $\mathrm{Im}\,f_2(\sigma)\longrightarrow 0$ при $|\sigma|\to\infty$, $Re\,\sigma=0$. Отсюда по лемме /3.1.7/ с учетом определения $f_2(\sigma)$ находим $f(t)=\bar{o}(\ln|t|)$ при $|t|\to\infty$ равномерно в любом угле $|\arg t|\leq\alpha''<\alpha'$. Отсюда следует:

$$\mathcal{X}(t)=O(|t|^{\varepsilon})\quad\text{при}\quad |t|\to\infty\qquad /3.5.5/$$

равномерно в любом угле $|\arg t|\leq\alpha''<\alpha'$ для любого $\varepsilon>0$. Пусть $\frac{\pi}{2}<\alpha''<\alpha'$. Заметим, что согласно /2.1.3/ функция $Re\,\mathcal{X}(t)$ ограничена сверху на границе угла $|\arg(t-A)|<\alpha''$; отобразив этот угол на круг и принимая во внимание /3.5.5/ и /3.1.1/, можем воспользоваться леммой /3.1.2/; таким путем найдем, что функция $Re\,\mathcal{X}(t)$ ограничена сверху во всем угле $|\arg(t-A)|\leq\alpha''$. Это, очевидно, противоречит 2.1.2/. Случай /3.5.3/ разбирается аналогично. Таким образом, мы исключили возможность /3.5.1/, /3.5.2/ и /3.5.2'/.

## 3.6

Остается исследовать последнюю возможность:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Im} f(ir) &\to \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im} f(-ir) &\to -\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } r \to +\infty \qquad /3.6.1/$$

Пусть $f_1(t)=f(t)-\ln t$ ; тогда $\operatorname{Im} f_1(\pm ir)\to 0$ при $r\to+\infty$

отсюда подобно /3.5.4/ находим: $\operatorname{Im} f_1(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$ равномерно в угле $|\arg t|\leq\frac{\pi}{2}$. Далее применение тауберовой теоремы 233 из /5/, точно так же, как в пункте 3.5 дает: $\operatorname{Im} f_1(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$ равномерно в любом угле $|\arg t|\leq\alpha'<\frac{1}{2}(\alpha+\frac{\pi}{2})$. Вспомнив область регулярности $f(t)$ /начало п. 3.4/ и связь функций $f(t)$ и $f_1(t)$, убеждаемся, что нами доказана

Т е о р е м а 3.6$^1$

Если $\psi(t)\in\mathcal{C}_\alpha$ и $f(t)=\ln\ln[1/\psi(t)]$, то для любого $\alpha'$, $0<\alpha'<(\alpha+\frac{\pi}{2})/2$,

а/ есть число $R\geq 0$ такое, что $f(t)$ регулярна при $|t|>R$, $|\arg t|<\alpha'$,

б/ $\operatorname{Im} f(t)-\arg t\to 0$ при $|t|\to\infty$ равномерно в угле $-\alpha'\leq\arg t\leq\alpha'$.

Простое рассуждение /начинается оно с применения леммы 3.1.4 к углу $\alpha'<\arg(t-iq)<\alpha''$, где $\frac{\pi}{2}<\alpha'<\frac{1}{2}(\alpha+\frac{\pi}{2})$ и $\alpha'<\alpha''<\alpha$ ; это дает $\operatorname{Re} f(t)\to-\infty$ при $|t|\to\infty$ равномерно в любом угле $\alpha'<\arg t\leq\alpha'''<\alpha''$ и т.д./ показывает, что угол $\alpha'$ в теореме 3.6$^1$ может быть взят любой менее $\alpha$. Соответственно исправленную теорему 3.6$^1$ мы будем именовать в дальнейшем <u>теорема 3.6</u>.

<u>3.7</u>

Т е о р е м а 3.7

Пусть $\psi(t)\in\mathcal{C}_\alpha$ и $f(t)=\ln\ln[1/\psi(t)]$. Тогда $f(t)/\ln t\to 1$ при $|t|\to\infty$ равномерно во всяком угле $|\arg t|\leq\dot{\alpha}<\alpha$.

Доказательство

Пусть $f_1(t)=f(t)-b_1 t$. Согласно теореме 3.6 для любого $\alpha'$, $0<\alpha'<\alpha$, есть число $A$ такое, что $f_1(t)$ регулярна при $|\arg(t-A)|<\alpha'$. Пусть $\tau=(t-A)^{\pi/2\alpha'}$ и $f_1(t)=\varphi(\tau)$. Тогда $\varphi(\tau)$ регулярна при $Re\,\tau>0$. Выразив $Re\,\varphi(\tau)$ через $Im\,\varphi(\tau)$ по формуле /3.1.3"/, затем из того, что $Im\,\varphi(\tau)\to 0$ при $|\tau|\to\infty$, $Re\,\tau=0$, получаем по лемме 3.1.7: $\varphi(\tau)=\bar{\bar{o}}(\ln|\tau|)$ при $|\tau|\to\infty$ равномерно в любом угле $|\arg\tau|\leq\delta<\frac{\pi}{2}$. С учетом определения $\varphi(\tau)$ и $\tau$ это доказывает утверждение теоремы 3.7.

Из теорем 3.6 и 3.7 вытекает

Следствие 3.7

Если $\psi(t)\in e_\alpha$ и $\mathcal{X}(t)=-\ln\psi(t)$, то для любого $\varepsilon>0$ и любого $\delta$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$,

а/ $\psi(t)=O[\exp(-|t|^{1-\varepsilon})]$ при $|t|\to\infty$ при $|\arg t|\leq\frac{\pi}{2}-\delta$

б/ $[\psi(t)]^{-1}=O[\exp(|t|^{1+\varepsilon})]$ при ——— " при ——— "

в/ $\mathcal{X}(t)/t=O(|t|^{\varepsilon})$ при ——— " при $|\arg t|\leq\alpha-\delta$

г/ $t/\mathcal{X}(t)=O(|t|^{\varepsilon})$ при ——— " при ——— "

равномерно в указанных углах.

Отметим для дальнейшего, что из того, что $Im[\ln\mathcal{X}(t)-\ln t]\to 0$ при $|t|\to\infty$ равномерно в любом угле $|\arg t|\leq\alpha'<\alpha$, /см. 3.2.1 и теорему 3.6/ по лемме 3.1.9 следует:

$$\frac{t}{\mathcal{X}(t)}\frac{d}{dt}\mathcal{X}(t)\to 1 \quad при \quad |t|\to\infty \tag{/3.7.1/}$$

равномерно в любом угле $|\arg t|\leq\alpha'<\alpha$. Таким же путем получаем соотношения

$$[\mathcal{X}(t)]^{-1}\left(t\frac{d}{dt}\right)^k\mathcal{X}(t)\to 1 \quad при \quad |t|\to\infty \tag{/3.7.1'/}$$

$k=$ 1,2,3...; каждое из них имеет место равномерно при $|\arg t|\leq\alpha'<\alpha$. Из /3.7.1'/,/3.7.1/ следует, что для каждой из функций

$$\mathcal{X}_k(t)=\left(t\frac{d}{dt}\right)^k\mathcal{X}(t) \tag{/3.7.2/}$$

имеют место предельные соотношения, утверждаемые теоремами /3.6/ и /3.7/ для $\mathcal{X}(t)$. Поэтому теоремы и формулы, устанавливаемые в п. 3.8 для $\mathcal{X}(t)$, верны и для каждой из функций $\mathcal{X}_k(t)$, $k = 1,2, \dots$ .

## 3.8

Теорема 3.8.1

Если $\psi(t)\in Q$ и $\mathcal{X}(t)=-\ln\psi(t)$, то для любого $\alpha'$, $0<\alpha'<\alpha$ есть число $N>0$ такое, что при $|t|>N$, $|\arg t|<\alpha'$ и $|t_1|>N$, $|\arg t_1|<\alpha'$

а) $|\mathcal{X}(t)|>|\mathcal{X}(t_1)|$ если $|t|>|t_1|$, $\arg t=\arg t_1$

б) $\arg\mathcal{X}(t)>\arg\mathcal{X}(t_1)$ если $|t|=|t_1|$, $\arg t>\arg t_1$

в) $\mathcal{X}(t)\neq\mathcal{X}(t_1)$ если $t\neq t_1$ .

Доказательство:

Пусть $t=re^{i\theta}$, $r$ и $\theta$ вещественные. Из формулы /3.7.1/ легко получить:

$$\left.\begin{aligned}&|r/\mathcal{X}(re^{i\theta})|\frac{d}{dr}|\mathcal{X}(re^{i\theta})|\to 1, \quad \frac{d}{d\theta}\arg\mathcal{X}(re^{i\theta})\to 1\\ &r\frac{d}{dr}\arg\mathcal{X}(re^{i\theta})\to 0 \qquad \frac{d}{d\theta}\ln|\mathcal{X}(re^{i\theta})|\to 0\end{aligned}\right\} \qquad /3.8.1/$$

при $r\to\infty$ равномерно при $-\alpha'\leq\theta\leq\alpha$. Первые две из этих формул доказывают утверждения а/ и б/. Чтобы доказать в/ возьмем число $\varepsilon$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. Из /3.8.1/ следует, что есть $N$ такое, что при $|\theta|\leq\alpha'$, $r\geq N$

$$\left|1-r\frac{d}{dr}\ln|\mathcal{X}(re^{i\theta})|\right|<\varepsilon, \quad \left|\frac{d}{d\theta}\ln|\mathcal{X}(re^{i\theta})|\right|<\varepsilon \qquad /3.8.2'/$$

$$\left|\frac{d}{dr}\arg\mathcal{X}(re^{i\theta})\right|<\frac{\varepsilon}{r}, \quad \left|1-\frac{d}{d\theta}\arg\mathcal{X}(re^{i\theta})\right|<\varepsilon . \qquad /3.8.2''/$$

Пусть $t_1=r_1e^{i\theta_1}$, $t_2=r_2e^{i\theta_2}$, $\mathcal{X}(t_1)=\mathcal{X}(t_2)$ и пусть, например, $r_1<r_2$, $\theta_1<\theta_2$ /случаи $r_1\neq r_2$, $\theta_1=\theta_2$ и $r_2=r_1$, $\theta_1\neq\theta_2$ исключаются согласно утверждениям а/ и б/ /. Пусть $t_3=r_1e^{i\theta_2}$. Согласно /3.8.2''/ $\arg\mathcal{X}(t_3)-\arg\mathcal{X}(t_1)>(1-\varepsilon)(\theta_2-\theta_1)$,

$|\arg\mathcal{X}(t_2)-\arg\mathcal{X}(t_3)|<\varepsilon\ln(r_2/r_1)$

Отсюда для равенства $\mathcal{X}(t_1)=\mathcal{X}(t_2)$ необходимо $(1-\varepsilon)(\theta_2-\theta_1)<\varepsilon\ln(r_2/r_1)$. Аналогично из формулы /3.8.2'/ и равенства $\mathcal{X}(t_1)=\mathcal{X}(t_2)$ находим $(1-\varepsilon)\ln(r_2/r_1)<\varepsilon(\theta_2-\theta_1)$. Полученные два неравенства несовместны при $\varepsilon<\frac{1}{2}$. Это завершает доказательство. Аналогично доказывается

Теорема 3.8.2

Пусть $\psi(t)\in e_\alpha$ и $\mathcal{X}(t)=-\ln\psi(t)$. Тогда для любых чисел $\alpha'$, $\alpha''$ и $\alpha'''$, $0<\alpha'''<\frac{\pi}{2}<\alpha''<\alpha'<\alpha$, есть число $N$ такое, что $\operatorname{Re}\mathcal{X}(re^{i\theta})>\operatorname{Re}\mathcal{X}(r'e^{i\theta})$ при $r>r'>N$, $-\alpha'''<\theta<\alpha'''$ и $\operatorname{Re}\mathcal{X}(re^{i\theta})<\operatorname{Re}\mathcal{X}(r'e^{i\theta})$ при $r>r'>N$, $\alpha''<\theta<\alpha'$ или $-\alpha'<\theta<-\alpha''$.

В дальнейшем нам понадобится предельное соотношение:

$$\mathcal{X}(t_1r)/\mathcal{X}(t_2r)-t_1/t_2 \longrightarrow 0 \quad \text{при } r\longrightarrow+\infty, \qquad /3.8.3/$$

имеющее место равномерно в любой области

$$\left.\begin{array}{l} 0<\delta\le|t_1|\le N,\ |\arg t_1|\le\alpha' \\ |t_2|\geq\delta,\ |\arg t|\le\alpha';\ \alpha'<\alpha \end{array}\right\} \qquad /3.8.3'/$$

Из формулы $\ln[\mathcal{X}(t_1r)/\mathcal{X}(t_2r)]=\int_{t_1r}^{t_2r}dz\frac{d}{dz}\ln\mathcal{X}(z)$ и /3.7.1/ легко показать, что /3.8.3/ имеет место равномерно в любой части $|t_2|\le N'$ области /3.8.3'/. Пусть $\varepsilon>0$ и $N'/N>3/\varepsilon$; тогда по предыдущему есть $N_1$, такое, что

$$|\mathcal{X}(t_1r)/\mathcal{X}(t_2r)-t_1/t_2|<\varepsilon/3 \qquad /3.8.3''/$$

при $r>N_1$, если $t_1$ и $t_2$ лежат в области /3.8.3'/ и $|t_2|\le N'$; увеличив, если надо, $N_1$, достигнем того, что $|\mathcal{X}(t_2r)|$ будет монотонно расти с ростом $r|t_2|$ /теорема 3.8.1/ при $r>N_1$, $|t_2|>N'$, так что

$$|\mathcal{X}(t_1r)/\mathcal{X}(t_2r)|\le|\mathcal{X}(t_1r)/\mathcal{X}(rN'e^{i\arg t_2})|<\frac{2\varepsilon}{3}$$

при $t_2\geqslant N'$, $r>N_1$; мы учли /3.8.3''/ и то, что $|t_1/t_2|<\frac{\varepsilon}{3}$ при

$|t_2|>N'$, $r>N_1$ ; далее получаем: $|\mathcal{H}(t_1r)/\mathcal{H}(t_2r)-t_1/t_2|<\varepsilon$ в области /3.8.3'/ при $|t_2|\geqslant N'$, $r>N$. Это завершает доказательство /3.8.3/. Заметим формулы /следующие из /3.8.3/ /.

$$\operatorname{Re}\mathcal{H}(re^{i\theta})/|\mathcal{H}(r)| \longrightarrow \cos\theta \quad \text{при} \quad r\longrightarrow+\infty \qquad /3.8.4'/$$

$$\operatorname{Im}\mathcal{H}(re^{i\theta})/|\mathcal{H}(r)| \longrightarrow \sin\theta \quad \text{при} \quad r\longrightarrow+\infty \qquad /3.8.4''/$$

равномерно на любом интервале $-\alpha'\leqslant\theta\leqslant\alpha'$, $0<\alpha'<\alpha$.

Согласно /3.7.2/ имеем:

$$\mathcal{H}_k(e^{\tau}) = \frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau-\tau'|=\delta}\frac{\mathcal{H}(e^{\tau'})d\tau'}{(\tau'-\tau)^{k+1}}.$$

Отсюда и из /3.8.3/ вытекает оценка: пусть $0<\alpha'<\alpha'+\delta<\alpha$ ; тогда есть числа $H$ и $N$ такие, что при $\operatorname{Re}\tau>N$, $|\operatorname{Im}\tau|\leqslant\alpha'$

$$|\mathcal{H}_k(e^{\tau})/\mathcal{H}(e^{\tau})| < Hk!\delta^{-k}. \qquad /3.8.5/$$

В заключение этого пункта докажем следующую лемму:

Л е м м а 3.8

Пусть $\psi(t)\in C_\alpha$ и даны вещественные числа $\gamma$ и $\delta$ и комплексное число $a$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, $0<\operatorname{Re}a<\gamma$. Тогда для любого $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ есть $N$ такое, что

а) $|\psi(p)|\leqslant|\psi((1-\varepsilon)\operatorname{Re}p)|$ при $\operatorname{Re}p\geqslant N$, $|\arg p|\leqslant\delta$

а') $|\psi(p)|^{-1}\leqslant|\psi((1+\varepsilon)\operatorname{Re}p)|^{-1}$ при ——— " ——— "

б) $|\psi(pr)|\leqslant|\psi((1-\varepsilon)\gamma r)|$ при $\operatorname{Re}p\geqslant\gamma$, $|\arg p|\leqslant\delta$, $r>N$

в) $|\psi(pr)|\leqslant|\psi(ar)\,\psi((1-\varepsilon)r\operatorname{Re}(p-a))|$ при ——— " ——— " ——— "

2) $|\psi(pr)| \leqslant |\psi(ar)\,\psi((1-\varepsilon)(\gamma-\operatorname{Re} a)r)|$ при $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma$,
$|\arg p| \leqslant \delta$, $r > N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Комбинируя /3.8.3/ и /3.8.4$'$/ получаем:

$$\operatorname{Re}\mathcal{X}[(1-\varepsilon)\operatorname{Re} p]/\operatorname{Re}\mathcal{X}(p) \longrightarrow 1-\varepsilon \quad \text{при} \quad |p| \longrightarrow \infty$$

равномерно при $|\arg p| \leqslant \delta$ . Отсюда следует а/. Утверждение $a^1$/ доказывается аналогично.

Перепишем а/ в виде:

$$|\psi(pr)| \leqslant |\psi[(1-\varepsilon)r\operatorname{Re} p]| \quad \text{при} \quad r\operatorname{Re} p > N,\ |\arg p| \leqslant \delta,\ r > 0.$$

Согласно теореме 3.8.2 есть число $N_1 > 0$ такое, что

$$|\psi[(1-\varepsilon)r\operatorname{Re} p]| \leqslant |\psi[(1-\varepsilon)\gamma r]| \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p \geqslant \gamma, \quad r \geqslant N_1 .$$

Таким образом $|\psi(pr)| \leqslant |\psi[(1-\varepsilon)\gamma r]|$ при $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma$,
$|\arg p| \leqslant \delta$, $r \geqslant \operatorname{Max}(N_1, N/\gamma)$

и утверждение б/ доказано. Чтобы доказать в/, воспользуемся предельными соотношениями

$$\operatorname{Re}\mathcal{X}(ar)/\operatorname{Re}\mathcal{X}(pr) \longrightarrow \operatorname{Re} a/\operatorname{Re} p \quad \text{при} \quad r \longrightarrow \infty,$$

$$\operatorname{Re}\mathcal{X}[(1-\varepsilon)r\operatorname{Re}(p-a)]/\operatorname{Re}\mathcal{X}(pr) \longrightarrow (1-\varepsilon)\operatorname{Re}(p-a)/\operatorname{Re} p$$

при $r \longrightarrow \infty$ равномерно при $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma$, $|\arg p| \leqslant \delta$ /которые доказываются подобно /3.8.3//. Отсюда находим, что для любого $\lambda > 0$ , есть $N$ такое, что

$$Re\{\mathcal{X}(ar)+\mathcal{X}[(1-\varepsilon)r\,Re(p-a)]\}<$$

$$<\{(1-\varepsilon)\,Re(p-a)/Re\,p+Re\,a/Re\,p+\lambda\}Re\,\mathcal{X}(pr)$$ при $r>N.$

Взяв $\lambda<\varepsilon(\gamma-Re\,a)/\gamma$, получим:

$$Re\,\mathcal{X}(pr)>Re\{\mathcal{X}(ar)+\mathcal{X}[(1-\varepsilon)r\,Re(p-a)]\}$$

при $r>N$. Это доказывает в/. Наконец, г/ легко получается из в/ с помощью теоремы 3.8.2.

## §4. Функция $\gamma(z)$

### 4.1

Лемма 4.1

Пусть $\psi(t)\in e_\alpha$ и $\mathcal{X}(t)=-\ln\psi(t)$.

Тогда: а/ для каждого $\alpha'$, $0<\alpha'<\alpha$ и любого $\alpha''$, $0<\alpha''<\alpha'$ есть числа $N'$ и $N''$ такие, что уравнение

$$z=\mathcal{X}_1(e^{\tau_0}) \qquad /4.1.1/$$

/здесь $\mathcal{X}_1(e^{\tau_0})=\frac{d}{d\tau_0}\mathcal{X}(e^{\tau_0})$ согласно /3.7.2/) при

$$|\arg z|<\alpha'' \quad |z|>N'' \qquad /4.1.1'/$$

имеет один и только один корень $\tau_0=\tau_0(z)$ в области

$$Re\,\tau_0>N', \quad |Im\,\tau_0|<\alpha' \qquad /4.1.1''/$$

б/ функция $\tau_0(z)$ есть аналитическая функция $z$, регулярная в области /4.1.1'/.

Доказательство

Возьмем $N'$ таким, что $\mathcal{X}_1(e^{\tau_0})$ регулярна и однолистна в области /4.1.1''/ /теорема 3.8.1/. Пусть $C$ есть /не пересекающая себя/ кривая, в которую функция $\mathcal{X}_1(e^{\tau_0})$ переводит границу области /4.1.1''/. Пусть точка $A$ лежит внутри $C$. Тогда /теорема 3.7/ есть число $N>N'$

такое, что точка $A$ лежит внутри замкнутой не пересекающей себя кривой $C_N$, в которую переводит функция $\mathcal{X}_1(e^{\tau_0})$ границу части $Re\,\tau < N$ области /4.1.1''/. Отсюда следует /[6], стр. 91/, что есть точка $\tau_A$ внутри $C_N$ такая, что $\mathcal{X}_1(e^{\tau_A}) = A$. Таким образом $\mathcal{X}_1(e^{\tau_0})$ при $\tau_0$, меняющемся в области/4.1.1''/, принимает каждое значение внутри $C$. Далее по теореме 3.6 есть $N''$ такое, что область /4.1.1'/ целиком лежит внутри $C$. Отсюда получаем первое утверждение леммы. Второе вытекает из первого /[7], стр. 345/.

Перечислим существенные для нас свойства функции $\tau_0(z)$: прежде всего ясно, что

$$Re\,\tau_0(z) \longrightarrow +\infty \qquad \text{при } |z| \longrightarrow \infty \qquad /4.1.2/$$

для фиксированного значения $\arg z$, $|\arg z| < \alpha$. Так как $|Im\,\tau_0(z)| < \alpha' < \alpha$ для всех $z$ из области /4.1.1'/, то по /4.1.2/ и теореме 3.6 $\arg \mathcal{X}_1[e^{\tau_0(z)}] - Im\,\tau_0(z) \longrightarrow 0$ при $|z| \longrightarrow \infty$ равномерно в любом угле $|\arg z| \leq \alpha'' < \alpha$. Это дает:

$$Im\,\tau_0(z) - \arg z \longrightarrow 0 \quad \text{при } |z| \longrightarrow \infty \qquad /4.1.3/$$

равномерно в любом угле $|\arg z| \leq \alpha'' < \alpha$. Таким же путем получаем:

$$\mathcal{X}_k[e^{\tau_0(z)}]/z \longrightarrow 1, \quad k = 0, 1, 2 \ldots \qquad /4.1.4/$$

$$\tau_0(z)/\ln z \longrightarrow 1 \qquad /4.1.5/$$

$$z^k \left(\frac{d}{dz}\right)^k \tau_0(z) \longrightarrow (-)^{k-1}(k-1)!, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad /4.1.6/$$

при $|z| \longrightarrow \infty$ равномерно в любом угле $|\arg z| \leq \alpha' < \alpha$

Заметим также формулу /[7], стр. 341/:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k \tau_0(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - \tau_0(z)| = \delta} d\xi \left[\mathcal{X}_1(e^{\xi}) - z\right]^{-k}$$

Отсюда с учетом /3.8.3/ и леммы 4.1 получаем: для любых $\delta$ и $\delta'$, $\delta > 0$, $\delta' > 0$, $\delta + \delta' < \alpha$ и любого $\delta_1$, $0 < \delta_1 < \min\limits_{0 \leq \varphi < 2\pi} |e^{\delta e^{i\varphi}} - 1|$, есть числа $H$ и $N$ такие, что

$$\left|z^k\left(\frac{d}{dz}\right)^k \tau_0(z)\right| < H(k-1)!\,\delta_1^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad /4.1.7/$$

при $|z| \geq N$, $|\arg z| < \delta'$.

4.2

Т е о р е м а 4.2

Пусть $\psi(t) \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$,

$$\gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\psi(t)\,dt \qquad /4.2.1/$$

и $\tau_0(z)$ – функция, определенная в п. 4.1.

Тогда а/ $\gamma(z)$ есть аналитическая функция $z$, регулярная в области

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} + \beta, \; |z| > 0 \qquad /4.2.2/$$

б/ при $|z| \to \infty$

$$\gamma(z)\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\exp\left\{-z\tau_0(z) + \mathcal{X}\left[e^{\tau_0(z)}\right]\right\} \longrightarrow 1 \qquad /4.2.3/$$

равномерно по $\arg z$ в любой области

$$\ln|z|\,\mathrm{Re}\,z \geq -d|z|, \quad d < \alpha - \frac{\pi}{2}. \qquad /4.2.4/$$

Подстановкой $t = e^{\tau}$ приводим /4.2.1/ к виду

$$\gamma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau z}\psi(e^{\tau})\,d\tau, \qquad /4.2.5/$$

взяв в этой формуле контур интегрирования состоящим из лучей $\arg\tau = 0$ и $\arg\tau = \pi + \sigma$, $-\beta < \sigma < \beta$, с учетом определения класса $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ легко доказываем утверждение а/ теоремы. Доказательство утверждения б/ занимает п.п. 4.3–4.5. Мы изберем следующий путь доказательства: мы непосредственно докажем /4.2.3/ методом перевала только для прямой $z > 0$ и кривой $\mathrm{Re}\,z \ln|z| = -|z|d$ /см. /4.2.4// и выведем отсюда /4.2.3/ для всей области /4.2.4/ на основании теоремы, подобной /[4] стр. 205/.

4.3

В этом пункте мы докажем /4.2.3/ для прямой $z>0$ и получим оценку:

$$\gamma(z) = O[\exp(|z|^{1+\varepsilon})] \text{ при } |z|\to\infty \qquad /4.3.1/$$

равномерно в любом угле $|\arg z| \le \delta < \frac{\pi}{2}+\beta$ для любого $\varepsilon>0$.

Пусть

$$\gamma_1(z) = \int_0^\infty e^{z\rho - \mathrm{Re}\,\mathcal{X}(e^\rho)}\,d\rho \qquad /4.3.2/$$

для вещественных значений $z$. Оценим $\gamma_1(z)$ при $z\to+\infty$.

Согласно теореме /3.8.2/ есть $N>0$ такое, что

$\mathrm{Re}\,\mathcal{X}_1(e^\rho) > \mathrm{Re}\,\mathcal{X}_1(e^{\rho'})$ при $\rho>\rho'>N$;

поэтому есть $N_1>0$ такое, что уравнение

$$z = \mathrm{Re}\,\mathcal{X}_1(e^{\rho_1}) \qquad /4.3.3/$$

при $z>N_1$ имеет один и только один корень $\rho_1=\rho_1(z)$ в области $\rho_1>N$; $\rho_1(z)>\rho_1(z')$ при $z>z'>N$ и

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1(z)/\ln z \to 1 \\ &\mathrm{Re}\,\mathcal{X}_k(e^{\rho_1(z)})/z \to 1 \end{aligned}\right\} \text{ при } z\to+\infty \qquad /4.3.4/$$

Лемма 4.3.1

Пусть

$$R(\rho,z) = z(\rho-\rho_1(z)) - \mathrm{Re}[\mathcal{X}(e^\rho)-\mathcal{X}(e^{\rho_1(z)})] \qquad /4.3.5/$$

Тогда есть положительные числа $N'$, $N''$ и $\varepsilon$ такие, что если $z>N''$, то: 4.3.1а/ функция $\frac{d}{d\rho}R(\rho,z)$ монотонно убывает с ростом $\rho$ при $\rho>N'$,

4.3.1 б/ $\frac{d}{d\rho}R(\rho,z) \le -\frac{z}{2}[\rho-\rho_1(z)]$ при $\rho_1(z)\le\rho\le\rho_1(z)+\varepsilon$

4.3.1, г/ $R(\rho,z) \le -\frac{z}{4}[\rho-\rho_1(z)]^2$ при $-\varepsilon\le\rho-\rho_1(z)\le\varepsilon$

в/ $\frac{d}{d\rho}R(\rho\,z) \geq \frac{z}{2}|\rho-\rho_1(z)|$ при $\rho_1(z)-\varepsilon < \rho < \rho_1(z)$

д/ $R(\rho,z) < R[\rho_1(z)-\varepsilon, z]$ при $N' < \rho < \rho_1(z)-\varepsilon$

е/ $R(\rho,z) < R[\rho_1(z)+\varepsilon, z] - \frac{\varepsilon z}{2}[\rho-\rho_1(z)-\varepsilon]$

при $\rho > \rho_1(z)+\varepsilon$

Доказательство

Имеем $\frac{d^2}{d\rho^2}R(\rho,z) = -\mathrm{Re}\,\mathcal{X}_2(e^{\rho})$ /см. 3.7.2/.
Из формулы 3.7.2. и замечания в конце п. 3.7 следует, что

$\mathrm{Re}\,\mathcal{X}_2(e^{\rho}) \to +\infty$ при $\rho \to \infty$ ; отсюда вытекает А/.

Далее, $\frac{d}{d\rho}R(\rho,z) = z - \mathrm{Re}\,\mathcal{X}_1(e^{\rho})$; разложив $\mathcal{X}_1(e^{\rho})$ в ряд по степеням $\rho-\rho_1(z)$, с учетом 3.7.2 и 4.3.3 получаем: $\frac{d}{d\rho}R(\rho,z) =$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\rho-\rho_1(z)]^k}{k!}\mathrm{Re}\,\mathcal{X}_{k+1}[e^{\rho_1(z)}]$$

; принимая во внимание оценку 3.8.5 и 4.3.4, отсюда легко получаем Б/ и В/ . Так как $R[\rho_1(z),z] = 0$ , /см. 4.3.5/, то интегрируя Б/ и В/ получаем Г/. Далее Д/ следует из того, что $\frac{d}{d\rho}R(\rho,z) > 0$ при $N' < \rho < \rho_1(z)$ / А/ и В//. Наконец, из формулы

$$R(\rho,z) - R[\rho_1(z)+\varepsilon, z] = \int_{\rho_1(z)+\varepsilon}^{\rho} d\rho\,\frac{d}{d\rho}R(\rho,z)$$

с учетом А/ и Б/ получаем Е/. Лемма доказана.

Из Е/ легко следует

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\int_{N'}^{\rho_1(z)-\varepsilon} d\rho\, e^{R(\rho,z)} \to 0 \quad \text{при } z \to +\infty \qquad /4.3.6/$$

Точно также из 4.3.1 Г/ 4.3.1 Д/ и 4.3.4

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\int_{\rho_1(z)+\varepsilon}^{\infty} d\rho\, e^{R(\rho,z)} \to 0 \quad \text{при } z \to +\infty \qquad /4.3.7/$$

Из 4.3.4 и 4.3.5 легко получить, что

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\int_{0}^{N'} d\rho\, e^{R(\rho,z)} \to 0 \quad \text{при } z \to +\infty \qquad /4.3.8/$$

Остается рассмотреть интеграл от $\rho_1(z)-\varepsilon$ до $\rho_1(z)+\varepsilon$. Из разложения

$$R(\rho,z)=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{[\rho-\rho_1(z)]^k}{k!}Re\,\mathcal{X}_k[e^{\rho_1(z)}]$$ и 4.3.4. вытекает

$$R[\rho_1(z)+q/\sqrt{z},z]\longrightarrow -q^2/2$$ при $z\longrightarrow+\infty$ 4.3.9

равномерно на любом интервале $-N\leq q\leq N$. Отсюда и из 4.3.1 Г/следует:

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\int_{\rho_1(z)-\varepsilon}^{\rho_1(z)+\varepsilon}e^{R(\rho,z)}d\rho\longrightarrow 1$$ при $z\longrightarrow+\infty$ 4.3.10

Формулы 4.3.2, 4.3.5-6 и 4.3.10 дают

$$\gamma_1(z)\sqrt{\frac{z}{2\pi}}e^{-z\rho_1(z)+Re\,\mathcal{X}[e^{\rho_1(z)}]}\longrightarrow 1$$ при $z\longrightarrow+\infty$ 4.3.11

Прежде чем перейти к применениям этого соотношения, мы докажем формулу 4.2.3 для луча $z>0$. Мы воспользуемся представлением типа 4.2.5 для $\gamma(z)$; путем интегрирования мы возьмем прямую $Im\,\tau=Im\,\tau_0(z)$. Из принадлежности $\psi(t)$ классу $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ следует, что

$$|\psi[e^{\rho+iIm\,\tau_0(z)}]|<H \quad при\ \rho<0,\ z>N;\quad поэтому$$

$$\left|\int_{-\infty+iIm\,\tau_0}^{iIm\,\tau_0}e^{\tau z}\psi(e^{\tau})d\tau\right|<H/z \quad при \quad z>N \qquad /4.3.12/$$

Л е м м а 4.3.2

Пусть

$$b(\tau,z)=z[\tau-\tau_0(z)]-\mathcal{X}(e^{\tau})+\mathcal{X}(e^{\tau_0(z)}) \qquad /4.3.13/$$

и $$R(\rho,z)=Re\,b[\rho+i\,Im\,\tau_0(z),z]$$

Тогда для функции $R(\rho,z)$ имеют место все утверждения леммы 4.3.1, если там везде заменить $\rho_1(z)$ на $\rho_0(z)=Re\,\tau_0(z)$ Доказательство леммы 4.3.2 может быть получено, если в доказательстве леммы 4.3.1 заменить ссылки на формулы 4.3.3, 4.3.4,4.3.5 ссылками на формулы 4.1.1 и 4.1.4, 4.3.13. Далее с учетом 4.3.12 подобно 4.3.11 получаем предельное соотношение 4.2.3 при $z\longrightarrow\infty$. Сравним полученный результат с 4.3.11. Так как $\arg\mathcal{X}_1(e^{\rho_1(z)})\longrightarrow 0$ при $z\longrightarrow+\infty$ /Теорема 3.6/, из 4.1.1 и 4.3.3 следует: $\mathcal{X}_1[e^{\rho_1(z)}]/\mathcal{X}_1[e^{\tau_0(z)}]\longrightarrow 1$ при $z\longrightarrow+\infty$; отсюда /см.3.8.3/ вытекает $\rho_1(z)-\tau_0(z)\longrightarrow 0$ при $z\longrightarrow+\infty$. Так как из 3.7.1[1] следует $Re\,\mathcal{X}[e^{\rho_1(z)}]/\mathcal{X}[e^{\tau_0(z)}]\longrightarrow 1$ при $z\longrightarrow+\infty$, то из /4.3.2/ и /4.3.11/ находим:

$$\gamma_1(z)/\gamma(z) = O(e^{\varepsilon z}) \qquad \text{при } z \to +\infty \qquad /4.3.13/$$

для любого $\varepsilon > 0$.

В заключение этого пункта докажем /4.3.1/. Пусть, например, $0 < \arg z < \beta + \frac{\pi}{2}$. Воспользуемся представлением $\gamma(z)$ типа /4.2.5/; контур интегрирования составим из лучей $\arg \tau = 0$ и $\arg \tau = \pi - \beta$; тогда получим: $|\gamma(z)| <$

$$< \int_0^\infty d\rho\, e^{\rho \operatorname{Re} z} |\psi(e^\rho)| + \int_0^\infty dq\, e^{q|z|\cos(\pi-\beta+\theta)} |\psi[\exp(-qe^{-i\beta})]|$$

здесь $\theta = \arg z$. Учитывая /4.3.2/ и определение класса $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ получаем: $|\gamma(z)| < \gamma_1(\operatorname{Re} z) + K/[|z|\cos(\theta-\beta)]$.

Из /4.3.11/ и отсюда просто следует /4.3.1/.

## 4.4

В этом пункте мы докажем /4.2.3/, когда $z \to \infty$ по кривой

$$\operatorname{Re} z \ln|z| = -|z| d, \quad 0 < d < \alpha - \frac{\pi}{2} \qquad /4.4.0/$$

Мы обозначим $C$ верхнюю ветвь этой кривой, и ограничим рассмотрение ею. Возьмем число $\alpha_1$,

$$\frac{\pi}{2} + d < \alpha_1 < \alpha. \qquad /4.4.1/$$

Введем обозначения:

$$z = re^{i\theta}, \ \tau = \rho + i\varphi, \quad \tau_0(z) = \rho_0 + i\varphi_0 = \tau_0 \qquad /4.4.2/$$

$$a = \tau_0 + e^{-i\theta/2}(\varphi_0 - \alpha_1/2)/\sin(\theta/2), \quad \operatorname{Im} a = \alpha_1/2 \qquad /4.4.3/$$

$$b = \tau_0 + e^{-i\theta/2}(\varphi_0 - \alpha_1)/\sin(\theta/2), \quad \operatorname{Im} b = \alpha_1 \qquad /4.4.3'/$$

$$c = \alpha_1 e^{i(\pi-\beta)}/\sin\beta, \qquad \operatorname{Im} c = \alpha_1 \qquad /4.4.3''/$$

Для $\gamma(z)$ воспользуемся представлением типа /4.2.5/; контур интегрирования возьмем состоящим из луча $\arg\tau = \pi-\beta$, $\operatorname{Im}\tau \geqslant \alpha_1$, прямой $cb$, далее - прямой $ba$ и, наконец, - прямой $\operatorname{Re}\tau \geqslant \operatorname{Re}a$, $\operatorname{Im}\tau = \operatorname{Im}a$.

Л е м м а 4.4.1

Пусть функция $b(\tau,z)$ определена формулой /4.3.12/,

$$R(\tau,z) = \operatorname{Re} b(\tau,z) \qquad /4.4.4/$$

и $\tau = \tau_0 + \rho e^{-i\theta/2}$. Тогда есть числа $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ /не зависящие от $z$ /, такие, что если $z \in C$ и $r > N$, то: 4.4.1 а/ точка $\tau_0(z)$ лежит на прямой $ba$ между точками $b$ и $a$, 4.4.1 б/ функция $\frac{d}{d\rho} R(\tau,z)$ монотонно убывает с ростом $\rho$ на отрезке $ba$,

4.4.1 в/ $d/d\rho\, R(\tau,z) \leqslant -r\rho/2$ при $0 \leqslant \rho \leqslant \varepsilon$

г/ $d/d\rho\, R(\tau,z) \geqslant -r\rho/2$ при $-\varepsilon \leqslant \rho \leqslant 0$

д/ $R(\tau,z) \leqslant -r\rho^2/4$ при $-\varepsilon \leqslant \rho \leqslant \varepsilon$

е/ функция $R(\tau,z)$ с ростом $\rho$ монотонно растет на отрезке $b\tau_0$ и монотонно убывает на отрезке $\tau_0 a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

а/ следует из /4.1.3/ и определения /4.4.3/, /4.4.3'/ точек $a$ и $b$. Далее, рассмотрим функцию $d^2/d\rho^2\, R(\tau,z)$. Имеем: $d/d\rho = \cos(\theta/2)\,\partial/\partial\rho - \sin(\theta/2)\,\partial/\partial\varphi$; выполнив дифференцирование и воспользовавшись условиями Коши-Римана, получим:

$$d^2/d\rho^2\, R(\tau,z) = \cos\theta\, \partial^2/\partial\rho^2\, R(\tau,z) + \sin\theta\, \partial^2/\partial\rho^2\, \operatorname{Im} b(\tau,z).$$

Согласно /4.4.4/ и /4.3.12/ это равно

$$-\cos\theta\, \partial^2/\partial\rho^2\, \operatorname{Re}\mathcal{H}(e^{\tau}) - \sin\theta\, \partial^2/\partial\rho^2\, \operatorname{Im}\mathcal{H}(e^{\tau}) =$$

$$= -\cos\theta\, \operatorname{Re}\mathcal{H}_2(e^{\tau}) - \sin\theta\, \operatorname{Im}\mathcal{H}_2(e^{\tau})$$

/мы учли /3.7.2//.

Согласно /4.4.0/ $\theta \to \pi/2$, когда $z \to \infty$ вдоль $C$. Далее, так как $\alpha_1/2 > 0$, то согласно замечанию в конце п. /3.7/ и /3.8.4 -4 /

$$\overline{\lim}\, Re\,\mathcal{H}_2(e^{\tau})/Im\,\mathcal{H}_2(e^{\tau}) = ctg(\alpha_1/2) < +\infty$$

при $z \in C$, $\tau \in ba$, $z \to \infty$, поэтому $d^2/d\rho^2\, R(\tau, z) \to -\infty$ при $z \to \infty$ вдоль $C$ равномернс по $\tau$ на отрезке $ba$. Это доказывает б/. Остальные утверждения леммы вытекают из б/ /ср. с леммой 4.3.1/. Из леммы 4.4.1 точно так, как 4.3.9, следует:

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}} \int_b^a d\tau\, e^{b(\tau, z)} \longrightarrow 1 \qquad /4.4.5/$$

когда $z \to \infty$ вдоль $C$. Для исследования интеграла по прямой $Re\,\tau \geq Re\,a$, $Im\,\tau = Im\,a$ нам понадобится

Л е м м а 4.4.2

Пусть функции $b(\tau, z)$ и $R(\tau, z)$ определены формулами /4.3.12/ и /4.4.4/ и пусть $\tau = \rho + i\alpha/2$. Тогда есть число $N > 0$ такое, что при $z \in C$ и $r > N$:

а/ функция $d/d\rho\, R(\tau, z)$ монотонно убывает с ростом $\rho$ при $\rho > Re\,a$

б/ $d/d\rho\, R(\tau, z)|_{\tau = a} \leq -(r/2)\cos(\alpha_1/2)$ — " —,

в/ $R(\tau, z) - R(a, z) \leq -(\rho - Re\,a)\frac{r}{2}\cos(\alpha_1/2)$ — " —.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Имеем $d/d\rho\, R(\tau, z) = Re[z - \mathcal{H}_1(e^{\tau})]$, поэтому а/ следует из теоремы 3.8.2 и замечания в конце п. 3.7 /с учетом /4.1.1/. Далее согласно /3.8.4 /, /3.8.3/ и /4.4.3/, /4.1.1/ $Re\,\mathcal{H}_1(e^{a})/r \longrightarrow \cos(\alpha_1/2)$ при $r \to \infty$, $z \in C$. Так как $Re\,z/r \to 0$ при $r \to \infty$, $z \in C$, то из вышеприведенного выражения $d/d\rho\, R(\tau, z)$ легко следует б/. Наконец, в/ является следствием б/. Из леммы 4.4.2 с учетом 4.4.1 е/ и 4.4.1 д/ находим

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}} \int\limits_{\varphi = \alpha_1/2,\ \rho > Re\,a} e^{b(\tau, z)}\, d\tau \longrightarrow 0 \qquad \text{при } z \in C,\ z \to \infty \quad /4.4.6/$$

Теперь рассмотрим интеграл по отрезку $cb$.

Л е м м а 4.4.3

Пусть функции $b(\tau,z)$ и $R(\tau,z)$ определены формулами /4.3.12/ и /4.4.4/ и пусть $\tau=\rho+i\alpha$. Тогда есть положительные числа $N$ и $N_1$, такие, что при $r>N$, $z\in C$: а/ уравнение $rd/\ln r=-Re\mathcal{X}_1(e^{\rho+i\alpha_1})$ имеет один и только один корень $\rho=\rho_2(r)$ в области $\rho>N_1$, причем функция $\rho_2(r)$ монотонно и неограниченно растет вместе с $r$, б/ $\rho_2(r)<Re\,b$, в/ функция $d/d\rho\, R(\tau,z)$ отрицательна при $N_1<\rho<\rho_2(r)$ и положительна при $\rho>\rho_2(r)$, г/ с ростом $\rho$ функция $R(\tau,z)$ монотонно убывает при $N_1<\rho<\rho_2(r)$ и монотонно растет при $\rho>\rho_2(r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Так как $-\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha$, то есть $N_1$, такое, что функция $(-)Re\mathcal{X}_1(e^{\rho+i\alpha_1})$ монотонно /и неограниченно/ растет с ростом $\rho$ при $\rho>N_1$, /теорема 3.8.2/. Отсюда следует а/ /ср. определение $\rho_1(z)$, п. 4.3/. Далее, $d/d\rho\, R(\tau,z)=-rd/\ln r-Re\mathcal{X}_1(e^{\rho+i\alpha_1})$ /при $z\in C$/; согласно а/, эта функция отрицательна при $N_1<\rho<\rho_2(r)$ ; но $d/d\rho\, R(\tau,z)>\varepsilon r/2$ при $\tau=b$ согласно 4.4.1 б/ и 4.4.1 г/. Это доказывает б/. в/ следует из а/ и, в свою очередь, влечет г/. Согласно 4.4.1 е/ имеем $R(b,z)\le-\varepsilon r^2/4$. Вместе с 4.4.3 г/ это дает:

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\int\limits_{\rho_2(r)+i\alpha_1}^{b} e^{b(\tau,z)}d\tau\to 0 \text{ при } z\in C,\ z\to\infty \qquad /4.4.7/$$

Из /4.4.0/,/4.1.3-5/ легко показать, что

$$Re\{z[\tau-\tau_0(z)]-\mathcal{X}[e^{\tau_0(z)}]\}/r\to\frac{\pi}{2}+d-\alpha_1<0 \qquad /4.4.8/$$

при $z\in C,\ \tau=\rho+i\alpha_1,\ z\to\infty$

равномерно на любом интервале $-M\le\rho\le M$. С учетом ограниченности $\psi(e^{\tau})$ на таком интервале и принимая во внимание /4.4.1/, /4.4.3 г/, получаем:

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\int\limits_{C}^{\rho_2(r)+i\alpha_1} d\tau\, e^{b(\tau,z)}\to 0 \qquad \text{при } z\in C,\ z\to\infty \qquad /4.4.9/$$

Из /4.4,8/ и ограниченности $\psi(e^{\tau})$ на луче $L: \arg\tau = \pi - \beta,\ \operatorname{Im}\tau \geqslant \alpha,$ находим:

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}} \int\limits_L e^{6(\tau,z)} d\tau \longrightarrow 0 \qquad \text{при } z \in C,\ z \longrightarrow \infty \qquad /4.4.10/$$

Формулы /4.4.5-7/,/4.4.9-10/, /4.3.12/ при нашем выборе пути интеграции в представлении $\gamma(z)$ типа /4.2.5/ доказывают формулу /4.2.3/ при $z \in C$, $z \longrightarrow \infty$. Доказательство для нижней ветви кривой /4.4.0/ аналогично.

## 4.5

В этом пункте мы используем результаты п.п. 4.3, 4.4, чтобы доказать предельные соотношения/ 4.2.3/ во всей области /4.2.4/ нам понадобятся две леммы, являющиеся перефразировкой известных теорем /[4], стр. 204, 205/, применительно к нашему случаю.

Л е м м а 4.5.1

Пусть $\mathcal{D}$ -меньшая из областей в плоскости $z$, ограниченных кривой $\mathcal{D}_1$, состоящей из луча $z \geqslant N$, части кривой $C$ / /4.4.0/ и далее/, на которой $|z| \geqslant N$, и соединяющей их дуги круга $|z| = N$. Пусть $f(z)$ аналитическая функция $z = re^{i\theta}$, регулярная в области $\mathcal{D}$ вместе с ее границей и $|f(z)| \leqslant M$ на кривой $\mathcal{D}_1$. Пусть, кроме того, $|f(z)| < K\exp[r^a]$, $a < 2$ при $z \in \mathcal{D}$. Тогда $|f(z)| \leqslant M$ при всех $z \in \mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $a < b < 2$ и $F(z) = e^{-\varepsilon\lambda z^b}$, $\lambda = e^{-i\pi b/4}$; и далее дословно повторяется рассуждение[4]. Применим эту лемму к функции

$$f(z) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}}\, \gamma(z)\, e^{-z\tau_0(z) + \mathcal{X}[e^{\tau_0(z)}]} \qquad /4.5.1/$$

Согласно /4.1 б/ и /4.2 а/ есть $N$ такое, что $f(z)$ регулярна в области, указанной в лемме 4.5.1. Как мы показали в п. 4.3 и 4.4, $f(z)$ ограничена на кривой $\mathcal{D}$. Далее из /4.3.1/, /4.1.5/, /4.1.4/ следует:

$$f(z) = O[\exp(|z|^{1+\varepsilon})] \qquad \text{при } z \longrightarrow \infty$$

равномерно по $\arg z$ в области $\mathcal{D}$ для любого $\varepsilon > 0$. По лемме 4.5.1 отсюда вытекает, что $f(z)$ ограничена в области $\mathcal{D}$.

Лемма 4.5.2

Если $f(z) \to 1$ при $z \to \infty$ вдоль кривой $C$ и луча $z > 0$ и $f(z)$ регулярна и ограничена в области $\mathcal{D}$, то $f(z) \to 1$ при $|z| \to \infty$ равномерно по $\arg z$ в $\mathcal{D}$. Доказательство леммы является дословным повторением доказательства /4/, если там взять $F(z) = zf(z)/(z + \lambda e^{i\pi/4})$, $\lambda > 0$.

Применение леммы 4.5.2 к функции 4.5.1 доказывает предельное соотношение /4.2.3/ при $\arg z \geq 0$. Доказательство для $\arg z \leq 0$ аналогично. Этим доказательство теоремы 4.2 завершено. Из 4.2.а/ и 4.2. б/ вытекает

Следствие 4.5.1

Функция $\gamma(z)$ имеет лишь конечное число нулей во всякой области:

$$\operatorname{Re} z \ln|z| \geq -|z| d, \ |\arg z| \leq \delta < \beta + \pi/2, \ |z| \geq \varepsilon ;$$

здесь $d < \alpha - \pi/2$, $\varepsilon > 0$. На основании /4.2.3/, а также /4.1.4/, /4.1.5/ имеем

Следствие 4.5.2

Для любого $\delta$, $0 < \delta < \pi/2$, $1/\gamma(re^{i\theta}) = O\left[r^{-r(\cos\theta - \varepsilon)}\right]$ при $r \to \infty$ равномерно при $-\delta \leq \theta \leq \delta$ для любого $\varepsilon > 0$.

Следствие 4.5.3

$1/\gamma(z) = O\left[e^{|z|(\varepsilon + \pi/2)}\right]$ при $z \to \infty$ равномерно по $\arg z$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq C$ для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство

Согласно /3.8.3/, /4.1.4/ для любого $\varepsilon > 0$ есть $N$ такое что

$$\operatorname{Re} \mathcal{H}\left[e^{\tau_0(z)}\right] < \operatorname{Re} z + \varepsilon|z| \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \geq C, |z| \geq N.$$

Согласно /4.1.3/ /увеличив, если надо, $N$ / можно считать, что

$$\operatorname{Im} \tau_0(z) \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} z \arg z + \varepsilon|z|$$

в той же области $z$. Наконец, согласно /4.1.5/ можно считать, что

$$-\operatorname{Re} z \operatorname{Re} \tau_0(z) < 2|c| \ln|z| \qquad \text{при} \quad \operatorname{Re} z \geq C, \quad |z| \geq N.$$

Доказываемое утверждение следует из приведенных оценок и /4.2.3/. Обратим внимание на сходство /4.2.3/ с формулой Стирлинга. Заметим, что из /4.2.3/ легко получить формулу:

$$\{\gamma(z+h)/\gamma(z)\} e^{-h\tau_0(z)} \to 1 \quad \text{при} \quad z \to \infty \qquad /4.5.2/$$

аналогичную известной формуле для $\Gamma(z)$, /4/, стр. 72/.

4.6

Из формулы /4.2.3/ находим

$$\gamma(z) = O[e^{-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)|z|}] \qquad \text{при} \ \operatorname{Re} z \in C, \ z \to \infty \qquad /4.6.1/$$

для любых $C$ и $\varepsilon > 0$. Отсюда и из 4.2. а/ следует при $|\arg t| < \frac{\pi}{2}$

$$\psi(t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} t^{-u} \gamma(u)\, du, \qquad b > 0 \qquad /4.6.2/$$

Заметим также, что если

$$\mathcal{X}_\gamma(u) = \ln \gamma(u), \qquad /4.6.3/$$

то из /4.2.3/ следует:

$$\mathcal{X}_\gamma(u)/(u \ln u) \to 1 \qquad \text{при} \quad u \to \infty \qquad /4.6.4'/$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{X}'_\gamma(u) - \arg u \to 0 \qquad \text{при} \quad \text{—„—} \qquad /4.6.4''/$$

равномерно в любом угле $|\arg u| \leq \delta < \pi/2$. В этом пункте будет доказана следующая

Т е о р е м а 4.6

Пусть функция $\gamma(u)$ регулярна в области $|\arg u| < \delta$, $\frac{\pi}{2} < \delta < \pi$, и некоторой окрестности точки $u = 0$, функция $\mathcal{X}_\gamma(u)$, определенная формулой /4.6.3/, регулярна в области $|\arg u| < \delta$, $|u| > R$, $R \geq 0$ и удовлетворяет предельным соотношениям /4.6.4′–4″/ равномерно в любом угле $|\arg u| \leq \delta_1 < \delta$, и пусть функция $\psi(t)$ определена формулой /4.6.2/ при $|t| > 0$, $|\arg t| < \frac{\pi}{2}$. Тогда а/ $$\frac{\psi(t)}{\sqrt{2\pi u_0(t)}} e^{u_0(t)\ln t - \mathcal{X}_\gamma[u_0(t)]} \longrightarrow 1$$ /4.6.5/

при $|t| \to \infty$ равномерно в любом угле $|\arg t| \leqslant \delta, < \delta$; здесь $u_0(t)$ - функция, определенная уравнением /4.6.9/;

б/ $\psi(t) \in e_{\delta\beta}$ для любого $\beta < \delta - \pi/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Прежде всего заметим, что из /4.6.4'' / следует, что функция $\gamma(u)$ удовлетворяет оценке /4.6.1/; поэтому интеграл /4.6.2/ существует при $|t| > 0$, $|\arg t| < \pi/2$. Далее из /4.6.4 '/, /4.6.4 ''/ и леммы /3.1.4/ легко показать, что для любого $\sigma > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ есть число $N$ такое, что

$$\operatorname{Re} \mathcal{X}_\gamma(u) < -\left(\tfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \operatorname{Im} u$$ при $\operatorname{Re} u < \sigma$, $\arg u < \delta$, $\operatorname{Im} u > N$.

Отсюда следует возможность представить $\psi(t)$ в виде:

$$\psi(t) = \int_L t^{-u} \gamma(u)\, du,$$ /4.6.2 '/

где контур $L$ состоит из лучей $\arg u = \pm\delta$; вместе с /4.6.4 '/ это показывает, что $\psi(t)$ есть аналитическая функция регулярная в любом угле $|\arg t| < d$, $|t| > 0$. Подобно /4.2.3/, мы докажем сначала формулу /4.6.5/ методом перевала для лучей $\arg t = 0$, $\arg t = \pm\delta$. Из /4.6.4 '/ и /4.6.4 ''/ по лемме 3.1.9 получаем:

$$\left[d/du\, \mathcal{X}_\gamma(u)\right] / \ln u \longrightarrow 1$$ при $|u| \to \infty$ /4.6.6/

$$u\left[(d/du)^2 \mathcal{X}_\gamma(u)\right] / \ln u \longrightarrow 1$$ при ———— " . /4.6.7/

равномерно в любом угле $|\arg u| \leqslant \delta, < \delta$. Из /4.6.7/ и формулы Коши для $(d/du)^k \mathcal{X}_\gamma(u)$ получаем оценку: для любого $\delta_1$, $0 < \delta_1 < \delta$ и любого $\eta$, $0 < \eta < \sin(\delta - \delta_1)$ есть числа $H$ и $N$ такие, что

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{k}\mathcal{X}_{\gamma}(u)\right| < H(k-2)!\,\left|u^{1-k}\zeta^{-k}\right| \qquad /4.6.8/$$

при $|u| > N,\quad |\arg u| < \delta_1\ ;\quad k = 2, 3, \ldots$

Формулы /4.6.6/, /4.6.4 "/ дают /ср. /3.8.1/ в//: для любого $\delta_1$, $0<\delta_1<\delta$ есть число $N_1$ такое, что функция $\exp \mathcal{X}'_{\gamma}(u)$ однолистна при $|u| > N_1$, $|\arg u| < \delta_1$. Далее, подобно лемме 4.1, получаем: для любых чисел $\delta'$ и $\delta''$, $0<\delta''<\delta'<\delta$ есть числа $N'$ и $N''$ такие, что уравнение

$$\ln t = \mathcal{X}'_{\gamma}(u_0) \qquad /4.6.9/$$

при $|\arg t| < \delta''$, $|t| > N''$, имеет один и только один корень $u_0(t)$ в области $|\arg u_0| < \delta'$, $|u_0| > N'$, и $u_0(t)$ есть аналитическая функция $t$, регулярная в области: $|\arg t| < \delta''$, $|t| > N''$, причем

$$\arg u_0(t) - \arg t \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad |t| \longrightarrow \infty \qquad /4.6.10'/$$

$$[\ln u_0(t)]/\ln t \longrightarrow 1 \quad \text{при} \quad \text{—— " } \qquad /4.6.10''/$$

равномерно в любом угле $|\arg t| \le \delta_1 < \delta$.

Лемма 4.6.1

Пусть

$$\sigma(u,t) = +[u_0(t)-u]\ln t + \mathcal{X}_{\gamma}(u) - \mathcal{X}_{\gamma}[u_0(t)] \qquad /4.6.11/$$

$$R(u,t) = \operatorname{Re}\sigma(u,t) \qquad /4.6.12/$$

и пусть $u = u_0(t) + ip$. Тогда есть числа $N>0$ и $\varepsilon>0$ такие, что при $t > N$

а/ $d/dp\, R(u,t) < -\varepsilon/2$ при $p > \varepsilon|u_0(t)|$

, $d/dp\, R(u,t) > \varepsilon/2$ при $p < -\varepsilon|u_0(t)|$

б/ $\frac{d}{dp}R(u,t) \leqslant -\frac{p}{2|u_0(t)|}$ при $0 \leqslant p \leqslant \varepsilon|u_0(t)|$

$\frac{d}{dp}R(u,t) \geqslant \frac{p}{2|u_0(t)|}$ при $0 \leqslant -p \leqslant \varepsilon|u_0(t)|$

в/ $R(u,t) \leqslant -p^2/[4u_0(t)]$ при $-\varepsilon|u_0(t)| \leqslant p \leqslant \varepsilon|u_0(t)|$

г/ $R(u,t) \leqslant -\varepsilon^2|u_0(t)|/4 - \varepsilon[|p| - \varepsilon|u_0(t)|]/2$

при $p < -\varepsilon|u_0(t)|$ и $p > \varepsilon|u_0(t)|$ .

Доказательство

а/ следует из /4.6.4 $''$/, /4.6.10 $''$/ и того, что согласно /4.6.12/ $\frac{d}{dp}R(u,t) = -\mathrm{Im}\,\mathscr{X}'_\gamma(u)$ / у нас $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Im}\,t = 0$/.

Далее б/ и в/ следуют из разложения:

$$b(u,t) = \sum_{2}^{\infty} \mathscr{X}_\gamma^{(n)}[u_0(t)]\frac{[u-u_0(t)]^n}{n!} \qquad /4.6.13/$$

/см. /4.6.9/ и /4.6.11/ / с учетом /4.6.8/. Наконец,

г/ вытекает из а/ и б/.

Из /4.6.13/, /4.6.8/ легко получаем:

$$b[u_0(t) + iq\sqrt{u_0(t)}, t] \longrightarrow -q^2/2 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Отсюда и из леммы 4.6.1, взяв в /4.6.2/ интеграл по прямой $\mathrm{Re}\,u = \mathrm{Re}\,u_0(t)$ , получаем /4.6.5/ для луча $\arg t = 0$ . Чтобы доказать /4.6.5/ при $\arg t = \delta_1$ , $\frac{\pi}{2} < \delta_1 < \delta$ , возьмем контур в /4.6.2 $'$/, состоящим из лучей $\arg u = -\pi/2$ и $\arg u = \arg u_0(t)$ .

Так как $$|t^{-u}| = |t|^{-\mathrm{Re}\,u} e^{\arg t\,\mathrm{Im}\,u}, \qquad /4.6.14/$$

то /с учетом /4.6.10 $'$// интеграл по части $\mathrm{Im}\,u < N\cos(\delta_1 - \frac{\pi}{2})$ этого контура есть

$$O[|t|^{N\sin(\delta_1 - \frac{\pi}{2}) + \varepsilon}] \quad \text{при} \quad t \longrightarrow \infty, \ \arg t = \delta_1$$

и не дает вклада в формулу /4.6.5/. Нам остается рассмотреть интеграл

$$\int\limits_{|u|\geq N;\ \arg u=\arg u_0(t)} e^{-u\ln t+\mathcal{H}_\gamma(u)}du \qquad /4.6.15/$$

Л е м м а 4.6.2

Пусть функции $b(u,t)$ и $R(u,t)$ определены формулами /4.6.11/, /4,6.12/ и пусть $u=u_0(t)+pe^{i\arg u_0(t)}$. Тогда есть числа $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, $N>0$ и $N_1>0$ такие, что при $\arg t=\delta_1$, $|t|>N_1$

а/ функция $\frac{d}{dp}R(u,t)$ монотонно убывает с ростом $p$ при $-|u_0(t)|+N<p$

б/ $R(u,t)\leq p^2\cos\delta_1/|4u_0(t)|$ при $-\varepsilon|u_0(t)|\leq p\leq\varepsilon|u_0(t)|$

в/ $\frac{d}{dp}R(u,t)\leq p\cos\delta_1/[2|u_0(t)|]$ при $0\leq p\leq\varepsilon|u_0(t)|$

г/ $R(u,t)\leq\varepsilon^2\cos\delta_1|u_0(t)|/4$ при $-|u_0(t)|+N\leq p\leq-\varepsilon|u_0(t)|$

д/ $R(u,t)\leq\varepsilon^2\cos\delta_1|u_0(t)|/4+\varepsilon\cos\delta_1[p-\varepsilon|u_0(t)|]/2$

при $p>\varepsilon|u_0(t)|$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Из /4.6.12/, /4.6.7/ легко показать, что $\frac{d^2}{dp^2}R(u,t)<0$ при $|u|>N$, $|t|>N_1$, $\arg u=\arg u_0(t)$, $\arg t=\delta_1$, $\frac{\pi}{2}<\delta_1<\delta$ для некоторых $N$ и $N_1$. Это доказывает а/. б/ и в/ следуют из разложения /4.6.13/. г/ и д/ вытекают из а/, б/ и в/. Применяя лемму 4.6.2 к интегралу /4.6.15/, обычным способом устанавливаем /4.6.5/ для луча $\arg t=\delta_1$, /и аналогично для луча $\arg t=-\delta_1$/. Далее заметим следующие оценки: при $t\to\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi u_0(t)}}e^{-u_0(t)\ln t+\mathcal{H}_\gamma[u_0(t)]}=O[\exp(|t|^{1+\varepsilon})] \qquad /4.6.16/$$

равномерно в любом угле $|\arg t|\leq\delta'<\delta$.

$$\psi(t) = O[\exp|t|^{1+\varepsilon}] \qquad \text{при} \quad |t| \to \infty \qquad /4.6.17/$$

равномерно в любом угле, имеющие место для любого $\varepsilon > 0$. Первая из них следует из /4.6.4'/, /4.6.10'–10''/. /4.6.17/ следует из интегрального представления /4.6.2'/ и оценки

$$\gamma(u) = O[e^{(\cos\delta_1+\varepsilon)|u|\ln|u|}] \qquad \text{при} \quad u \to \infty,$$

$\arg u = \delta_1$ /ср.[4], стр. 287/ с учетом /4.6.14/. Из /4.6.16–17/ методом п. 4.5 распространяем доказанное нами для лучей $\arg t = \pm\delta_1$, $\arg t = \pm\delta_1$ предельное соотношение /4.6.5/ на всю область $|\arg t| \leq \delta_1$. Таким образом, мы доказали 4.6. а/.

Из а/ легко следует

$$\psi(t) \in \mathcal{E}_\delta. \qquad /4.6.18/$$

Далее подставим в /4.6.2'/ $t = e^{\tau}$; очевидно $Re(u\tau) \geq 0$ при $u \in L$, $|\pi - \arg t| < \delta_1 - \frac{\pi}{2}$. Ввиду сходимости интеграла $\int_L |\gamma(u)du|$ отсюда следует

$$\psi(e^{\tau}) = O(1) \qquad \text{при} \quad \tau \to \infty$$

равномерно в любом угле $|\pi - \arg\tau| < \delta_1 - \frac{\pi}{2}$. Вместе с /4.6.18/ это доказывает утверждение б/ [x].

4.7

В этом пункте мы покажем, что, если

$$\gamma(1+s) = \left[e^{-bs} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{a_k}\right) e^{-s/a_k}\right]^{-1} \qquad /4.7.1/$$

$$a_{k+1} \geq a_k \qquad a_1 > +1 \qquad ; \qquad /4.7.2/$$

---

[x] Легко видеть, что заключение теоремы /4.6 остается в силе, если $\gamma(z)$ удовлетворяет всем прочим условиям этой теоремы, но при $z = 0$ имеет полюс первого порядка.

$$a_k/k \longrightarrow 1 \quad при \quad k \longrightarrow \infty \qquad /4.7.3/$$

и $\psi(z)$ определена формулой /4.6.2/, то $\psi(z) \in C_{\alpha\beta}$ для всех $\alpha < \pi$ и $\beta < \pi/2$.

Тем самым мы указываем /возможно не полностью/ подкласс ядер, на котором класс, рассмотренный в [1], и наш класс пересекаются.

Чтобы доказать наше утверждение, нам, очевидно, достаточно показать лишь, что функция $\gamma(u)$, определенная /4.7.1/, удовлетворяет предельным соотношениям /4.6.4'/ и /4.6.4"/ в любом угле $|\arg u| \le \delta_1 < \pi$ /ибо выполнение остальных условий теоремы 4.6 – очевидно/.

Имеем /мы слегка изменили рассуждение леммы 2.1 гл. IX из [1]/:

$$\ln \gamma(1+u) = \sum_1^\infty \left[\ln\left(1+\frac{u}{a_k}\right) - \frac{u}{a_k}\right] - bu =$$

$$= -bu + \int_{-1}^\infty \left[\ln\left(1+\frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a}\right] dN(a) =$$

$$= -bu + \int_{-1}^\infty \frac{u^2 N(a)\,da}{a^2(a+u)}$$

здесь $N(a)$ – число точек $a_k$ в интервале $(0, a)$. Согласно /4.7.3/ $N(a)/a \longrightarrow 1$ при $a \longrightarrow \infty$; но

$$\int_1^\infty \frac{u^2\,da}{(a+u)\,a} = u \ln u$$

далее легко доказать, что

$$\int^\infty \frac{u^2\,da}{(a+u)\,a}\, \bar{\bar{o}}(1) = \bar{\bar{o}}(u \ln u)$$

при $u \longrightarrow \infty$ в любом угле $|\arg u| \le \delta < \pi$. Этим мы установили предельное соотношение /4.6.4'/; /4.6.4"/ точно таким путем выводится из формулы

$$\frac{d}{du}\ln\gamma(1+u)=\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{u(2a+u)}{a^2(a+u)^2}N(a)da-b\,.$$

## § 5. Взаимная функция $\tilde{\psi}(x)$

### 5.1

Согласно 4.2.1/ есть вещественное число $\lambda$ такое, что функция $1/\gamma(1+u)$ регулярна в полуплоскости $Re\,u>\lambda$. Мы в дальнейшем всегда считаем

$$\lambda\geqslant-1. \qquad /5.1.1/$$

Пусть $m$ –целое число, такое что

$$m-1\leq\lambda<m\,,\qquad 0<m. \qquad /5.1.2/$$

Функцией, взаимной к $\psi'(t)$, $\psi(t)\in\mathcal{C}_{\alpha\beta}$, мы будем называть функцию

$$\tilde{\psi}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{x^n}{\gamma(1+n)} \qquad /5.1.3/$$

согласно /4.3.4'/ и /4.2.2/ эта функция – целая, порядка 1 и ее можно представить в виде

$$\tilde{\psi}(x)=\int\limits_{L_{\lambda'\delta}}\frac{x^u du}{\gamma(1+u)[e^{2\pi i u}-1]}, \qquad /5.1.4/$$

где контур $L_{\lambda'\delta}$ состоит из лучей $\arg(u-\lambda')=\pm\delta$, $\lambda<\lambda'<m$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ и приходится в сторону убывания $\Im m\,u$. Так как

$$|x^u|=|x|^{Re\,u}\,e^{-\arg x\,\Im m\,u}, \qquad /5.1.5/$$

то из следствия 4.5.3 легко показать, что при $\arg x=\pi$, $\ln|x|<-\frac{\pi}{2}$

контур в /5.1.4/ можно разогнуть в прямую $\mathrm{Re}\, u = \lambda'$ ; опять-таки из следствия 4.5.3 и из 5.1.5 вытекает, что полученный интеграл равномерно сходится в любой области $\varepsilon \leq |x| \leq N$ , $|\pi - \arg x| \leq \delta < \frac{\pi}{2}$ ; это дает:

$$\tilde{\psi}(x) = - \int_{\lambda'-i\infty}^{\lambda'+i\infty} \frac{x^u du}{\gamma(1+u)(e^{2\pi i u} - 1)} \qquad /5.1.6/$$

при $|x| > 0$ , $\frac{\pi}{2} < \arg x < 3\pi/2$ . Отсюда с учетом /5.1.5/ получаем

$$\tilde{\psi}(x) = O(|x|^{\lambda'}) \quad \text{при} \quad x \longrightarrow \infty \qquad /5.1.7/$$

равномерно в любом угле $|\pi - \arg x| \leq \delta < \frac{\pi}{2}$ для любого $\lambda' > \lambda$. Нам понадобится в дальнейшем также функция:

$$\tilde{\psi}_\nu(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^{n+\nu}}{\gamma(1+n+\nu)} \qquad /5.1.3'/$$

при

$$\lambda - m < \nu \leq 0. \qquad /5.1.2'/$$

Согласно следствию 4.5.2/ ряд $\tilde{\psi}_\nu(x)$ сходится для всех $x$ . Из интегралов типа /5.1.4/, /5.1.6/ получаем:

$$\tilde{\psi}_\nu(x) = O(|x|^{\lambda'}) \quad \text{при} \quad |x| \longrightarrow \infty \qquad /5.1.7'/$$

равномерно в любом угле $|\pi - \arg x| \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ для любого $\lambda' > \lambda$ . Далее, из /5.1.4/ и подобной ей формулы для $\tilde{\psi}_\nu(x)$ находим:

$$\tilde{\psi}(x) - \tilde{\psi}_\nu(x) = \int_{L_{\lambda'\delta}} \frac{x^u du \, [1 - e^{2\pi i \nu}]}{\gamma(1+u)[e^{2\pi i u} - 1][1 - e^{2\pi i(\nu - u)}]},$$

здесь $L_{\lambda'\delta}$ -контур того же вида , что в /5.1.4/, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $\lambda < \lambda' < m + \nu$. Отсюда подобно /5.1.7/, /5.1.7'/ получаем:

$$\tilde{\psi}(x) - \tilde{\psi}_\nu(x) = O(|x|^{\lambda'}) \ \text{при} \ |x| \longrightarrow \infty . \qquad /5.1.7''/$$

равномерно в любом угле $|\arg x| \leq \delta < \frac{3\pi}{2}$ для любого $\lambda' > \lambda$. Заметим также, что

$$\widetilde{\psi}(x) - \widetilde{\psi}_\nu(x) = O(|x|^{m+\nu}) \text{ при } x \to 0 \qquad /5.1.8/$$

равномерно в любом угле.

5.2

Т е о р е м а 5.2

Если $\psi(t) \in e_{2\rho}$, $\mathcal{H}(t) = -\ln\psi(t)$ и функция $\widetilde{\psi}(x)$ -взаимная к $\psi(t)$ /см. п. 5.1/, то

$$\widetilde{\psi}(x)\,\psi(x)\,x/\mathcal{H}(x) \to 1 \text{ при } x \to \infty \qquad /5.2.1/$$

равномерно в любом угле $|\arg x| \leq \delta < \frac{\pi}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Обозначим /в отличие от 4.6.3/

$$_{1}\mathcal{H}_\gamma(u) = \ln[\gamma(u)(1 - e^{2\pi i u})]. \qquad /5.2.2/$$

Тогда согласно /4.2.3/ $_{1}\mathcal{H}_\gamma(u)$ удовлетворяет предельным соотношениям /4.6.4 $'$-4 $''$/ равномерно в любом угле $\delta_1 \leq \arg x \leq \frac{\pi}{2} - \delta_1$, $0 < \delta_1 < \frac{\pi}{4}$. Определим функцию $u_1(x)$ уравнением

$$\ln x = \frac{d}{du}\,{}_{1}\mathcal{H}_\gamma(u)\Big|_{u = u_1(x)} \qquad /5.2.3/$$

/ср. /4.6.9//; тогда $u_1(x)$ удовлетворяет соотношениям /4.6.10 $'$-10 $''$/ в любом угле $\delta_1 \leq \arg x \leq \frac{\pi}{2} - \delta_1$, $0 < \delta_1 < \frac{\pi}{4}$. Из интеграла /5.1.4/ /совершенно так же как в п. 4.6 для луча $\arg t = \delta_1$/ получаем:

$$\widetilde{\psi}(x)\frac{x}{\sqrt{2\pi u_1(x)}}\exp[-u_1(x)\ln x + {}_{1}\mathcal{H}_\gamma[u_1(x)]] \to 1 \qquad /5.2.4/$$

когда $x \to \infty$ по любому лучу $\arg x = \delta_1$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

Далее, из /4.6.10 $'$-10 $''$/, /5.2.3/, /4.6.9/, /4.6.7/ следует

$$u_1(x) - u_0(x) = O[e^{-r^{1-\varepsilon}}] \quad \text{при} \quad r \to \infty$$

для луча $x = re^{i\theta}$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Поэтому /5.2.4/ эквивалентно

$$\frac{x\,\tilde{\varphi}(x)}{\sqrt{2\pi u_0(x)}}\, e^{-u_0(x)\ln x + \mathcal{X}_\gamma[u_0(x)]} \longrightarrow 1 \qquad /5.2.4/$$

при $x = re^{i\theta}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $r \to \infty$. Далее, согласно /4.2.3/, /4.6.3/ и лемме /3.1.9/

$$\mathcal{X}_\gamma(u) - [u\tau_0(u) - \mathcal{X}(e^{\tau_0(u)}) + \frac{1}{2}\ln\frac{2\pi}{u}] \longrightarrow 0 \qquad /5.2.5'/$$

$$u\,\mathcal{X}_\gamma'(u) - u\tau_0(u) + \frac{1}{2} \longrightarrow 0 \qquad /5.2.5''/$$

при $|u| \to \infty$ равномерно в любом угле $|\arg u| \leq \delta_1 < \frac{\pi}{2}$ (мы учли также /4.1.1/). Из /5.2.5''/ и /4.6.9/ находим

$$\tau_0[u_0(x)] = \ln x + \frac{1}{2u_0(x)} + o\left(\frac{1}{|u_0(x)|}\right) \quad \text{при} \quad x \to \infty \qquad /5.2.6/$$

Из /5.2.6/ и разложения $\mathcal{X}(e^{b+a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_n(e^b)\frac{a^n}{n!}$ с учетом /3.8.5/ легко доказать, что

$$\mathcal{X}[e^{\tau_0(u_0(x))}] - \mathcal{X}(x) \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad x \to \infty \qquad /5.2.7/$$

для любого луча $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$. Подставив /5.2.5'-7/ в /5.2.4/ с учетом /3.2.1/ убеждаемся в справедливости /5.2.1/ для любого луча $\arg x = \delta_1$, $0 < \delta_1 < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрение для луча $\arg x = -\delta_1$ аналогично. На основании следствия /4.5.2/

$$\tilde{\varphi}(x) = O[e^{|x|^{1+\varepsilon}}] \quad \text{при} \quad |x| \to \infty \qquad /5.2.8/$$

для любого $\varepsilon > 0$. Учитывая еще следствие 3.7 а/ распространяем доказанное выше для лучей $\arg x = \pm\delta_1$ предельное соотношение /5.2.1/ на весь угол $|\arg x| \leq \delta_1$ /ср. п. 4.5/.

5.3

Л е м м а 5.3

Если функция $\psi(t)$ принадлежит классу $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ и функция $\tilde{\psi}(x)$ - к ней взаимная, то

$$\int_0^{\infty} \tilde{\psi}(pt)\psi(qt)dt = \left(\frac{p}{q}\right)^m \frac{1}{q-p} \qquad /5.3.1/$$

при $Re\, q > 0$ , $Re\, p < Re\, q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Прежде всего мы установим оценку:

$$\tilde{\psi}(pt) = O\left[|\psi(\gamma t)|^{-1}\right] \text{ при } t>0,\ t \to \infty \qquad /5.3.2/$$

равномерно в любой области:

$$|p| < \sqrt{a^2+b^2} \quad |\Im m\, p| < b,\ Re\, p < a,\ a < b,\ 0 < a < \gamma \qquad /5.3.2'/$$

Из /5.2.1/, следствия 3.7. б/ и леммы 3.8. а'/ легко показать, что /для любого $\varepsilon > 0$/

$$\tilde{\psi}(q) = O\left[|\psi((1+\varepsilon)Re\, q)|^{-1}\right] \text{ при } q \to \infty \qquad /5.3.3/$$

равномерно в любом угле $|\arg q| < \frac{\pi}{2} - \delta$ . Из/5.1.7/ имеем

$$\tilde{\psi}(q) = O\left[\psi((1+\varepsilon)|q|\sin\delta)\right] \text{ при } |q| \to \infty \qquad /5.3.4/$$

равномерно по $\arg q$ при $Re\, q < +|q|\sin\delta$ . Далее по /5.2.1/ и /5.1.7/ находим:

$$\tilde{\psi}(q)\psi((1+\varepsilon)(-iq)tg\,\delta) = O(1) \quad \text{при } q \to \infty,\ \arg q = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\tilde{\psi}(q)\psi[(1+\varepsilon)(-iq)tg\,\delta] = O(1) \quad \text{при } \text{———}\text{"}\ \arg q = \frac{\pi}{2} + \delta$$

По теореме Фрагмен-Линделефа /[4], стр. 204/ отсюда следует /с учетом

/5.2.8/ и следствия 3.7. а// $\tilde{\psi}(q)\psi[(1+\varepsilon)(-iq)\,tg\,\delta] = 1$ при $|q| \to \infty$ равномерно в угле $|\frac{\pi}{2} - \arg q| \leq \delta$. Отсюда по лемме /3.8.1 а/ получаем:

$$\tilde{\psi}(q) = O\{|\psi[(1+\varepsilon)|\Im m\, q|\, tg\,\delta]|^{-1}\} \quad q \to \infty \qquad /5.3.5/$$

равномерно по $\arg q$ при $|\frac{\pi}{2} - \arg q| \leq \delta$. Далее фиксируем значения $\delta$ и $\varepsilon$:

$$\delta = \operatorname{arctg}(a/\varepsilon), \qquad (1+\varepsilon)a = \gamma. \qquad /5.3.6/$$

С учетом теоремы о максимуме модуля, оценку /5.3.2/ достаточно доказать для границы области /5.3.2'/; но эта оценка вытекает из /5.3.3-5/ ввиду /5.3.6/.

Пусть теперь

$0 < \gamma < Re\, q, \quad 0 < a < \gamma.$

Представив функцию $\tilde{\psi}(pt)\psi(qt)$ в виде

$$\{\tilde{\psi}(pt)\,\psi(\gamma t)\}\{\psi(qt)[\psi(\gamma t)]^{-1}\} =$$

$$= O(1)\,O[\psi((1-\varepsilon)(Re\, q - \gamma)t)] \qquad /4.4.3''/$$

при $t > 0, \quad t \to \infty$

/мы использовали /5.3.2/ и утверждение в/ леммы 3.8/, убеждаемся, что интеграл в /5.3.1/ при данном значении $q$, $Re\, q > 0$ сходится равномерно по $p$ в любой области вида /5.3.2'/, $0 < a < Re\, q$. Поэтому этот интеграл представляет в полуплоскости $Re\, p < Re\, q$ аналитическую функцию $p$, регулярную в этой полуплоскости. Далее заметим, что ввиду /4.3.2/ и /4.3.14/ ряд

$$\sum \left|\frac{a^n}{\gamma(1+n)}\right| \int_0^\infty |\psi(t)\, t^n dt|$$

сходится при $a < 1$. Поэтому, подставив в /5.3.1/ ряд /5.1.3/, можно проинтегрировать его почленно /[4], стр. 5.7/ при $q > 0$, $|p| < q$.

С учетом /4.2.1/ это по принципу аналитического продолжения доказывает /5.3.1/ при $q>0$, $Re p<q$. Из леммы 6.1 оценки /5.3.2/ следует, что формула /5.3.1/, доказанная нами для $q>0$, $Re p<q$, имеет место для всех $q$ из полуплоскости $Re q > Max[0, Re p]$.
В заключение этого пункта отметим, что подобно /5.3.1/ можно доказать формулу

$$\int_0^\infty \tilde{\varphi}_\nu(pt)\,\psi(qt)\,dt = \left(\frac{p}{q}\right)^{m+\nu}\frac{1}{q-p} \qquad /5.3.8/$$

при $Re\, q>0, \quad Re(p-q)<0;$

здесь $\tilde{\varphi}_\nu(pt)$ – функция, определенная /5.1.2'–3'/.

## 5.4

Л е м м а 5.4

Пусть функция $\psi(t)$ принадлежит классу $e_{\alpha\rho}$ и функция $\tilde{\varphi}(x)$ ей взаимная. Пусть также

$$\Phi_{p_0 t}(\tau) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^m \frac{1}{\tau - t} - \int_0^{p_0} \tilde{\varphi}(pt)\,\psi(p\tau)\,dp \qquad /5.4.1/$$

$$p_0>0,\ |t|>0,\ |\arg t|<\delta_1,\ 0<\delta_1<\frac{\pi}{2} \qquad /5.4.2/$$

и контуры ${}_1L$ и ${}_2L$ есть лучи $\arg(p-p_0)=\pm\left(\frac{\pi}{2}+\delta_1\right)$ проходимые в сторону роста $|Im\, p|$.

Тогда а/ $\Phi_{p_0 t}(\tau)$ есть аналитическая функция $\tau$, регулярная в области $|\arg \tau|<\alpha, |\tau|>0$, за исключением полюса первого порядка с вычетом 1, который она имеет в точке $\tau = t$;
б/ $\tau^m \Phi_{p_0 t}(\tau) = \underline{\underline{O}}(1)$ при $\tau \to 0$ равномерно в любом угле ; в/ для любого $p_1$, $0<p_1<p_0$ – есть число $t_1$, $t_1>|t|$ /не зависящее от $\tau$ /, такое, что

$$\Phi_{p_0 t}(\tau) = O[\psi(p_1 Re\tau - p_1 t_1)] \quad \text{при} \quad \tau\to\infty$$

равномерно в любом угле $|\arg\tau| \le \delta < \frac{\pi}{2}$ ; г/ интеграл

$$\int_{{}_1L} \tilde{\psi}(pt)\psi(p\tau)dp \qquad /5.4.3/$$

представляет $\varphi_{p_0 t}(\tau)$ при $|\tau|>0, -\alpha < \arg\tau < -\delta_1$, аналогичный интеграл по ${}_2L$ представляет $\varphi_{p_0 t}(\tau)$ при $|\tau|>0,\ \delta_1 < \arg\tau < \alpha$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Утверждения а/ и б/ непосредственно вытекают из /5.4.1/. Далее заметим, что согласно /5.3.1/ и /5.4.1/

$$\varphi_{p_0 t}(\tau) = \int_{p_0}^{\infty} \tilde{\psi}(pt)\psi(p\tau)dp \qquad /5.4.4/$$

при $Re\, t < Re\,\tau$, $Re\,\tau > 0$. Из леммы 3.8 легко показать, что для любого числа $p_1$, $0 < p_1 < p_0$, любого $\delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ есть число $N$ такое, что

$$|\psi(p\tau)/\psi(pN)| < |\psi(p_1 Re\tau - p_1 N)|$$

при $p \ge p_0$, $Re\,\tau \ge 2N$, $|\arg\tau| \le \delta$.

Пусть, кроме того, $N > Re\, t$. Так как интеграл $\int_0 |\psi(pt)\psi(p\tau)dp|$ сходится, то в/ следует из полученного неравенства. Подобно лемме 6.1 легко убедится, что интеграл /5.4.3/ сходится равномерно в любой ограниченной замкнутой области, целиком лежащей в полуплоскости $Re(ie^{i\delta_1}\tau) > 0$. Если $-\alpha < \arg\tau < \alpha - \delta_1 - \frac{\pi}{2}$, то функция $\psi(p\tau)$ регулярна в каждой точке контура ${}_1L$. Поэтому интеграл /5.4.3/ есть аналитическая функция $\tau$ регулярная при $|\tau|>0$, $-\alpha < \arg\tau < -\delta_1$. Поэтому, чтобы доказать г/ нам достаточно доказать, что интегралы /5.4.3/ и /5.4.4/ совпадают на некоторой части луча $\tau = \rho \exp[-\frac{i}{2}(\delta_1 + \frac{\pi}{2})]$, $\rho > 0$ для этого мы оценим при $\arg\tau = -(\delta_1 + \frac{\pi}{2})/2$ функцию $\tilde{\psi}(pt)\cdot\psi(p\tau)$ в угле $0 \le \arg p \le \delta_1 + \frac{\pi}{2}$. Пусть $p = re^{i\theta}$. Тогда, очевидно, $Re(\tau e^{i\theta}) \ge \rho\cos[(\delta_1 + \frac{\pi}{2})/2]$, поэтому согласно утверждению леммы 3.8. а/ для любого $\varepsilon > 0$ есть $N$ такое, что

$$|\psi(p\tau)| < |\psi(r\rho(1-\varepsilon)\cos[(\delta_1 + \tfrac{\pi}{2})/2])|$$

при $\rho_1 > N$. Пусть $\rho(1-\varepsilon)\cos[(\delta_1+\frac{\pi}{2})/2] > |t_1|$

Отсюда согласно /5.3.2/ и утверждению леммы 3.8 в/ для любого $\varepsilon_1 > 0$ и любого $\lambda$, $0 < \lambda < (1-\varepsilon)\rho\cos[(\delta_1+\frac{\pi}{2})/2] - |t_1|$ есть число $N_1$, такое, что $|\tilde{\psi}(\rho t)\psi(\rho\tau)| < |\psi(r\lambda(1-\varepsilon_1))|$ при $r > N_1$. По теореме Коши /с учетом следствия 3.7. а/ отсюда следует, что интегралы /5.4.3/ и /5.4.4/ совпадают при $\arg\tau = -(\delta_1+\frac{\pi}{2})/2$ для достаточно больших значений $|\tau|$. Это завершает доказательство г/ и всей леммы 5.4.

## § 6. Интегральное преобразование

$$F(p) = \int_0^\infty \psi(pt)Q(t)dt \qquad /6/$$

6.1

Л е м м а 6.1.

Пусть 1/ $\psi(t) \in \mathcal{C}_{\alpha\beta}$; 2/ при $t > 0$ дана функция $Q(t)$, ограниченная на каждом интервале $\varepsilon \leqslant t \leqslant N$, , удовлетворяющая условиям:

$$Q(t) = Q(t^{e}) \text{ при } t \to 0, \quad e > -1 \qquad /6.1.1/$$

$$Q(t) = O[|\psi(Rt)|^{-1}] \text{ при } t \to \infty, \ R > 0; \qquad /6.1.2/,$$

3/ функция $F(p)$ определена формулой /6/.

Тогда: а/ интеграл $\int_0 |Q(t)\psi(pt)|dt$ сходится равномерно в любой области $\operatorname{Re} p \geqslant R' > R$, $|\arg p| \leqslant \zeta < \frac{\pi}{2}$, б/ функция $F(p)$ регулярна при $\operatorname{Re} p > R$, в/ для любого $R' > R$ и любого $\zeta$, $0 < \zeta < \frac{\pi}{2}$ есть число $H$ такое, что

$$\left.\begin{aligned} &\int_0 |\psi(pt)Q(t)|dt < H|p|^{-1-e} \\ &|F(p)| < H|p|^{-1-e} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{при } \operatorname{Re} p \geqslant R' \\ &|\arg p| \leqslant \zeta \end{aligned}$$

Доказательство

Пусть $R'>R$ и $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$. Возьмем $\varepsilon$, $0<\varepsilon<R'-R$. Согласно утверждению г/ леммы 3.8 есть число $N$ такое что

$$|\psi(pt)/\psi(Rt)|<|\psi(\varepsilon t)|$$

$$\text{при}\quad t>N,\quad \operatorname{Re}p\geq R';\quad |\arg p|\leq\gamma.$$

Так как интеграл $\int\limits_{0}^{\infty}|\psi(\varepsilon t)|dt$ сходится /следствие 3.7. а//, то а/ следует из приведенной оценки и /6.1.2/. б/ вытекает из а/. Далее, пусть $I_1(p)=\int\limits_0^N|Q(t)\psi(pt)|dt$ и $I_2(p)=\int\limits_N^\infty|Q(t)\psi(pt)|dt$ Тогда из /6.1.1/ следует: $I_1(p)=O[|p|^{-1-e}]$ при $|p|\to\infty$ равномерно при $|\arg p|\leq\gamma$. Интеграл $I_2(p)$ оценивается подобно 5.4. в/:

$I_2(p)=O[\psi(N_1\operatorname{Re}p-R_1N_1)]$ при $|p|\to\infty$ равномерно при $|\arg p|\leq\gamma$ /здесь числа $N_1$, и $R_1>R$ не зависят от $p$ /. Отсюда по следствию 3.7. а/ находим:

$I_2(p)=O[\exp(-|p|^{1-\varepsilon})]$ при $|p|\to\infty$ равномерно при $|\arg p|\leq\gamma$ /для любого $\varepsilon>0$ /. Получение оценки $I_1(p)$ и $I_2(p)$ доказывают в/ и г/.

Теорема 6.1

Пусть 1/ $\psi(t)\in\mathcal{E}_{\alpha\beta}$, функция $\gamma(1+u)$ /4.2.1/ не имеет нулей при $\operatorname{Re}u>\lambda$, $\lambda\geq-1$ и $\tilde{\varphi}(x)$ -функция, взаимная к $\psi(t)$ 2/ $Q(t)$ -аналитическая функция $t$, регулярная в угле $|\arg t|\leq\delta$, $|t|>0$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, удовлетворяющая условиям:

$Q(t)=\underline{\underline{O}}(|t|^e)$ при $t\to 0$, $e>\lambda$ /6.1.3/

$Q(t)=O[|\psi(R\operatorname{Re}t)|^{-1}]$ при $t\to\infty$ /6.1.4/

равномерно в угле $|\arg t|\leq\gamma$, $R>0$; 3/ функция $F(p)$ определена формулой /6/; 4/ даны числа $\delta_1$, $R_1$, $0<\delta_1<\delta$ и $R_1>R$ и контуры

$_1L$ и $_2L$ есть лучи $\arg(p-R_1)=\delta_1+\frac{\pi}{2}$ и $\arg(p_1-R_1)=-\delta_1-\frac{\pi}{2}$ проходимые в сторону роста $\operatorname{Im} p$.

Тогда: а/ функция $F(p)$ регулярна в угле $|\arg(p-R)|<\delta+\frac{\pi}{2}$ б/ $F(p)=O(|p|^{-1-e})$ при $p\to\infty$ равномерно в любом угле $|\arg p|\leq\xi<\frac{\pi}{2}+\delta$; в/ при $t>0$, $|\arg t|<\delta_1$

$$Q(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1+L_2}\tilde{\psi}(pt)F(p)dp. \qquad /6.1.5/$$

Доказателство

Рассмотрим интеграл

$$F_{1,2}(p)=\int\limits_{S\pm\delta}\psi(p\tau)Q(\tau)d\tau, \qquad /6.1.6/$$

где $S_{\pm\delta}$ есть лучи $\arg s=\pm\delta$. Из /6.1.4/ по лемме 6.1 следует, что функции $F_1(p)$ и $F_2(p)$ регулярны при $Re(pe^{i\delta})>R\cos\delta$ и $Re(pe^{-i\delta})>R\cos\delta$ соответственно. С помощью леммы 3.8 легко показать, что есть число $M>0$ такое, что при $p>M$ интегралы /6.1.6/ по лучам $S\pm\delta$ могут быть преобразованы по теореме Коши в интеграл по вещественной оси. Это вместе с /6/ дает

$$F_1(p)=F_2(p)=F(p). \qquad /6.1.7/$$

Утверждение а/ доказано. Заметим, что из /6.1.6-7/ по лемме 6.1. следует, что есть число $H>0$ такое, что $|F(p)|<H|p|^{-1-e}$ при $|\arg(p-R_1)|\leq\delta_1+\frac{\pi}{2}$. Этим б/ доказано. Ввиду /5.1.7/ /и того, что $e>\lambda$ / эта оценка обеспечивает абсолютную сходимость интеграла /6.1.5/, если $|t|>0$, $|\arg t|<\delta_1$. С учетом /6.1.6-7/ имеем:

$$\int\limits_{_1L+_2L}\tilde{\psi}(pt)F(p)dp=\int\limits_{_1L}\tilde{\psi}(pt)dp\int\limits_{S_{-\delta}}\psi(p\tau)Q(\tau)d\tau+ \qquad /6.1.8/$$

$$+\int\limits_{_2L}\tilde{\psi}(pt)dp\int\limits_{S_\delta}\psi(p\tau)Q(\tau)d\tau.$$

Чтобы обосновать перемену порядка интегрирований в первом члене справа, достаточно доказать, что интеграл $\int\limits_{{}_1L} |\tilde{\Psi}(pt) dp| \int\limits_{S_{-\delta}} |\Psi(p\tau) Q(\tau) d\tau|$ сходится. Легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned} &Re(pe^{-i\delta}) \geq R_1 \cos\delta_1 > R\cos\delta \\ &-\frac{\pi}{2} < -\delta \leq \arg(pe^{-i\delta}) \leq \frac{\pi}{2}+\delta_1-\delta < \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \text{ при } p \in {}_1L \qquad /6.1.9/$$

Поэтому согласно лемме 6.1 есть число $H$ такое, что

$$\int\limits_{S_{-\delta}} |\Psi(p\tau) Q(\tau) d\tau| < H |p|^{-1-e} \quad \text{при} \quad p \in {}_1L.$$

Отсюда и из /5.1.7/ следует, что вышеуказанное условие выполняется, если $|t| > 0$, $|\arg t| < \delta_1$. Обоснование перемены порядка интегрирований во втором члене /6.1.8/ аналогично. Переменив в /6.1.8/ порядок интегрирований по $p$ и $\tau$ и учитывая утверждение г/ леммы 5.4 получаем: /при $|t| > 0$, $|\arg t| < \delta_1$ /.

$$\int\limits_{{}_1L+{}_2L} \tilde{\Psi}(pt) F(p) dp = \int\limits_{S_{-\delta}} Q(\tau)\, \varphi_{R,t}(\tau) d\tau - \int\limits_{S_\delta} Q(\tau) \varphi_{R,t}(\tau) d\tau. \qquad /6.1.10/$$

Ввиду 5.4 в/, /6.1.4/ и 5.4. а/ отсюда по теореме Коши получаем /6.1.5/. Теорема 6.1 доказана.

## 6.2

В этом пункте мы рассмотрим обращение преобразования /6/ в случае, когда функция $Q(t)$ - не аналитическая.

Т е о р е м а 6.2

Пусть 1/ выполнено условие 1/ теоремы 6.1,
2/ при $t > 0$ дана функция $Q(t)$, ограниченная на любом интервале $\varepsilon \leq t \leq N$ и удовлетворяющая условиям /6.1.3/, /6.1.4/ / при $t > 0$ /;
3/ функция $F(p)$ определена формулой /6/;
4/ дано число $R_1 > R$ и контура ${}_1L_\delta$ и ${}_2L_\delta$ есть лучи

$\arg(p-R_1) = \pm(\delta+\frac{\pi}{2})$, проходимые в сторону роста

5/ функция $Q_\delta(t)$ при $t>0$, $0<\delta<\delta_0$, $\delta_0=\frac{1}{2}\arccos\frac{R}{R_1}$ /так что $Re(p-R_1)>R$ при $p\in L_\delta$ / определена формулой

$$Q_\delta(t)=\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{L_\delta}\tilde{\varphi}(pt)F(pe^{-2i\delta})dp+\int\limits_{L_\delta}\tilde{\varphi}(pt)F(pe^{2i\delta})dp\Big)$$

6/ $t_0>0$ и оба предела $Q(t_0\pm 0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}Q(t_0\pm\varepsilon)$ существуют.

Тогда : а/ $F(p)$ есть аналитическая функция, регулярная в полуплоскости $Re\,p>R$ ; б/ $F(p)=O(|p|^{-1-e})$ при $|p|\to\infty$ равномерно в любом угле $|\arg p|\le\delta<\frac{\pi}{2}$

в/ $Q_\delta(t_0)\to\frac{1}{2}\left[Q(t_0+0)+Q(t_0-0)\right]$ при $\delta\to 0+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Утверждения а/ б/ вытекают из /6.1.4/ по лемме 6.1. Из б/ и /5.1.7/ следует абсолютная сходимость интеграла, определяющего $Q_\delta(t)$ при $t>0$ для любого $\delta$, $0<\delta<\delta_0$. Далее подобно /6.1.10/ получаем:

$$Q_\delta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty d\tau\, Q(\tau)\left[\varphi_{R_1 t}(\tau e^{-2i\delta})-\varphi_{R_1 t}(\tau e^{2i\delta})\right]. \qquad /6.2.1/$$

Далее из /6.1.4/ и 5.4 г/, 5.4 а/ следует: при $\delta\to 0$

$$\int\limits_{t+\varepsilon}^\infty d\tau\, Q(\tau)\left[\varphi_{R_1 t}(\tau e^{-2i\delta})-\varphi_{R_1 t}(\tau e^{2i\delta})\right]\to 0 \qquad /6.2.2/$$

для каждого $\varepsilon>0$ и каждого $t>0$. Точно так же из /6.1.3/, 5.4. в/ и 5.4. а/ следует

$$\int\limits_0^{t-\varepsilon} d\tau\, Q(\tau)\left[\varphi_{R_1 t}(\tau e^{-2i\delta})-\varphi_{R_1 t}(\tau e^{2i\delta})\right]\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0 \qquad /6.2.3/$$

для любых чисел $t$ и $\varepsilon$, $t>\varepsilon>0$. Наконец, из 5.4. а/ вытекает:

$$\sum_{\lambda=1}^{1}\lambda\int\limits_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}Q(\tau)d\tau\left[\varphi_{R_1 t}(\tau e^{\lambda 2i\delta})-\frac{1}{\tau e^{2i\lambda\delta}-t}\right]\to 0 \qquad /6.2.4/$$

при $\delta\to 0+$.

Пусть
$$K_{t\delta}(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\tau e^{-2i\delta}-t} - \frac{1}{\tau e^{2i\delta}-t}\right). \qquad /6.2.5/$$

Легко видеть, что
$$\int_t^{t+\varepsilon} K_{t\delta}(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \delta \to 0 \qquad /6.2.6'/$$
$$\int_{t-\varepsilon}^{t} K_{t\delta}(\tau)d\tau \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \text{——''} \qquad /6.2.6''/$$
при $t > \varepsilon > 0$, и $K_{t\delta}(\tau) > 0$ при $t>0,\ \tau>0,\ \delta>0.$ /6.2.7/

Из /6.2.1-7/ и условия 5/ легко следует утверждение в/.

6.3

В этом пункте мы рассмотрим теорему, обратную теореме 6.1.

Т е о р е м а 6.3

Пусть 1/ выполнено условие 1/ теоремы 6.1; 2/ дана аналитическая функция $F(p)$, регулярная внутри угла
$$|\arg(p-R)| < \frac{\pi}{2}+\delta,\ |p-R|>0,\ R>0,\ 0<\delta<\frac{\pi}{2}$$
и удовлетворяющая в этом угле неравенству
$$|F(p)| < H|p|^{-1-e},\quad e>\lambda \qquad /6.3.1/$$
/число $\lambda$ определено в условии 6.1.1/; 3/ функция $Q(t)$ определена при $t>0$, $|\arg t|<\delta$, интегралом:
$$Q(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \tilde{\varphi}(pt)F(p)dp \qquad /6.3.2/$$
здесь контур $L$ состоит из лучей $\arg(p-R) = \pm\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)$, проходимых в сторону роста $\operatorname{Im} p$. Тогда :

а/ функция $Q(t)$ регулярна при $|t|>0$; $|\arg t|<\delta$

б/ $Q(t) = Q[|\psi(R, Ret)|^{-1}]$ при $t \to \infty$
равномерно в любом угле $|\arg t| \leq \delta_1 < \delta$ для любого $R_1 > R$;
в/ $\int\limits_0 Q(t)\psi(qt)dt = F(q)$ при $\operatorname{Re} q > R$ /6.3.3/

Д о к а з а т е л ь с т в о

При доказательстве достаточно ограничиться случаем

$$\lambda < \ell < m \qquad /6.3.4/$$

/см. /6.3.1/ и /5.1.2-3//. Мы фиксируем числа $\delta_1$, и $\nu$

$$\lambda - m < \nu < \ell - m, \quad 0 < \delta_1 < \delta \qquad /6.3.5/$$

Учитывая /5.1.7'/ и /6.3.1/ при $|t| > 0$, $|\arg t| < \delta$ можем представить $Q(t)$ в виде

$$Q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L dp \, . \tilde{\psi}_\nu(pt) F(p) \qquad /6.3.6/$$

Ввиду /6.3.1/ и /5.1.7'/ интеграл

$$\int\limits_L |\tilde{\psi}(pt) F(p) dp| \qquad /6.3.7/$$

сходится равномерно по $t$ в любой области $|\arg t| \leq \delta_1$, $\varepsilon \leq |t| \leq N$, $0 < \varepsilon < N$. Отсюда следует утверждение а/. Отсюда вытекает также, что интеграл /6.3.7/ есть непрерывная функция $t$ при $t > 0$. Далее, так как $\operatorname{Re}(pt) \leq R\operatorname{Re} t$ при $p \in L$, $|\arg t| < \delta$, то с учетом /5.1.7"/ имеем:

$$\tilde{\psi}_\nu(pt) = \underline{\underline{O}}[|\psi(R_1 Ret)|^{-1}] \text{ при } |t| \to \infty \qquad /6.3.8/$$

равномерно по $p$ и $\arg t$ при $p \in L$, $|p - R| \leq N$, $|\arg t| \leq \delta_1$, для любого $N > 0$ и любого $R_1 > R$. Пусть $L_{\delta_1}$ есть часть $L$, на которой $|\arg p| < \delta_1 + \frac{\pi}{2}$. Тогда ввиду /6.3.8/ при $t \to \infty$

$$\int\limits_{L_{\delta_1}} |\tilde{\psi}_\nu(pt) F(p) dp| = \underline{\underline{O}}[|\psi(R_1 Ret)|^{-1}] \qquad /6.3.9/$$

равномерно при $|\arg t| \leq \delta_1$, и для любого $R_1 > R$. Из /6.3.1/ и /5.1.7''/ легко находим, что /для любого $\lambda' > \lambda$/

$$\int\limits_{L-L_{\delta_1}} |\tilde{\Psi}_\nu(pt)F(p)dp| = O[|t|^{\lambda'}] \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

равномерно при $|\arg t| \leq \delta_1$. Отсюда и /6.3.9/ следует:

$$\int\limits_L |\tilde{\Psi}_\nu(pt)F(p)dp| = O[|\Psi(R_1 \operatorname{Re} t)|^{-1}] \quad \text{при} \quad t \to \infty \qquad /6.3.10/$$

равномерно при $|\arg t| \leq \delta_1$, для любого $R_1 > R$. Оценка /6.3.10/ доказывает утверждение б/. Исследуем интеграл /6.3.7/ при $t \to 0$. Пусть $|t|R < 1$ и $L(t)$ - часть контура $L$, на которой $|pt| \leq 1$. Ввиду /5.1.3 '/ есть число $H$ такое, что

$$|\tilde{\Psi}_\nu(pt)| < H|pt|^{m+\nu} \quad \text{при} \quad p \in L(t).$$

Так как интеграл $\int\limits_L |F(p)\,p^{m+\nu}dp|$ сходится, то

$$\int\limits_{L(t)} |\tilde{\Psi}_\nu(pt)F(p)dp| = O[|t|^{m+\nu}] \quad \text{при} \quad t \to 0$$

равномерно в любом угле. Согласно /5.1.7 '/ для любого $\lambda' > \lambda$ есть число $H_1 > 0$ такое, что

$$|\tilde{\Psi}_\nu(pt)| < H_1|pt|^{\lambda'} \quad \text{при} \quad p \in L - L(t)$$

$|t| > 0$, $|\arg t| \leq \delta_1$ ; отсюда получаем

$$\int\limits_{L-L(t)} |\tilde{\Psi}_\nu(pt)F(p)dp| = O[|t|^{\lambda'}] \quad \text{при} \quad t \to 0$$

равномерно при $|\arg t| \leq \delta_1$. Таким образом

$$\int\limits_L |\tilde{\Psi}_\nu(pt)F(p)dp| = O[|t|^{m+\nu}] \quad \text{при} \quad |t| \to 0 \qquad /6.3.11/$$

равномерно в угле $|\arg t| \leq \delta_1$. Теперь мы можем доказать утверждение в/. Подставим /6.3.6/ в /6.3.3/. Для обоснования перемены порядка интегрирований по $t$ и $p$ в полученном повторном интеграле достаточно показать что: интеграл $\int\limits_0^\infty dt|\Psi(qt)| \int\limits_L |\tilde{\Psi}_\nu(pt)F(p)dp|$ сходится. Это условие выполняется при $\operatorname{Re} q > R$ ввиду /6.3.11/ /у нас $m+\nu > -1$ / и /6.3.10/ с учетом непрерывности интеграла /6.3.7/ при $t > 0$. Таким образом, при $\operatorname{Re} q > R$

$$\int_0^\infty Q(t)\psi(qt)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L F(p)dp\int_0^\infty \psi(qt)\tilde{\psi}_\nu(pt)dt.$$

Воспользовавшись /5.3.8/ с учетом /6.3.5/ и /6.3.1/ по теореме Коши получаем формулу /6.3.3/. Это завершает доказательство.

## Приложение 1

В книге Харди "Расходящиеся ряды"[/5/] приведена следующая теорема М.Л. Катрайт.

**Теорема 1**

Если $p > q > 0$ и ряды

$$f_p(y) = \sum a_n e^{-yn^p} \qquad /1.1.1/$$

$$f_q(y) = \sum a_n e^{-yn^q} \qquad /1.1.2/$$

сходятся при $y > 0$ и

$$f_p(y) \to S \quad \text{при} \quad y \to 0 \qquad /1,2/$$

тогда и $f_q(y) \to S$ при $y \to 0$.

Нами получено обобщение этой теоремы. Конечный результат дается теоремой 4. Наше доказательство основано на обобщении преобразования Лапласа, рассмотренном в I.[x/] Нам удобно начать с подробного изложения доказательства теоремы 1. Прежде всего отметим, что из сходимости ряда $f_q(y)$ при всех $y > 0$ следует, что ряд $\sum a_n e^{-yn^\ell}$, $y > 0$, сходится для любого $\ell \geq q$:

$$\sum |a_n| e^{-yn^\ell} < H_\ell(y). \qquad /1.1.3/$$

Пусть

$$k = q/p, \qquad 0 < k < 1 \qquad /1.3.1/$$

$$0 < \delta_1 < \mathrm{Max}\left\{\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{k} - 1\right)\right\} \qquad /1.3.2/$$

---

[x/] Римскими цифрами I, II, III мы обозначаем основной текст настоящей работы и ее приложения 1 и 2, соответственно.

$L$ - контур, состоящий из двух лучей $\arg p = \pm(\delta_1 + \frac{\pi}{2})$ проходимый в сторону роста $\Im z$ и функция $Q_k(t)$ при $|\arg t| < \delta_1$, $|t| > 0$, определена формулой

$$Q_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zt - z^k} dz. \qquad /1.4.1/$$

Очевидно, $Q_k(t)$ есть аналитическая функция $t$, регулярная в любом угле $|\arg t| < \varepsilon$, $|t| > 0$. Легко видеть, что есть число $H_1$ такое, что

$$|e^{-z^k} - 1| < H_1 |z|^k \qquad /1.4.2/$$

при $z \in L$. Отсюда и из /1.4.1/ легко показать, что

$$Q_k(t) = \underline{\underline{O}}(|t|^{-1-k}) \quad \text{при} \quad t \to \infty \qquad /1.4.3/$$

равномерно в любом угле

$$|\arg t| \le \delta, \qquad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{k} - 1\right). \qquad /1.4.4/$$

Ясно, что $|e^{zt}| \le 1$ при $z \in L$, $|\arg t| \le \delta_1$, /см. /1.3.2/ поэтому из /1.4.1/ следует:

$$Q_k(t) = \underline{\underline{O}}(1) \quad \text{при} \quad t \to \infty \qquad /1.4.5/$$

равномерно в угле $|\arg t| \le \delta$. Как и в /1.4.3/, этот угол может быть увеличен до /1.4.4/. Из /1.4.1/ по теории преобразования Лапласа следует:

$$\int_0^\infty Q_k(t) e^{-xt} dt = e^{-x^k} \qquad /1.5/$$

при $\operatorname{Re} x > 0$.

В дальнейшем мы всегда будем считать $a_0 = 0$, что не вызовет уменьшения общности. Согласно /1.1.1 и 1.2/отсюда следует, что есть число $H_2 > 0$ такое, что

$$|\zeta_p(t)| < H_2 e^{-t} \quad \text{при} \quad t > 0 \qquad /1.6/$$

Согласно /1.1.2/ и теореме 27 из книги Харди[5]

$$\sum a_n e^{-(yn)^q \delta n^p} \to \zeta_q(y^q) \quad \text{при } \delta \to 0+, \ y > 0. \qquad /1.7.1/$$

С другой стороны, согласно /1.5/ имеем:

$$\sum a_n e^{-(yn)^q-\delta n^p} = \sum a_n e^{-\delta n^p}\int_0^\infty Q_k(t)e^{-(yn)^p t}dt. \qquad /1.7.2/$$

Для обоснования перемены здесь порядка суммирования и интегрирования достаточно доказать, что ряд

$$\sum |a_n e^{-\delta n^p}| \int_0^\infty |Q_k(t)|dt\, e^{-(yn)^p t} \qquad /1.7.3/$$

сходится. Так как ряд $\sum |a_n| e^{-\delta n^p}$ согласно /1.1.3/ сходится, а

$$\int_0^\infty |Q_k(t)| e^{-(yn)^p t}dt \leq \int_0^\infty |Q_k(t)|dt$$

и последний интеграл сходится ввиду /1.4.4/ и /1.4.6/, то ряд /1.7.3/ сходится. Таким образом, /с учетом /1.1.1//, имеем:

$$\sum a_n e^{-(yn)^q-\delta n^p} = \int_0^\infty Q_k(t)\xi_p(\delta+y^p t)dt \qquad /1.7.4/$$

Из /1.6/ и сходимости интеграла $\int_0^\infty |Q_k(t)|dt$ следует: 1/ интеграл $\int_0^\infty Q_k(t)\xi_p(\delta+y^p t)dt$ сходится /при данном значении $y>0$ / равномерно на любом интервале $0\leq\delta\leq\delta_0$, $\delta_0>0$, поэтому при $\delta\to 0+$

$$\int_0^\infty Q_k(t)\xi_p(\delta+y^p t)dt \to \int_0^\infty Q_k(t)\xi_p(y^p t)dt \qquad /1.7.5/$$

2/ интеграл $\int_0^\infty Q_k(t)\xi_p(y^p t)dt$ сходится равномерно на любом интервале $0\leq y\leq y_0$, $y_0>0$, поэтому с учетом /1.2/ находим:

$$\int_0^\infty Q_k(t)\xi_p(y^p t)dt \to S\int_0^\infty Q_k(t)dt \qquad /1.7.6/$$

3/ $$\int_0^\infty Q_k(t)e^{-xt}dt \to \int_0^\infty Q_k(t)dt \text{ при } x\to 0+$$

поэтому согласно /1.5/

$$\int_0^{\infty} \tilde{Q}_k(t)\,dt = 1. \qquad /1.7.7/$$

Формулы /1.7.1/, /1.7.4-7/ доказывают утверждение теоремы 1. Теперь мы перейдем к обобщениям этой теоремы.

Т е о р е м а 2

Пусть 1/ даны числа $p > q > 0$, $k = q/p$

2/ функция $\varphi(x)$ регулярна в угле $|\arg x| < \frac{\pi}{2}, |x| > 0$ и есть числа $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > \frac{1}{k}$ такие, что

$$\varphi(x) - 1 = O(|x|^{\gamma_1}) \quad \text{при } |x| \to 0 \qquad /2.1.1/$$

$$\varphi(x) = O(|x|^{-1-\gamma_2}) \quad \text{при } x \to \infty \qquad /2.1.2/$$

равномерно в любом угле $|\arg x| \le \delta < \frac{\pi}{2}$;

3/ ряды $\zeta_p(y)$ /см. /1.1.1// и

$$\tilde{\zeta}_q(y) = \sum a_n \varphi(y n^q) \qquad /2.2/$$

сходятся при $y > 0$

4/ $\zeta_p(y) \to S$ при $y \to 0$ /2.3/

Тогда $\tilde{\zeta}_q(y) \to S$ при $y \to 0$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть число $\delta_1$, и контур $L$ определены так же, как в п. 1, и

$$\tilde{Q}_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{zt} \varphi(z^k)\,dz \qquad /2.4.1/$$

при $|t| > 0$, $|\arg t| < \delta_1$. Эта формула с учетом /2.1.2/ показывает, что $\tilde{Q}_k(t)$ есть аналитическая функция $t$, регулярная в угле $|t| > 0$, $|\arg t| < \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{k} - 1\right)$.

Из /2.1.1/ и /2.1.2/, подобно /1.4.3/, следует: есть число $H_3$ такое, что

$$|\varphi(z^k)-1| < H_3|z|^{k\gamma_1} \qquad /2.4.2/$$

при $z \in L$.

Отсюда, подобно /1.4.4/, находим

$$\widetilde{Q}_k(t) = O(|t|^{-1-k\gamma_1}) \quad \text{при} \quad t \to \infty \qquad /2.4.3/$$

равномерно в любом угле /1.4.5/. Из сходимости интеграла $\int\limits_L |\varphi(z^k)dz|$ /см. /2.1.2// подобно /1.4.6/, находим

$$\widetilde{Q}_k(t) = O(1) \quad \text{при} \quad t \to 0 \qquad /2.4.4/$$

равномерно в угле /1.4.5/.

Из /2.4.1/ по теории преобразования Лапласа следует при $\mathrm{Re}\, x > 0$

$$\int\limits_0^{\infty} Q_k(t) e^{-xt} dt = \varphi(x^k). \qquad /2.5/$$

Далее доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1 со следующими изменениями в ссылках на формулы: вместо /1.2/, /1.1.2/, /1.5/, /1.4.3/, /1.4.5/ - /2.3/, /2.2/, /2.5/, /2.4.3/, /2.4.4/ соответственно.

3. Основная в настоящей работе - следующая

Теорема 3

Пусть 1/ $\psi(t)$ принадлежит классу $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$, определенному в I/§2/, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, и функция $1/\gamma(1+u)$ /см. I, §4/ регулярна при $\mathrm{Re}\, u > A$, $A < -1$

2/ $\psi(t) \to 1$ при $t \to 0+$ /3.1/

3/ даны числа $p > q > 0$, $k = q/p$

4/ ряды $\xi_q(y)$ /см. /1.1.2// и

$$\widetilde{\xi}_p(y) = \sum a_n \psi(yn^p) \qquad /3.2.1/$$

сходятся при $y > 0$ x/

5/ $\widetilde{\xi}_p(y) \to S$ при $y \to 0+$. /3.3/

Тогда $\xi_q(y) \to S$ при $y \to 0+$

---

x/ Заметим, что из третьего утверждения леммы 3.8 в/ I следует:

$$\widetilde{\xi}_p(y) = O(\psi(y)) \quad \text{при} \quad y \to \infty \qquad /3.2.2/$$

/напомним, что у нас $a_0 = 0$/.

Доказательство

Доказательство теорем 1 и 2 основано на применении преобразования Лапласа. Доказательство теоремы 3 мы приведем, основываясь на обобщении преобразования Лапласа, рассмотренном в I. Мы возьмем число $q'$, $q<q'<p$ и обозначим $q'/p = k'$. Пусть $\widetilde{\varphi}(x)$ - функция, взаимная к $\varphi(t)$:

$\widetilde{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\gamma(1+n)}$ /см. /5.1.3/ I, то есть формулу /5.1.3/ из I/ и пусть

$$\widetilde{\widetilde{Q}}_{k'}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\widetilde{\varphi}(zt)e^{-z^{k'}}dz \qquad /3.4.1/$$

здесь контур $L$ - тот же, что в /1.4.1/.

Из /5.1.7/ I вытекает, что $\widetilde{\widetilde{Q}}_{k'}(t)$ есть аналитическая функция $t$, регулярная в угле $|t|>0$, $|\arg t|<\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{k'}-1\right)$. Из регулярности функции $1/\gamma(1+u)$ при $Re\,u>A$, $A<-1$ следует /ср. /5.1.6/ I/, что $\widetilde{\varphi}(x)$ может быть представлена в виде $\widetilde{\varphi}(x)=$

$$=-\int_{-1-\gamma_4-i\infty}^{-1-\gamma_4+i\infty}\frac{x^u\,du}{\gamma(1+u)\left(e^{2\pi i u}-1\right)}$$ где $\gamma_4>0$.

Отсюда, подобно /5.1.7/ I следует

$$\widetilde{\varphi}(x)=\underline{\underline{O}}\left(|x|^{-1-\gamma_4}\right) \quad \text{при } x\to\infty \qquad /3.4.2/$$

равномерно в любом угле $|\pi-\arg x|<\delta<\frac{\pi}{2}$. Далее из /3.4.2/, /1.4.2/ и /3.4.1/ убеждаемся, что есть число $\gamma_5>0$ такое, что

$$\widetilde{\widetilde{Q}}_{k'}(t)=O\left(|t|^{-1-\gamma_5}\right) \quad \text{при } t\to\infty \qquad /3.4.3/$$

равномерно в любом угле /1.4.5/. Из /3.4.2/ и определения $\widetilde{\varphi}(x)$ следует, что для любого $\delta$, /см. /1.3.2// есть число $H_5>0$ такое, что $|\widetilde{\varphi}(zt)|<H_5$ при $z\in L$, $|\arg t|<\delta$. Это вместе с /3.4.1/ дает:

$$\widetilde{\widetilde{Q}}_{k'}(t)=O(1) \quad \text{при } t\to 0 \qquad /3.4.4/$$

равномерно в угле /1.4.5/. Из /3.4.1/ и теоремы /6.3/ I следует, что

$$\int_0^\infty\varphi(xt)\widetilde{\widetilde{Q}}_{k'}(t)dt=e^{-x^{k'}} \qquad /3.5/$$

при $Re\,x>0$ .Заметим, что ряд $\sum a_n e^{-(yn)^{q'}}$ сходится при $y>0$ ; с учетом /3.5/ получаем

$$\sum a_n e^{-(yn)^{q'}} = \sum a_n \int_0^{\infty} \psi(t(yn)^p)\tilde{\tilde{Q}}_{k'}(t)dt. \qquad /3.6.1/$$

Чтобы обосновать перемену порядка суммирования и интегрирования в правой части /3.6.1/, достаточно доказать, что ряд

$$\sum |a_n| \int_0^{\infty} dt \, |\psi[t(yn)^p]\tilde{\tilde{Q}}_{k'}(t)| \qquad /3.6.2/$$

сходится. Согласно формуле А3 Приложения а:

$$\int_0^{\infty} |\psi[t(yn)^p]\tilde{\tilde{Q}}_{k'}(t)dt| = O[e^{-(yn)^{q'-\varepsilon}}]$$

при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$. Так как ряд $\sum |a_n| e^{-(yn)^{q'-\varepsilon}}$ сходится при $0<\varepsilon<q'-q$ , то ряд /3.6.2/ сходится и

$$\sum a_n e^{-(yn)^{q'}} = \int_0^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}_{k'}(t)\tilde{\xi}(ty^p)dt \qquad /3.6.3/$$

Из /3.4.5/ и /3.4.4/ следует, что $\int_0^{\infty} |\tilde{Q}_{k'}(t)|dt$ сходится. Отсюда, из /3.6.3/, /3.2.2/, 3.3/ следует, что

$$\sum a_n e^{-(yn)^{q'}} \longrightarrow s \int_0^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}_{k'}(t)dt \qquad \text{при } y\to 0 \qquad /3.6.4/$$

Так как $\psi(t)$ ограничена при $t>0$ и $\psi(t)\to 1$ при $t\to 0+$, то при $x\to 0+$,

$$\int_0^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}_{k'}(t)\psi(xt)dt \longrightarrow \int_0^{\infty} \tilde{\tilde{Q}}_{k'}(t)dt \qquad /3.6.5/$$

Это вместе с /3.5/ и /3.6.4/ дает

$$\sum a_n e^{-(yn)^{q'}} \longrightarrow s \qquad \text{при } y\to 0+$$

Отсюда утверждение теоремы 3 следует по теореме 1 /ибо $q'>q$ /. Комбинируя теоремы 2 и 3, мы можем сформулировать наш окончательный результат следующим образом:

Теорема 4

Пусть 1/ функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям 1/ и 2/ теоремы 3;

2/ даны числа $p'>p>q$; 3/ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию 2/ теоремы 2;

4/ ряды
$$\sum a_n \psi(yn^{p'})$$
$$\sum a_n e^{-yn^p}$$
$$\sum a_n \varphi(yn^q)$$

сходятся при $y>0$

5/ $\sum a_n \psi(yn^{p'}) \longrightarrow s$ при $y \longrightarrow 0+$

Тогда $\sum a_n \varphi(yn^q) \longrightarrow s$ при $y \longrightarrow 0+$.

П р и л о ж е н и е А

Здесь мы докажем оценку А.3

Прежде всего определим асимптотику функции $\widetilde{\widetilde{Q}}_k(t)$ /см. /3.4.1// при $t \longrightarrow 0+$, . Заметим, что в /3.4.1/ функцию $\widetilde{\psi}(zt)$ можно заменить на любую функцию

$$\widetilde{\psi}_N(zt) = \widetilde{\psi}(zt) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(zt)^n}{\gamma(1+n)}.$$

Воспользовавшись еще оценкой Б.6 легко получаем:

$$\left|\widetilde{\widetilde{Q}}_k(t)\right| < H(ta)^N \frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{k}\right)}{N^{N(1-\varepsilon)}} < H_1(tb)^N N^{-N(1-\frac{1}{k}-\varepsilon)}$$

здесь $a$ и $b$ –некоторые числа, $N$ –любое. Выбрав $N$ так, чтобы выражение справа было наименьшим, получаем оценку

$$\widetilde{\widetilde{Q}}_k(t) = O\left[e^{-t^{-\frac{k}{1-k}+\varepsilon}}\right] \qquad \text{при } t \longrightarrow 0+ \qquad /A.1/$$

для любого $\varepsilon>0$. Согласно следствию 3.7 I

$$\psi(s) = O\left[e^{-s^{1-\varepsilon}}\right] \qquad \text{при } s \longrightarrow +\infty \qquad /A.2/$$

Так как при

$$\int_0^\infty e^{-t^{-\alpha}-xt^\beta}dt = O\left[e^{-\lambda x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}\right] \quad \text{при } x \longrightarrow +\infty$$

то из /А.2/ и /А.1/ следует

$$\int_0^\infty |\tilde{\tilde{Q}}_k(t)\psi(xt)dt| = O[e^{-|x|^{k-\varepsilon}}] \qquad /А.3/$$

при $x \to +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

П р и л о ж е н и е Б

Здесь мы докажем оценку Б.6.

При $Re x < 0$ подобно /5.1.6/ $\underline{I}$ функцию $\tilde{\psi}_N(x)$ можно представить в виде:

$$\tilde{\psi}_N(x) = -\int_{N-\frac{1}{2}-i\infty}^{N-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{x^u du}{\gamma(1+u)[e^{2\pi i u}-1]}. \qquad /Б.1/$$

Согласно теореме /4.2 / $\underline{I}$ для любого $\varepsilon > 0$ есть $N_0$ такое, что

$$\frac{1}{|\gamma(1+u)|} < \frac{1+\varepsilon}{|\gamma_0(1+u)|} \qquad /Б.2/$$

при $Re u > N_0$ ; здесь

$$\gamma_0(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{u}}\, e^{u\tau_0(u) - \mathcal{X}[e^{\tau_0(u)}]} \qquad /Б.3/$$

/см. /4.2.3/ $\underline{I}$/ . Но функция $\gamma_0(u)$ удовлетворяет условию /4.6.4'/ $\underline{I}$ :

$$\operatorname{Im} \frac{d}{du} \ln \gamma_0(u) - \arg u \to 0 \quad \text{при} \quad u \to \infty$$

равномерно в любом угле $|\arg u| < \alpha' < \alpha$, где $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ есть $N_0'$ такое, что

$$\left|\operatorname{Im} \frac{d}{du} \ln \gamma_0(u)\right| < \frac{\pi}{2} + \varepsilon \text{ при } Re u > N_0' \qquad /Б.4/$$

Но $\ln|\gamma_0(N+\frac{1}{2}+iY)| - \ln|\gamma_0(N+\frac{1}{2})| =$

$$= \int_{N+\frac{1}{2}}^{N+iY+\frac{1}{2}} ds \operatorname{Im} \frac{d}{du} \ln \gamma_0(u), \quad u = N + \frac{1}{2} + is$$

для вещественных $Y$ . Отсюда и /Б.4/:

$$\frac{1}{|\gamma_0(N+\frac{1}{2}+iy)|} < \frac{e^{(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)|y|}}{|\gamma_0(N+\frac{1}{2})|}.$$

Подставив эту оценку и /Б.2/ в /Б.1/ легко находим: для любого $\delta$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ есть числа $N_0$ и $H$ такие, что

$$|\tilde{\psi}_N(x)| < H|x|^N|\gamma_0(N+\tfrac{1}{2})|^{-1} \qquad /Б.5/$$

при $N \geq N_0$, $|\arg x - \pi| \leq \delta$. Так как

$$\tau_0(N+\tfrac{1}{2})/\ln N \longrightarrow 1 \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty$$

и

$$\mathscr{X}[e^{\tau_0(N+\frac{1}{2})}]/N \longrightarrow 1 \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty,$$

то из /Б.3/ находим

$$|\gamma_0(N+\tfrac{1}{2})|^{-1} = O[N^{-N(1-\varepsilon)}] \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда и /Б.5/ получаем: для любого $\delta$, $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ и любого $\varepsilon>0$ есть число $H$ такое, что

$$|\tilde{\psi}_N(x)| < H|x|^N N^{-N(1-\varepsilon)} \qquad /Б.6/$$

при $|\arg x - \pi| \leq \delta$ для всех $N$, $N \geq 0$.

П р и л о ж е н и е  2

Т е о р е м а  1

Пусть 1/ функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям 1/ и 2/ теоремы 3 из II:

2/ даны числа $p$ и $q$, $p>q>0$, $p>1$;

3/ ряды

$$\tilde{\xi}_p(y) = \sum a_n \psi(yn^p) \qquad /1.1.1/$$

$$\xi_q(y) = \sum a_n e^{-yn^q} \qquad /1.1.2/$$

сходятся при $y>0$.

4/ $\xi_p(y) \longrightarrow S$ при $y \longrightarrow 0+$ /1.2/

5/ $$\psi_q(\gamma,\beta) \equiv \sum a_n e^{-\gamma n^q - \beta n}.$$ /1.1.3/

Тогда

1/ ряд $\psi_q(\gamma,\beta)$ сходится при $Re\,\beta \geq 0$, $\gamma > 0$

2/ существует аналитическая функция $\beta$, $f(\beta)$, регулярная в области $A$ : $|\beta| > 0$, $|\arg\beta| < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ такая, что $\psi_q(\gamma,\beta) \to f(\beta)$ при $\gamma \to 0+$ если $\beta \in A$

3/ $f(\beta) \to S$ при $|\beta| \to 0$ равномерно в любом угле $|\arg\beta| \leq \delta < \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Первое утверждение теоремы очевидно. Далее мы возьмем число $q'$,

$$q < q' < p.$$ /3.1/

Обозначим

$$k = q'/p \qquad ; \quad e = 1/p.$$ /3.2/

Возьмем число $b$

$$0 < b < \frac{\pi}{2}(1-e)$$ /3.3/

и определим область $B$, переменного $\gamma$ неравенствами

$$|\gamma| > 0, \qquad |\arg\gamma| < b.$$ /3.4/

Пусть также

$$0 < \delta_1 < a, \quad a = Min\left\{\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{k}-1\right),\ \frac{\pi}{2}(p-1) - pb\right\}$$ /3.5/

и $L$ -контур, состоящий из двух лучей $\arg z = \pm\left(\delta_1 + \frac{\pi}{2}\right)$, приходимый в сторону роста $Im\, z$. Определим функцию $\tilde{Q}_{ke}(t,\gamma)$ при $|t| > 0$, $|\arg t| < \delta_1$, $\gamma \in B$ /см. /3.4// интегралом

$$\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \tilde{\varphi}(zt) e^{-z^k - \gamma z^e} dz$$ /4.1/

наподобие /3.4.1/ II; так как ввиду /3.5/ и /3.4/ $Re\, z^k \geq 0$ при $z \in L$ и $Re(\gamma z^e) \geq 0$ при $z \in L$, $\gamma \in B$ то из /3.4.2/ II находим, что $\tilde{Q}_{ke}(t,\gamma)$ при любом значении $\gamma$ из $B$ есть аналитическая функция $t$, регулярная при $|t| > 0$, $|\arg t| < \delta_1$. Ее можно представить

также в виде:

$$\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma)=\frac{1}{2\pi i t}\int_L \tilde{\psi}(z)e^{-(z/t)^k-\gamma(z/t)^e}dz. \qquad /4.2/$$

Подобно /3.4.3/ $\underline{\text{II}}$ убеждаемся, что есть число $\gamma_1>0$ такое, что для любого фиксированного значения $\gamma$, $\gamma\in B$

$$\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma)=O(|t|^{-1-\gamma_1}) \quad \text{при} \quad t\to\infty \qquad /4.3/$$

равномерно в любом угле $|\arg t|\le\delta<\delta_1$. Подобно /3.4.4/ $\underline{\text{II}}$ для любого фиксированного значения $\gamma$, $\gamma\in B$

$$\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma)=O(1) \quad \text{при} \quad |t|\to 0 \qquad /4.4/$$

равномерно в любом угле $|\arg t|\le\delta<\delta_1$. Из /4.1/ по теореме /6.3/ $\underline{\text{I}}$ следует

$$\int_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma)\psi(x,t)dt = e^{-x^k-\gamma x^e}$$

при $\operatorname{Re} x>0$, $\gamma\in B$. Отсюда получаем

$$\sum a_n e^{-\beta n-yn^{q'}}\equiv \zeta_{q'}(y^{q'},\beta)=\sum a_n\int_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_{ke}\left(t,\frac{\beta}{y}\right)\psi[t(yn)^p]dt \qquad /5.1/$$

при $y>0$, $\beta\in B$. Для обоснования перемены в /5.1/ порядка суммирования и интегрирования достаточно доказать, что ряд

$$\sum |a_n|\int_0^\infty \left|\tilde{\tilde{Q}}_{ke}\left(t,\frac{\beta}{y}\right)\psi[t(yn)^p]\right|dt \qquad /5.2/$$

сходится. Согласно формуле П.1. Приложения

$$\int_0^\infty \left|\tilde{\tilde{Q}}_{ke}\left(t,\frac{\beta}{y}\right)\psi(t(yn)^p)\right|dt=O\left[e^{-n^{q'-\varepsilon}}\right]$$

при $n\to\infty$ для фиксированных значений $y>0$ и $\beta\in B$ и для любого $\varepsilon>0$. Но из сходимости ряда $\zeta_q(y)$ при всех $y>0$ следует, что ряд $\sum|a_n|e^{-n^{q'-\varepsilon}}$ сходится при $\varepsilon<q'-q$; поэтому ряд /5.2/ сходится и /с учетом /1.1.1//

$$\zeta_{q'}(y^{q'},\beta)=y^{-p}\int_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_{ke}\left(\frac{t}{y^p},\frac{\beta}{y}\right)\tilde{\zeta}_p(t)dt \qquad /5.3/$$

при $x>0$ и $\beta\in B$.

Пусть $F_{ke}(t,\beta,y)= y^{-p}\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(\frac{t}{y^p}, \frac{\beta}{y})$ /6.1/

Тогда согласно /4.1/

$$F_{ke}(t,\beta,y)= \frac{1}{2\pi i}\int_L \tilde{\varphi}(zt)e^{-yz^k-\beta z^e}dz. \qquad /6.2/$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \tilde{\varphi}(zt)e^{-\beta z^e}dz = \beta^{-p}\tilde{\tilde{Q}}_e(\frac{t}{\beta^p}) \qquad /6.3/$$

здесь $\tilde{\tilde{Q}}_e(t)$- функция, определенная формулой /3.4.1/ $\underline{\text{II}}$ . Принимая во внимание формулы /1.2/ и /3.2.2/ $\underline{\text{II}}$, /3.4.3/ $\underline{\text{II}}$ /3.4.4/ $\underline{\text{II}}$, находим, что интеграл $\int_0 \tilde{\tilde{Q}}(\frac{t}{\beta^p})\tilde{\tilde{\zeta}}(t)dt$ сходится равномерно в любой ограниченной замкнутой области переменной $\beta$ , целиком лежащей внутри $B$ / ибо $|\arg(\beta^{-p})|<\frac{\pi}{2}(p-1)$ при $\beta\in B$ , а формулы /3.4.3/ $\underline{\text{II}}$, /3.4.4/ $\underline{\text{II}}$ имеют место в угле /1.4.4 / $\underline{\text{II}}$, где надо положить $k=e$ /. Поэтому функция

$$f(\beta)= \beta^{-p}\int_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_e(t\beta^{-p})\tilde{\tilde{\zeta}}_p(t)dt \qquad /6.4/$$

регулярна при $\beta\in B$ . Легко видеть, что $|e^{-y^q z^k}-1|<|y^q z^k|$ при $y>0$ , $z\in L$ ; далее, согласно /3.4.2/ $\underline{\text{II}}$ есть число $H>0$ такое, что $|\tilde{\varphi}(zt)|<H$ при $z\in L$ , $t>0$ . Отсюда с учетом /6.2/, /6.3 / находим

$$|F_{ke}(t,\beta,y)-\beta^{-p}\tilde{\tilde{Q}}_e(t\beta^{-p})|\leqslant \frac{Hy^q}{2\pi}\int|e^{-z^e\beta}z^q dz|$$

при $t>0$ , $y>0$ , $\beta\in B$ . Принимая во внимание /1.2/ и /3.2.2/ $\underline{\text{II}}$, из последней формулы и /5.3/, /6.4/ получаем

$$\zeta_{q'}(y^q,\beta)\longrightarrow f(\beta) \qquad \text{при } y\to 0+,\ \beta\in B.$$

Отсюда второе утверждение теоремы следует по теореме Картрайт /см., например, $\underline{\textbf{II}}$, теорема I/. Чтобы доказать третье утверждение, возьмем $\beta=\rho e^{i\varphi}$, $\rho>0$ и заменой $\tau=\frac{t}{\rho^p}$ приведем /6.4/ к виду

$$f(\rho e^{i\varphi})=\int_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_e(\tau e^{-ip\varphi})\tilde{\tilde{\zeta}}_p(\tau\rho^p)d\tau\, e^{-ip\varphi}.$$

С учетом формул /3.4.3/ $\underline{\text{II}}$, /3.4.4/ $\underline{\text{II}}$, /1,4,4/ $\underline{\text{II}}$, /3.2.2/ $\underline{\text{II}}$ и /1.2/ находим, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}(1-e)$ есть $\delta > 0$ такое, что $\int\limits_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_e[\tau e^{-ip\varphi}][\tilde{\tilde{l}}_p(\tau\rho^p) - s]d\tau < \varepsilon$ если $0 < \rho < \delta$, $-\theta \leq \varphi \leq \varphi!$

Но
$$\int\limits_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_e(\tau^{-ip\varphi})e^{-ip\varphi}d\tau = \int\limits_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_e(\tau)d\tau$$

по теореме Коши, и $\int\limits_0^\infty \tilde{\tilde{Q}}_e(\tau)d\tau = 1$ согласно /3.85/ II и /3.5/ II. Это завершает доказательство третьего утверждения теоремы и всей теоремы. Отметим, что если $\psi(t) = e^{-t}$, то может быть доказана более сильная

Т е о р е м а 2

Пусть $q > 1$, ряд $l_q(y) = \sum a_n e^{-yn^q}$ сходится при всех $y > 0$, $l_q(y) \to S$ при $y \to 0$ и
$$l_q(y,\beta) = \sum a_n e^{-\beta n - yn^q}.$$

Тогда остаются в силе утверждения теоремы I. Метод доказательства – тот же, что в теореме 1.

П р и л о ж е н и е

В формуле /4.1/ функцию $\tilde{\psi}(zt)$ можно заменить на любую функцию $\tilde{\psi}_N(zt)$ /см. II, приложение/. Таким образом
$$|\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma)| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_L |\psi_N(zt)e^{-z^k - \gamma z^e}dz|,$$
но
$$Re(\gamma z^e) \geq 0 \qquad \gamma \in B, \quad z \in L$$
поэтому
$$|\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma)| < \frac{1}{2\pi}\int\limits_L |\tilde{\psi}_N(zt)e^{-z^k}dz|.$$
Отсюда для $\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma)$ при $\gamma \in B$ следует оценка A.1 из II; поэтому остается в силе и оценка A.3 II. Таким образом
$$\int\limits_0^\infty |\tilde{\tilde{Q}}_{ke}(t,\gamma)\psi(xt)|dt = O\left[e^{-x^{k-\varepsilon}}\right] \text{ при } x \to +\infty \qquad /П.1/$$
для любого $\varepsilon > 0$.

П р и л о ж е н и е   3

Т е о р е м а   1

Пусть 1/ дана аналитическая функция $x$, $\varphi(x,\alpha)$, регулярная в угле $|\arg x|<\delta, 0<\delta<\frac{\pi}{2}$, $|x|>0$ для каждого значения $\alpha$; $0<\alpha\leq 1$

2/ $\varphi(x,\alpha)\to 1$ при $\alpha\to 0$ равномерно в любой области $\varepsilon\leq|x|\leq N$; $|\arg x|\leq\delta_1$, где $0<\varepsilon<N$, $0<\delta_1<\delta$.

3/ для каждого $\delta_1$, $0<\delta_1<\delta$, любого $\alpha$, $0<\alpha\leq 1$ и любого $N>0$ есть число $K=K(\delta_1,\alpha,N)$ такое, что

$$|\varphi(x,\alpha)| < Ke^{-N|x|}$$

при $|x|>0$, $|\arg x|\leq\delta_1$.

4/ дана ограниченная на любом интервале $-\delta_1\leq\theta\leq\delta_1$, $0<\delta_1<\delta$ функция $A(\theta)$; для каждого $\delta_1$, $0<\delta_1<\delta$, есть число $H=H(\delta_1)$ такое, что

$$|\varphi(x,\alpha)|< He^{|x|A(\arg x)} \qquad 1/$$

если $0<\alpha\leq 1$, $|x|>0$, $|\arg x|\leq\delta_1$;

5/ ${}_1G_{\delta_1\delta_2}$ есть область

$$\cos\delta_1 \operatorname{Re}\beta - \sin\delta_1 \operatorname{Im}\beta > A(\delta_1)$$
$$\cos\delta_2 \operatorname{Re}\beta + (2\pi - \operatorname{Im}\beta)\sin\delta_2 > A(-\delta_2)$$

есть область

$$\cos\delta_1 \operatorname{Re}\beta + - \sin\delta_2 (\operatorname{Im}\beta - 2\pi) > A(\delta_1)$$
$$\cos\delta_2 \operatorname{Re}\delta + \operatorname{Im}\beta \sin\delta_2 > A(-\delta_2)$$

и $\mathcal{D}$ есть сумма всех областей ${}_1G_{\delta_1\delta_2}, {}_2G_{\delta_1\delta_2}$ при $0<\delta_1<\delta$, $0<\delta_2<\delta$.

Тогда ряд $\sum\limits_0^\infty e^{-\beta n}\varphi(n,\alpha)$ сходится при всех $\beta$ и $\sum e^{-\beta n}\varphi(n,\alpha)\to$

$$\to \frac{1}{1-e^{-\beta}} \quad \text{при } \alpha\to 0 \quad \text{если } \beta\in\mathcal{D}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Сходимость ряда $\sum e^{-\beta n}\varphi(n,\alpha)$ для всех $\beta$ при $0<\alpha\leq 1$ следует

---

1/ Из условия 2 следует, что $A(\theta)\geq 0$ при $-\delta<\theta<\delta$.

из условия 3/. Пусть $0<\delta_1<\delta$ и $0<\delta_2<\delta$ и $L_{\delta_1\delta_2}$ контур, состоящий из луча $\arg u=\delta_1$, $|u|\geq\frac{1}{2}$ дуги $|u|=\frac{1}{2}$ $-\delta_2<\arg u<\delta_1$ и луча $|u|\geq\frac{1}{2}$, $\arg u=-\delta_2$. Легко видеть, что интегралы

$$I_{1\delta_1\delta_2}(\beta)=\int\limits_{L_{\delta_1\delta_2}}\frac{e^{-\beta u}\,du}{e^{2\pi i u}-1} \qquad /1/$$

$$I_{2\delta_1\delta_2}(\beta)=\int\limits_{L_{\delta_1\delta_2}}\frac{e^{-\beta u}\,du}{1-e^{-2\pi i u}} \qquad /2/$$

равномерно сходятся в любой ограниченной замкнутой области переменного $\beta$, в которой

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}\beta\cos\delta_1-\operatorname{Im}\beta\sin\delta_1>0\\&\operatorname{Re}\beta\cos\delta_2+(2\pi+\operatorname{Im}\beta)\sin\delta_2>0\end{aligned}\right\} \qquad /3/ .$$

/для $I_1$ / и

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}\beta\cos\delta_1+(2\pi-\operatorname{Im}\beta)\sin\delta_1>0\\&\operatorname{Re}\beta\cos\delta_2+\operatorname{Im}\beta\sin\delta_2>0\end{aligned}\right\} \qquad /4/$$

для $I_2$ соответственно. Таким образом $I_{1\delta_1\delta_2}(\beta)$ есть аналитическая функция $\beta$, регулярная в области /3/, а $I_{2\delta_1\delta_2}(\beta)$ - в области /4/. Но при $\operatorname{Im}\beta=0$, $\operatorname{Re}\beta>0$

$$I_{1\delta_1\delta_2}(\beta)=I_{2\delta_1\delta_2}(\beta)=e^{-\beta}(1-e^{-\beta})^{-1}.$$

Поэтому по принципу аналитического продолжения

$$I_{1\delta_1\delta_2}(\beta)=e^{-\beta}(1-e^{-\beta})^{-1} \qquad /5/$$

при всех $\beta$ из области /3/ и

$$I_{2\delta_1\delta_2}(\beta)=e^{-\beta}(1-e^{-\beta})^{-1} \qquad /6/$$

при всех $\beta$ из области 4. Из условий 1/ и 3/ теоремы 1 легко вывести формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\beta n}\varphi(n,\alpha)=\int\limits_{L_{\delta_1\delta_2}}\frac{e^{-\beta u}\varphi(u,\alpha)}{e^{2\pi i u}-1}\,du \qquad /7/$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n}\varphi(n,\alpha)=\int\limits_{L_{\delta_1\delta_2}} \frac{e^{-\beta n}\varphi(u,\alpha)}{-e^{-2\pi i u}+1}\,du \qquad /8/$$

для любого $\alpha$, $0<\alpha<1$ и любого $\beta$. Пусть $L_{\delta_1}$, и $L_{\delta_2}$ есть лучи $\arg u=\delta_1$ и $\arg u=-\delta_2$, $|u|\geq\frac{1}{2}$. Ясно, что есть число $H_1$, такое, что

$$|1/(e^{2\pi i u}-1)|<H_1 \quad \text{при} \quad u\in L_{\delta_1} \quad \text{и}$$

$$|1/(e^{2\pi i u}-1)|<H_1 e^{-2\pi|u|\sin\delta_2} \quad \text{при} \quad u\in L_{\delta_2}.$$

Поэтому из условия 4/ теоремы получаем:

$$\left|\int\limits_{L_{\delta_1}}\frac{e^{-\beta u}\varphi(u,\alpha)}{e^{2\pi i u}-1}du\right|<H_1 H\int\limits_{1/2}^{\infty}dx\, e^{-x[\cos\delta_1 \operatorname{Re}\beta-\sin\delta_1 \operatorname{Im}\beta-A(\delta_1)]}$$

$$\left|\int\limits_{L_{\delta_2}}\frac{e^{-\beta u}\varphi(u,\alpha)du}{e^{2\pi i u}-1}\right|<H_1 H\int\limits_{1/2}^{\infty}dx\, e^{-x[\cos\delta_2 \operatorname{Re}\beta+(2\pi+\operatorname{Im}\beta)\sin\delta_2-A(-\delta_2)]}$$

Отсюда следует, что интеграл в формулу/7/сходится равномерно по $\alpha$ при $0<\alpha<1$ для каждого фиксированного значения $\beta$ из $G_{1\delta_1\delta_2}$. Поэтому /с учетом условий 2/ и 1//

$$\int\limits_{L_{\delta_1\delta_2}}\frac{e^{-\beta u}\varphi(u,\alpha)}{e^{2\pi i u}-1}du\to I_{1\delta_1\delta_2}(\beta) \qquad \text{при} \quad \alpha\to 0$$

если $\beta\in G_{1\delta_1\delta_2}$. Аналогично

$$\int\limits_{L_{\delta_1\delta_2}}\frac{e^{-\beta u}\varphi(u,\alpha)}{1-e^{-2\pi i u}}du\to I_{2\delta_1\delta_2}(\beta) \text{ при}$$

если $\beta\in G_{2\delta_1\delta_2}$. Вместе с формулами 5 и 6 это завершает доказательство теоремы.

Примеры

1/ Метод Бореля, B[1/5/]: в этом случае $\varphi(x,\alpha)=\int\limits_0^{1/\alpha}e^{-t}t^x dt/\Gamma(1+x)$. Угол $\delta$, фигурирующий в условии теоремы 1, здесь равен $\frac{\pi}{2}$. Имеем

$$|\varphi(x,\alpha)| < \int_0^{1/\alpha} \frac{e^{-t} t^{Re x} dt}{|\Gamma(1+x)|} = \frac{\Gamma(1+Re x)}{|\Gamma(1+x)|}$$

Отсюда по формуле Стирлинга определяем функцию $A(\theta)$, входящую в условие 5/ теоремы 1: $A(\theta) = \theta \sin\theta + \cos\theta \ln\cos\theta$.

Перейдем от переменной $\beta$ к переменной $z = e^{-\beta}$. Пусть область $\mathcal{D}$, определенная в условии 5/ теоремы 1, переходит при этом преобразовании в область $\widetilde{\mathcal{D}}$. Выполняя наложение областей $G_{\delta_1 \delta_2}$ легко находим, что $\widetilde{\mathcal{D}}$ есть полуплоскость $Re z < 1$ –это хорошо известный результат..

2/ Пусть $\varphi(x,\alpha) = e^{-(x\alpha)^p}$, $p > 1$. Здесь $\delta = \frac{\pi}{2p}$ и $A(\theta) = 0$. Область $\mathcal{D}$ есть

$$Re\beta > \max_k -(Im\beta + 2\pi k)\, tg\frac{\pi}{2p}, \quad k = \ldots -2,-1,0,1,\ldots$$

При преобразовании $z = e^{-\beta}$ область $\mathcal{D}$ переходит в

$$\widetilde{\mathcal{D}}_p : |z| < e^{|\arg z|\, tg\frac{\pi}{2p}} \qquad /9/$$

/При $p = 2$ этот результат получен Хиспопом[8]/. Ввиду простоты области $\widetilde{\mathcal{D}}_p$ легко доказать, что стремление $\sum_0 z^n e^{-(n\alpha)^p} \longrightarrow (1-z)^{-1}$

при $\alpha \to 0$

имеет место равномерно в любой ограниченной замкнутой области переменного $z$, целиком лежащей внутри $\widetilde{\mathcal{D}}_p$ / см. 9/.

3/ Более обще: пусть $\varphi(x)$ регулярна в некотором угле $|\arg x| < \delta < \frac{\pi}{2}$ $|x| > 0$ ; $\varphi(x) \longrightarrow 1$ при $x \to 0$ равномерно в любом угле $|\arg x| < \delta_1 < \delta$ и $\varphi(x)$ убывает сильнее любой экспоненты $e^{-N|x|}$, $N > 0$ при $x \to \infty$ равномерно в любом угле $|\arg x| < \delta_1 < \delta$. Пусть также

$$p = \frac{\pi}{2\delta} \qquad /10/$$

Тогда $\sum_0^\infty z^n \varphi(n\alpha) \longrightarrow 1/(1-z)$ при $\alpha \to 0$

равномерно в любой ограниченной замкнутой области $z$, целиком лежащей внутри области $\bar{\mathcal{D}}_p$ / см. 9/. Отсюда подобно теореме 135 из книги Харди[/5/], легко доказывается следующая

Т е о р е м а 2

Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям и ряд $\sum a_n z^n$, сходящийся в круге $|z|<R$, представляет в этом круге аналитическую функцию $f(z)$, имеющую особые точки $z_1, z_2 \ldots$ / $|z_i| \geq R$ /. Тогда ряд $\sum a_n z^n \varphi(\alpha n)$ сходится при $\alpha>0$ для всех $z$ и

$$\sum a_n z^n \varphi(\alpha n) \longrightarrow f(z) \qquad \text{при} \quad \alpha \longrightarrow 0$$

равномерно в любой замкнутой области, целиком лежащей внутри звезды, которая является пересечением областей:

$$\left|\frac{z}{z_i}\right| < \exp\left[\arg\left(\frac{z}{z_i}\right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p}\right], \left|\arg\left(\frac{z}{z_i}\right)\right| < \pi, \; i=1,2\ldots$$

Возникает вопрос, существует ли предел $\sum a_n z^n \varphi(\alpha n)$ при $\alpha \to 0$ в какой-либо точке вне указанной теоремой 2 области. Для метода Бореля, например, известно, что он не суммирует ряд $\sum a_n z^n$ ни в одной точке вне звезды Бореля /[/5/], теорема 133/. Мы доказали аналогичное утверждение для некоторого подкласса из класса методов, определенных в начале примера 3/.

Т е о р е м а 3

Пусть функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 из II и $\psi(t) \to 1$ при $t \to 0$ равномерно в любом угле $|\arg t| \leq \delta_1 < \frac{\pi}{2}$ и пусть ряд $\sum a_n z^n$ представляет в круге $|z|<R$ аналитическую функцию $f(z)$, регулярную в этом круге. Пусть также $p>1$. Тогда

$$\sum a_n z^n \psi(\alpha n^p) \longrightarrow f(z) \qquad \text{при } \alpha \to 0, \; \alpha>0$$

для всех точек звезды, определенной в теореме 2, и $\lim \sum a_n z^n \psi(\alpha n^p)$ при $\alpha \to 0$ не существует ни в одной точке вне этой звезды. Первая часть утверждения теоремы является повторением утверждения теоремы 2 /ибо из условий, положенных на $\psi(t)$ в теореме 3 в II следует, что

$$\psi(t) = O\left[e^{-|t|^{1-\varepsilon}}\right] \qquad \text{при} \quad |t| \longrightarrow \infty$$

равномерно в любом угле $|\arg t| \le \delta_1 < \frac{\pi}{2}$ для любого $\varepsilon > 0$ /. Вторая часть утверждения теоремы 3 следует из теоремы, доказанной в III[x/] точно так, как теорема 133 в[/5/] следует из теоремы 132 там же.

---

x/ Объяснения обозначений I, II, III см. на стр. 62.

## Литература


1. И.И. Хиршман и Д.В. Уиддер. Преобразования типа свертки , ИИЛ, Москва, 1958.
2. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1952 г.
3. М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат. Методы теорий функций комплексного переменного, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1951 г.
4. Е. Титчмарш. Теория функций. Гостехиздат, Москва, 1951 г.
5. Г. Харди. Расходящиеся ряды . ИИЛ, Москва, 1951 г.
6. В.И. Смирнов. Курс высшей математики, том. 3, часть 2, ГИТТЛ, Москва, 1953 г.
7. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Москва-Ленинград, 1950 г.
8. Hyslop. Proceedings of the London Mathematical Society (2), 40, 449 (1936),
9. C.S.Meiyer. Amsterdaam Acad. Wet., Proc., 43, 599 (1940) and 44, 727 (1941)
10. Р. Кук. Бесконечные матрицы и ряды. Москва 1960 г.


Рукопись поступила в издательский отдел 6 апреля 1961 г.