Р-71

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1957 г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров

Р-71

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1957 г.

Введение

В последнее время в теоретической физике приобрели важное значение так называемые дисперсионные соотношения [I,2]. Дисперсионные соотношения дают связь между вещественной и мнимой частями некоторой комплекснозначной (вообще говоря, обобщенной) функции $\tilde{f}(p)$:

$$\operatorname{Re} \tilde{f}(p) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \tilde{f}(p')}{p'-p}\, dp'.$$

Для получения такого рода соотношений применяется формула Коши. В связи с этим возникает проблема аналитического продолжения функции $\tilde{f}(p)$ в комплексную область.

Первый результат в этом направлении получен в работе [3], где была обобщена известная теорема [4] о том, что функция $\tilde{f}(p)$ из $\mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$ продолжима в верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда ее преобразование Фурье $f(x)$ обращается в нуль при $x < 0$, — на случай обобщенных функций. При этом аналитическое продолжение обладает свойствами:

$$\tilde{f}(p+iq) \underset{q \to +0}{\longrightarrow} \tilde{f}(p) \qquad \text{(в смысле обобщенных функций)}$$

$$|\tilde{f}(p+iq)| \leq A_0(\delta)|p|^m + A_1(\delta)|p|^{m-1} + \ldots + A_m(\delta) \quad \text{при } q \geq \delta > 0,$$

где m – целое положительное число,

A_i – вещественные постоянные, зависящие только от δ.

Однако, при числе независимых переменных $n > 1$ такого рода теоремы (см. замечание I к теореме I) недостаточны для вывода дисперсионных соотношений. В работе (2) (Математическое дополнение) доказан ряд теорем об аналитическом продолжении обобщенных функций многих переменных. Типичной из них является теорема, приведенная в замечании V к теореме I. Там же доказана теорема III в предположении, что требуемая область аналитичности (4,7) характеризуется числами α из промежутка

$$\left[0, 2\frac{M\mu}{M+\mu}\right], \qquad \text{где} \quad M \gg \mu > 0.$$

В первой части этой работы доказывается общая теорема I об аналитичности продолжения обобщенных функций многих переменных. Метод доказательства таков, что он без труда может быть распространен и на другие случаи (замечание II к теореме I). Во второй части с помощью теоремы I доказывается основная теорема III. При этом область аналитичности (4.7) расширяется для всех α из промежутка $[0, 2\sqrt{2}\,\mu]$, если $M > 2\mu$. Введем ряд определений и понятий.

Пусть x обозначает точку n-мерного эвклидова пространства R_n, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Обозначим через S множество бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее, чем любой полином (основные функции). Вводя в S топологию с помощью счетного числа норм

$$\|\varphi\|_N = \sup_{x,\ |m|\le N} (1+|x_1|+\dots+|x_n|)^N \left|D_x^m \varphi(x)\right|, \quad N=0,1,\dots, \quad \varphi \in S,$$

мы, тем самым, превращаем S в линейное топологическое (счетно-нормированное) пространство. Символом

$$D_x^M \varphi(x), |M| = N$$

мы обозначаем все производные $\varphi(x)$ по x порядка N. Обобщенной функцией f (в смысле Соболева-Шварца [5,6,7]) назовем всякий линейный непрерывный функционал (f, φ) над пространством S основных функций; при этом для обобщенной функции f будем употреблять обозначения

$$f(x), \quad \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Эти обобщенные функции совпадают с обобщенными функциями, определенными в [8] и [9].

Обозначим через Φ_N пополнение S по N-ой норме; тогда

$$\Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots, \quad S = \cap \Phi_N.$$

Для соответствующих сопряженных пространств (линейных функционалов) S^* и Φ_N^* справедливы соотношения:

$$\Phi_0^* \subset \Phi_1^* \subset \Phi_2^* \subset \ldots, \quad S^* = \cup \Phi_N^*.$$

Итак, всякая обобщенная функция $f(x)$ принадлежит некоторому Φ_N^*. Наименьшее число N такое, что данная обобщенная функция $f(x) \in \Phi_N^*$, назовем ее порядком. Таким образом, всякая обобщенная функция $f(x)$, первоначально рассматриваемая как линейный функционал над S, может быть продолжена на Φ_N, где N - ее порядок.

Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $f_n(x)$ (слабо) сходится к обобщенной функции $f(x)$, если для любой основной функции $\varphi(x)$

$$\int f_n(x)\varphi(x)dx \longrightarrow \int f(x)\varphi(x)dx.$$

Носителем непрерывной функции $\varphi(x)$ назовем замыкание множества точек x, для которых $\varphi(x) \neq 0$. Скажем, что обобщенная функция $f(x)$ равна нулю в открытом множестве G, если $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ всякий раз, когда $\varphi(x)$ имеет свой носитель в G_1.

Условимся говорить, что некоторое выражение

$$f(k, x), \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$$

является обобщенной функцией относительно (вещественной) переменной x и аналитической в области G_1 относительно (комплексной) переменной k, если при всех φ из S выражение

$$\int f(k, x)\varphi(x)dx$$

есть аналитическая функция в области G.

Наконец, условимся об обозначениях при $n = 4$. Через x, p, q, ... мы будем обозначать вещественные точки из R_4, например:

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Соответственно через k, k' будем обозначать комплексные точки

$$k = (k_0, k_1, k_2, k_3) = (k_0, \vec{k}), \; \vec{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad k = p + iq.$$

Символом xk будем обозначать форму

$$xk = x_0 k_0 - \vec{x}\,\vec{k}, \quad \vec{x}\,\vec{k} = \sum_{1 \le s \le 3} x_s k_s .$$

В частности, $x^2 = x_0^2 - \vec{x}^2$. Через $|\vec{x}|$ и $|\vec{k}|$ будем обозначать соответственно длины векторов $\vec{x}$ и $\vec{k}$:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}, \quad |\vec{k}| = \sqrt{\sum_{1 \le s \le 3} |k_s|^2}.$$

Преобразование Фурье $\tilde{f}(p)$ обобщенной функции $f(x)$ определим по формуле

$$\tilde{f}(p) = \int f(x) e^{ipx} dx, \qquad \text{где} \quad px = p_0 x_0 - \vec{p}\,\vec{x}.$$

Символами $x \lesssim 0$, $x \gtrsim 0$ мы будем обозначать области:

$$x \lesssim 0, \quad \text{если} \quad x_0 < 0 \quad \text{или} \quad |x_0| < |\vec{x}|;$$
$$x \gtrsim 0, \quad \text{если} \quad x_0 > 0 \quad \text{или} \quad |x_0| < |\vec{x}|.$$

§ I. Лемма I

Пусть данная обобщенная функция $\tilde{f}(p)$, $p = (p_0, \vec{p})$ обращается в нуль в области

$$G_{\gamma}^{0}: \left\{ c_1 - \sqrt{\gamma^2 \vec{p}^2 + c_2^2} < p_0 < c_3 + \sqrt{\gamma_2^2 \vec{p}^2 + c_4^2} \right\}, \gamma_i \gtrsim 0 .$$

Возьмем положительные числа α и ε и введем функцию комплексного переменного

$$\tilde{f}(k, \alpha, \varepsilon) = \int f(x) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + ikx\right) dx, \tag{I.I}$$

где $f(x)$ - обратное преобразование Фурье функции $\tilde{f}(p)$,

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \tilde{f}(p')e^{-ip'x}dp'. \qquad (I.2)$$

Обозначим через G_1^* область точек $k^*=(p_0,\vec{k})=(p_0,\vec{p}+i\vec{q})$, удовлетворяющих одновременно неравенствам:

$$G_*^*:\left\{c_1-\sqrt{\gamma_1^2\,\theta(|\vec{p}|\underbrace{)}_{-|\vec{q}|)}+c_2^2}<p_0<c_3+\sqrt{\gamma_2^2\,\theta(|\vec{p}|-|\vec{q}|)+c_4^2}\right\},$$

где функция $\theta(\xi)$ равна ξ^2 при $\xi>0$ и 0 при $\xi<0$. Тогда для любого компакта k^*, лежащего в области G_1^*, существуют такие положительные числа α и δ, что при $\varepsilon\to+0$

$$D_k^n\tilde{f}(k,\alpha,\varepsilon)\to 0, \quad |n|=0,1,2\ldots$$

равномерно для всех k из компакта

$$k^*\times\{|q_0|\le\delta\} \qquad (I.3)$$

Доказательство

Достаточно доказать лемму, когда область G_*^0 есть совокупность точек p, удовлетворяющих неравенству

$$p_0<a+\sqrt{\gamma^2\vec{p}^2+b^2}. \qquad (I,4)$$

Докажем сначала, что соответствующая область G^*_α есть сумма монотонно возрастающей последовательности $\{G^*_\alpha\}$ областей

$$G^*_\alpha = \bigcup_{0<\beta<\alpha} G^*_{\alpha,\beta}, \quad \alpha > 0, \tag{I,5}$$

где область $G^*_{\alpha,\beta}$ определяется неравенством

$$G^*_{\alpha,\beta} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(P_0-a)^2 + \frac{\vec{q}^{\,2}}{\beta} < b^2 + \frac{\gamma^2}{1+\beta\gamma^2}\vec{P}^2 \right\}.$$

Так как при каждом β, $0<\beta<\alpha$, функция $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$ монотонно убывает, то ясно из (I.5), что последовательность областей G^*_α монотонно возрастает. Поэтому

$$\bigcup_{\alpha>0} G^*_\alpha = \lim_{\alpha\to+\infty} G^*_\alpha = \bigcup_{\beta>0} G^*_{\infty,\beta}. \tag{I.6}$$

Но

$$G^*_{\infty,\beta} \left\{ (P_0-a)^2 + \frac{\vec{q}^{\,2}}{\beta} < b^2 + \frac{\gamma^2}{1+\beta\gamma^2}\vec{P}^2 \right\}$$

Докажем теперь, что

$$\bigcup_{\beta>0} G^*_{\infty,\beta} = G^*_\gamma. \tag{I.7}$$

Для этого достаточно вычислить огибающую семейства поверхностей

$$f(k^*,\beta) \equiv b^2 + \frac{\gamma^2}{1+\beta\gamma^2}\vec{P}^2 - \frac{\vec{q}^{\,2}}{\beta} - (P_0-a)^2 = 0$$

при условии, что $\beta > 0$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\vec{q}^{\,2}}{\beta^2} - \frac{\gamma^4\vec{P}^2}{(1+\beta\gamma^2)^2} = 0\,;$$

откуда: или $\beta = +\infty$, или

$$\beta\gamma^2 = \frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|-|\vec{q}|}, \qquad \text{если} \quad |\vec{p}| \geqslant |\vec{q}|.$$

Подставляя найденные значения β в уравнение $f(K^*, \beta)=0$, получим искомые уравнения огибающей:

или $(p_0-a)^2 = b^2$;

или $(p_0-a)^2 = \gamma^2(|\vec{p}|-|\vec{q}|)^2 + b^2$, если $|\vec{p}| \geqslant |\vec{q}|$.

Соответствующая сумма по β областей $f(K^*, \beta)>0$ будет равна

или $(p_0-a)^2 < b^2$, если $|\vec{p}|<|\vec{q}|$;

или $(p_0-a)^2 < \gamma^2(|\vec{p}|-|\vec{q}|)^2 + b^2$, если $|\vec{p}| \geqslant |\vec{q}|$.

Введя функцию $e(\xi)$, запишем

$$\bigcup_{\beta>0} \{f(K^* \beta)>0\} = \{(p_0-a)^2 < \gamma^2 e(|\vec{p}|-|\vec{q}|) + b^2\}.$$

Таким образом, равенство (I.7) доказано. А тогда из (I.6) и (I.7) имеем

$$G_1^* = \lim_{\alpha \to +\infty} G_\alpha^*. \tag{I.8}$$

Так как компакт K^* лежит в области G^*, а последовательность областей G_α^* монотонно возрастает по α, то из (I.8) следует, что найдется такое $\alpha>0$, что

$$K^* \subset G_\alpha^*. \tag{I.9}$$

Полученное α мы зафиксируем для дальнейших рассуждений. Заметим теперь, что при любом $\varepsilon > 0$ функция $\tilde{f}(k,\alpha,\varepsilon)$, определяемая формулой (I.I), может рассматриваться как значение функционала $f(x)$ на основной функции

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha}x_0^2-\varepsilon\vec{x}^2+ikx\right),$$

а поэтому является аналитической функцией переменной k. Принимая во внимание (I.2), получим из (I.I)

$$\tilde{f}(k,\alpha,\varepsilon)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int f(p')\left\{\int\exp\left[-\frac{\varepsilon}{\alpha}x_0^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\varepsilon\vec{x}^2+i(k-p')x\right]dx\right\}dp'=$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha}}{2^4\pi^2\varepsilon^2}\int f(p')\exp\left[-\frac{\alpha(k_0-p_0')^2+(\vec{k}-\vec{p}')}{4\varepsilon}\right]dp'. \qquad (\text{I.I0})$$

Возьмем теперь некоторое достаточно малое положительное число d и построим бесконечно дифференцируемую функцию $\vartheta_\alpha(p')$, равную 0 в области

$$p_0'<a-2d+\sqrt{\gamma^2\vec{p}'^2+b^2};$$

и I вне области[x)]

$$p_0'<a-d+\sqrt{\gamma^2\vec{p}'^2+b^2}. \qquad (\text{I.II})$$

Отметим, что при каждом K функции

$$\exp\left[-\frac{\alpha(k_0-p_0')^2+(\vec{k}-\vec{p}')^2}{4\varepsilon}\right],\ \vartheta_\alpha(p')\exp\left[-\frac{\alpha(k_0-p_0')^2+(\vec{k}-\vec{p}')^2}{4\varepsilon}\right]$$

---

x) Такие функции существуют, см., например, С.Л.Соболев (I0).

суть основные. Их разность отлична от нуля в области (I.II), содержащейся в области (I.4). Но по условию в области (I.4) сама обобщенная функция $\tilde{f}(p')$ равна нулю. Поэтому соотношение (I.I0) можно переписать в виде

$$\tilde{f}(k,\alpha,\varepsilon)=\int \tilde{f}(p')H(k,p';\alpha,\varepsilon)\,dp', \tag{I.I2}$$

где

$$H(k,p';\alpha,\varepsilon)=\frac{\sqrt{\alpha}}{2^4\pi^2\varepsilon^2}\,V_\alpha(p')\,\cancel{exp}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{\alpha(k_0-p_0')^2+(\vec{k}-\vec{p}\,')^2}{4\varepsilon}\right] \tag{I.I3}$$

В силу (I.9), (I.5) и леммы Бореля-Лебега компакт $\mathcal{K}^*$ можно покрыть конечным числом областей $G^*_{\alpha,\beta}$. Возьмем одну из этих областей и изучим поведение последовательности $H(k,p';\alpha,\varepsilon)$ при $\varepsilon\longrightarrow+0$, когда K принадлежит

$$\left[\mathcal{K}^*\cap G^*_{\alpha,\beta}\right]\times\left\{|q_0|\leq\delta\right\}, \tag{I.I4}$$

где δ -малое положительное число, которое будет выбрано ниже. В силу свойств функции $V_\alpha(p')$ достаточно ограничиться областью

$$p_0'\geqslant a-3d+\sqrt{\gamma^2\vec{p}\,'^2+b^2}. \tag{I.I5}$$

Так как

$$k^*=(p_0,\vec{p}+i\vec{q})\in\mathcal{K}^*\cap G^*_{\alpha,\beta},$$

то существуют такие достаточно малые положительные числа d и d_1, что

$$b^2+\frac{\gamma^2}{1+\beta\gamma^2}\vec{p}^2-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}(p_0-a+3d)^2-\frac{\vec{q}^2}{\beta}\geqslant d_1 \qquad (I.16)$$

Теперь оценим снизу выражение

$$\mathrm{Re}\left[\alpha(k_0-p_0')^2+(\vec{k}-\vec{p}\,')^2\right]=\alpha(p_0-a+3d)^2+\alpha(p_0'-a+3d)^2+$$

$$+\vec{p}^2+\vec{p}\,'^2-\vec{q}^2-2\alpha(p_0-a+3d)(p_0'-a+3d)-2\vec{p}\vec{p}\,'-\alpha q_0^2$$

при всех K из (I.I4) и p' из (I.I5). Пусть m и n положительные числа, которые будут выбраны ниже. На основании неравенства Буняковского имеем

$$\alpha(p_0-a+3d)(p_0'-a+3d)+\vec{p}\vec{p}\,'\leq\sqrt{\vec{p}\,'^2+m(p_0'-a+3d)^2}\cdot\sqrt{\vec{p}^2+\frac{\alpha^2}{m}(p_0-a+3d)^2}.$$

Принимая это во внимание, получим далее

$$\mathrm{Re}\left[\alpha(k_0-p_0')^2+(\vec{k}-\vec{p}\,')^2\right]\geqslant\alpha(p_0-a+3d)^2+\alpha(p_0'-a+3d)^2+$$

$$+\vec{p}^2+\vec{p}\,'^2-\vec{q}^2-\alpha q_0^2-2\sqrt{\vec{p}\,'^2+m(p_0'-a+3d)^2}\sqrt{\vec{p}^2+\frac{\alpha^2}{m}(p_0-a+3d)^2}\geqslant$$

$$\geqslant\alpha(p_0-a+3d)^2+\alpha(p_0'-a+3d)^2+\vec{p}^2+\vec{p}\,'^2-\vec{q}^2-\alpha q_0^2-$$

$$-2\sqrt{\vec{p}\,'^2+m(p_0'-a+3d)^2}\cdot\sqrt{\vec{p}^2+\frac{\alpha^2}{m}(p_0-a+3d)^2}-$$

$$-n\left[\sqrt{\vec{p}\,'^2+m(p_0'-a+3d)^2}-\frac{1}{n}\sqrt{\vec{p}^2+\frac{\alpha^2}{m}(p_0-a+3d)^2}\right]^2=$$

$$=(\alpha-nm)(p_0'-a+3d)^2+\left(\alpha-\frac{\alpha^2}{nm}\right)(p_0-a+3d)^2+$$

$$+\vec{p}^2\left(1-\frac{1}{n}\right)+\vec{p}\,'^2(1-n)-\vec{q}^2-\alpha q_0^2.$$

Выберем теперь числа m и n из условий

$$(\alpha - nm)\gamma^2 = n-1, \quad \alpha > nm.$$

Обозначая $\alpha - nm = \beta$ и учитывая (I,I6), получим далее

$$\mathrm{Re}\left[\alpha(k_0 - p_0')^2 + (\vec{k} - \vec{p}\,')^2\right] \geqslant \beta\Big[(p_0' - a + 3d)^2 - \gamma^2 \vec{p}\,'^2 +$$

$$+ \frac{\gamma^2 \vec{p}^{\,2}}{1+\beta\gamma^2} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(p_0 - a + 3d)^2 - \frac{\vec{q}^{\,2}}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} q_0^2\Big] \geqslant$$

$$\geqslant \beta\left[\frac{d_1}{2} + (p_0' - a + 3d)^2 - \gamma^2 \vec{p}\,'^2 - b^2\right],$$

если выбрать

$$|q_0| \leq \sqrt{\frac{d_1 \beta}{2\alpha}} = \delta.$$

Таким образом, в области (I.I5) получаем оценку

$$\left|\exp\left[-\frac{\alpha(k_0 - p_0')^2 + (\vec{k} - \vec{p}\,')^2}{4\varepsilon}\right]\right| \leq \exp\Big\{-\frac{\beta}{4\varepsilon}\Big[\frac{d_1}{2} +$$

$$+ (p_0' - a + 3d)^2 - \gamma^2 \vec{p}\,'^2 - b^2\Big]\Big\} \qquad \text{(I.I7)}$$

Оценка (I.I7) справедлива при всех K из (I.I4); числа d, d_1 и δ зависят от β. Так как компакт K^* покрывается конечным числом областей $G^*_{\alpha,\beta}$, то можно считать, выбирая β, d, d_1 и δ наименьшими, что эти оценки справедливы при всех К из (I.3). Мы будем доказывать сейчас, что все нормы основной функции (I.I3) для всех К из (I.3) имеют оценки:

$$\|H(k,p';\alpha,\varepsilon)\|_N \leq C_N \varepsilon^{-2-N} \exp\left(-\frac{\beta d_\alpha}{8\varepsilon}\right), \quad N=0,1,2\ldots . \tag{I.I8}$$

В силу свойств функции $\vartheta_\alpha(p')$ мы можем ограничиться рассмотрением функции $H(k,p',\alpha,\varepsilon)$ в области

$$p_0' \geqslant a - 2d + \sqrt{\gamma^2 \vec{p}'^2 + b^2}\,. \tag{I.I9}$$

Так как режущая экспонента в (I.I3) при дифференцировании по p' остается неизменной, то из (I.I7) и (I.I9) следует, что для доказательства (I.I8) достаточно установить конечность выражений

$$|p_0'|^N \exp\left\{\frac{\beta}{4\varepsilon}\left[-(p_0'-a+3d)^2+\gamma^2\vec{p}'^2+b^2\right]\right\}, \quad N=0,1,2\ldots$$

при условии (I.I9). Действительно,

$$|p_0'|^N \exp\left\{\frac{\beta}{4\varepsilon}\left[-(p_0'-a+3d)^2+\gamma^2\vec{p}'^2+b^2\right]\right\} \leq$$

$$\leq |p_0'|^N \exp\left\{\frac{\beta}{4\varepsilon}\left[(p_0'-a+2d)^2-(p_0'-a+3d)^2\right]\right\} \leq$$

$$\leq |p_0'|^N \exp\left[-\frac{d\beta}{2\varepsilon}\left(p_0-a+\frac{5}{2}d\right)\right] \leq C_N .$$

Из (I.12) и (I.18) следует, что

$$\tilde{f}(k,\alpha,\varepsilon) \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \longrightarrow +0$$

равномерно для всех К из (I.3). Совершенно аналогично доказывается, что

$$D_k^n \tilde{f}(k,\alpha,\varepsilon) \qquad\qquad \text{при} \quad \varepsilon \longrightarrow +0, \quad |n| = 1, 2, \ldots$$

равномерно для всех К из (I.3). Лемма доказана.

Лемма II

Пусть даны две обобщенные функции $\mathcal{F}_r(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$ удовлетворяющие условиям:

$$\mathcal{F}_r(x)=0, \text{ если } x \leq 0; \quad \mathcal{F}_a(x)=0, \text{ если } x \geq 0,$$

и пусть их порядки не превосходят числа N.

Пусть далее $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ - любые вещественные векторы, причем,

$$|\vec{\lambda}| = 1-\sigma, \qquad 0 < \sigma \leq 1; \tag{I.20}$$

a и b - любые вещественные числа. Тогда функции комплексного переменного $z\,(j = r, a)$

$$\tilde{\mathcal{F}}_j\left(z, \vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)} + \vec{\mu}; \alpha, \varepsilon\right) =$$

$$= \int \mathcal{F}_j(x) \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + i z x_0 - i \vec{\lambda}\vec{x}\sqrt{(z-a)(z-b)} - - i\vec{\mu}\vec{x}\right] dx, \tag{I.21}$$

растут не быстрее, чем некоторый полином степени $2N$ (с коэффициентами, непрерывно зависящими от $(\vec{\lambda}, \vec{\mu})$) соответственно в областях

$$\operatorname{Jm} z \geq 0 \quad \text{при } j = r \quad \text{и} \quad \operatorname{Jm} z \leq 0 \quad \text{при } j = a.$$

Доказательство.

Возьмем некоторое положительное число d и введем бесконечно дифференциальную функцию $\varphi(t)$ такую, что

$$\varphi(t)=0 \quad \text{при} \quad t<-2d;$$

$$\varphi(t)=1 \quad \text{при} \quad t>-d. \qquad (I.22)$$

Возьмем некоторое $R>0$ и рассмотрим при $|z|\geqslant R$ основные функции

$$\exp\left[-\frac{\varepsilon}{d}x_0^2-\varepsilon\vec{x}^2+izx_0-i\vec{\lambda}\vec{x}\sqrt{(z-a)(z-b)}-i\vec{\mu}\vec{x}\right],$$

$$H(x,z)=\varphi(|z|x_0)\varphi\left[|z|^2(x_0^2-\vec{x}^2)\right]\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\varepsilon}{d}x_0^2-\varepsilon\vec{x}^2+izx_0-i\vec{\lambda}\vec{x}\sqrt{(z-a)(z-b)}-i\vec{\mu}\vec{x}\right].$$

Их разность равна нулю, если

$$x_0\geqslant-\frac{d}{|z|},\quad x_0^2\geqslant\vec{x}^2-\frac{2d}{|z|^2}.$$

Но в области, где $x_0<0$, или $x_0^2<\vec{x}^2$, обращается в нуль сама функция $\mathcal{F}_\tau(x)$. Поэтому выражение (I.21) для $j=\tau$ может быть записано в виде

$$\tilde{\mathcal{F}}_\tau(z,\vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)}+\vec{\mu};d,\varepsilon)=\int\mathcal{F}_\tau(x)H(x,z)\,dx. \qquad (I.23)$$

Изучим теперь функцию

$$-x_0 \,\mathrm{Im}\, z + \vec{\lambda}\vec{x}\,\mathrm{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)}$$

при условии, что

$$x_0 \geq -\frac{2d}{|z|}, \quad x_0^2 \geq \vec{x}^{\,2} - \frac{2d}{|z|^2}, \quad \mathrm{Im}\, z \geq 0, \; |z| \geq R. \qquad (I.24)$$

В силу (I.24) и (I.20) имеем

$$-x_0 \,\mathrm{Im}\, z + \vec{\lambda}\vec{x}\,\mathrm{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)} \leq$$

$$\leq -x_0 \,\mathrm{Im}\, z + (1-\sigma)\sqrt{x_0^2 + \frac{2d}{|z|^2}}\,\left|\mathrm{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)}\right|. \qquad (I.25)$$

Обозначая $z = |z| e^{i\theta}$ где $|z| \geq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$,
получим

$$\left|\mathrm{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)}\right| = \mathrm{Im}\left[|z| e^{i\theta}\sqrt{\left(1-\frac{a}{|z|}e^{-i\theta}\right)\left(1-\frac{b}{|z|}e^{-i\theta}\right)}\right] \leq$$

$$\leq |z| \sin\theta \left(1 + \frac{|a+b|}{2|z|} + \ldots\right);$$

Отсюда следует, что для данных σ, a и b можно выбрать такое большое число R, что при всех $|z| \geq R$ будет

$$\left|\mathrm{Im}\sqrt{(z-a)(z-b)}\right| \leq |z| \sin\theta \,\frac{2-\sigma}{2-2\sigma};$$

Отсюда и из (I.25) получаем

$$-x_0 \,\mathrm{Im}\, z + \vec{\lambda}\vec{x}\sqrt{(z-a)(z-b)} \leq \Big[-x_0 |z| +$$

$$+\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{x_0^2 |z|^2 + 2d}\,\Big] \sin\theta \leq 2d + \left(1-\frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{3d + 4d^2} = C. \qquad (I.26)$$

Теперь, принимая во внимание (1.22) и (1.26), получаем

$$\|H(x,z)\|_N \leq C_N\left(|z|^{2N}+1\right). \qquad (1.27)$$

Оценка (1.27) получена при $|z| \geq R$. Но ясно, что она справедлива и при $|z| < R$. Так как порядок обобщенной функции $\mathcal{F}_\tau(x)$ не превосходит N, то из (1.23) и (1.27) следует, что при $\operatorname{Im} z \geq 0$

$$\left|\tilde{\mathcal{F}}_\tau\left(z, \vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)} + \vec{\mu}; \alpha, \varepsilon\right)\right| \leq A_N\left(|z|^{2N}+1\right).$$

Аналогично изучается и функция $\tilde{\mathcal{F}}_a$. Лемма доказана.

§ 2.

Теперь применим леммы, доказанные в § 1, к установлению следующей теоремы.

Теорема 1.

Пусть даны две обобщенные функции $\mathcal{F}_\tau(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$, удовлетворяющие условиям:

$\mathcal{F}_\tau(x)=0$, если $x \leq 0$; $\mathcal{F}_a(x)=0$, если $x \geq 0$;

$\tilde{\mathcal{F}}_\tau(p) - \tilde{\mathcal{F}}_a(p) = 0$, если $p \in G^0$, где $\tilde{\mathcal{F}}_j(p)$ есть преобразование Фурье функции $\mathcal{F}_j(x)$, $j=\tau, a$, и область G^0 - есть совокупность точек $p=(p_0, \vec{p})$, удовлетворяющих неравенствам

$$G^0 \left\{ c_1 - \sqrt{\gamma_1^2 \vec{p}^{\,2} + c_2^2} < p_0 < c_3 + \sqrt{\gamma_2^2 \vec{p}^{\,2} + c_4^2} \right\}, \quad \gamma_i \geq 0.$$

Пусть далее, порядки обобщенных функций $\widetilde{\mathcal{F}}_j(p)$ не превосходят числа N. Пусть a и b - любые вещественные числа такие, что $a < b$. Обозначим через $G(a,b)$ множество комплексных точек $k=(k_0,\vec{k})=(p_0+iq_0,\vec{p}+i\vec{q})$, удовлетворяющих неравенству

$$|\vec{q}|<\left|\mathrm{Im}\sqrt{(k_0-a)(k-b)_2}\right|, \tag{2.1}$$

а также обладающих тем свойством, что при всех $\xi, a \le \xi \le b$, выполнены неравенства

$$C_1-\sqrt{\gamma_1^2 e[T(k,a,b,\xi)]+C_2^2}<\xi<C_3+\sqrt{\gamma_2^2 e[T(k,a,b,\xi)]+C_4^2} \tag{2.2}$$

где

$$T(k,a,b,\xi)=\left|\vec{p}-\vec{q}\,\frac{\mathrm{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\mathrm{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\right|-\frac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{\left|\mathrm{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|}|\vec{q}|. \tag{2.3}$$

Тогда существует функция $\widetilde{\Phi}(k)$ комплексного переменного k, аналитическая в области G, где

$$G=\bigcup_{a<b} G(a,b),$$

такая, что при всех вещественных $p=(p_0,\vec{p})$ из области G^0

$$\widetilde{\Phi}(p)=\widetilde{\mathcal{F}}_1(p)=\widetilde{\mathcal{F}}(p). \tag{2.4}$$

Кроме того, в достаточно малой окрестности любой точки области G имеет место интегральное представление

$$\widetilde{\Phi}(k)=\sum_{j=1,2}\int\widetilde{\mathcal{F}}_j(p')\widetilde{H}_j(k,p')\,dp', \tag{2.5}$$

где функции $H_\gamma(K, P')$ обладают следующими свойствами: при каждом P' аналитические относительно К в рассматриваемой окрестности; при каждом К из этой окрестности принадлежат пространству Φ_N; "универсальны" для всех обобщенных функций $\tilde{\tilde{f}}_\gamma(P)$, удовлетворяющих условиям теоремы.

Доказательство.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, установим соотношения между областями G^0, G^* и G:

$$G \cap \{q_0 = 0\} \subset G^*; \qquad (2.6)$$

$$G^0 = G^* \cap \{\vec{q} = \vec{0}\} = G \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\}, \qquad (2.7)$$

где область G^* определена в лемме I.

Действительно, пусть точка $K^* = (P_0, \vec{K})$ принадлежит $G \cap \{q_0 = 0\}$. Это значит, что K^* принадлежит $G(a,b) \cap \{q_0 = 0\}$. Но тогда из (2.I) имеем: $a < P_0 < b$. Полагая в неравенствах (2.2) и (2.3) $\xi = P_0$, получаем, что $K^* \in G^*$. Включение (2.6) доказано.

Первое из неравенств (2.7) очевидно; из (2.6) следует

$$G \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\} \subset G^* \cap \{\vec{q} = \vec{0}\}.$$

Докажем обратное включение, а с ним и соответствующее равенство (2.7). Пусть $P = (P_0, \vec{P}) \in G^* \cap \{\vec{q} = \vec{0}\}$. Тогда при достаточно малом $\eta > 0$ все точки $(P_0 + \alpha, \vec{P})$, где $|\alpha| \leq \eta$, будут принадлежать G^*. Но это значит в силу (2.I) - (2.3), что

$$P \in G(P_0 - \eta, P_0 + \eta) \subset G \cap \{q_0 = 0, \vec{q} = \vec{0}\}.$$

Пусть a и b - любые вещественные числа, причем, $a < b$. Докажем, что все утверждения теоремы справедливы для области $G(a,b)$.

Пусть $\mathcal{K}$ - любой компакт, содержащийся в области $G(a,b)$. Тогда найдется такое достаточно малое положительное число σ, что компакт $\mathcal{K}_1$ - множество точек K, удаленных от компакта $\mathcal{K}$ на расстояние, не превосходящее σ, содержится в $G(a,b)$.

Предполагаем компакт $\mathcal{K}$ таким, что все его подмножества, рассматриваемые ниже, были бы не пусты. Обозначим далее, через $\mathcal{K}^*$ и $\mathcal{K}_1^*$ сечение плоскостью $q_0 = 0$ соответственно компактов $\mathcal{K}^*$ и $\mathcal{K}_1^*$,

$$\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \cap \{q_0 = 0\}, \quad \mathcal{K}_1^* = \mathcal{K}_1 \cap \{q_0 = 0\}.$$

Из (2,6) следует, что $\mathcal{K}_1^* \subset G^*$. Тогда из определения областей $G(a,b)$ и G^* следует существование такого достаточно малого положительного числа η, что имеют место утверждения:

I) компакт

$$\mathcal{K}_1^* + \bigcup_{k\in\mathcal{K}_1}\left[\xi,\ \vec{P} + \vec{q}\,\frac{\pm\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)} - Re\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{Im\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}},\ a-\eta \le \xi \le b+\eta\right] \tag{2.8}$$

содержится в области G^*;

2) при всех K из $\mathcal{K}_1$ имеет место неравенство

$$\frac{|\vec{q}\,|}{\left|Im\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|} \le 1-\eta; \tag{2.9}$$

3) при всех $k^* = (p_0, \vec{k})$ из $\mathcal{K}_1^*$ выполнены неравенства

$$a+\eta \le p_0 \le b-\eta. \tag{2.10}$$

Возьмем положительные числа α и ε и введем функции комплексного переменного $K = (k_0, \vec{k})$

$$\tilde{\mathcal{F}}_j(k,\alpha,\varepsilon) = \int \mathcal{F}_j(x) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + ikx\right) dx,$$

$$j = r, a; \quad \tilde{f}(k,\alpha,\varepsilon) = \tilde{\mathcal{F}}_r(k,\alpha,\varepsilon) - \tilde{\mathcal{F}}_a(k,\alpha,\varepsilon).$$

Применим лемму I к функции

$$\tilde{f}(p) = \tilde{\mathcal{F}}_r(p) - \tilde{\mathcal{F}}_a(p)$$

и к компакту (2.8). Тогда получим, что существуют такие положительные числа α и δ, что имеют место соотношения при $\varepsilon \to +0$:

$$\tilde{f}\left[\xi, \vec{p} + \vec{q}\, \frac{\pm\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)} - \operatorname{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}, \alpha, \varepsilon\right] \to 0 \qquad (2.11)$$

равномерно для всех ξ, $a - \eta \le \xi \le b + \eta$ и K из K_1;

$$\tilde{\mathcal{F}}_j(k,\alpha,\varepsilon) = \int \mathcal{F}_j(x) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha} x_0^2 - \varepsilon \vec{x}^2 + ikx\right) dx$$

$$\frac{d\tilde{f}}{d\xi}\left[\xi, \vec{p} + q\, \frac{\pm\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)} - \operatorname{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}, \alpha, \varepsilon\right] \to 0 \qquad (2.12)$$

равномерно для всех ξ, $a + \eta \le \xi \le b - \eta$ и K из K_1;

$$\tilde{f}(k,\alpha,\varepsilon) \to 0 \qquad (2.13)$$

равномерно для всех К из $\mathcal{K}_1^* \times \{|q_0| \le \delta\}$.

Найденные числа α и δ, зависящие только от компакта $\mathcal{K}$, зафиксируем для дальнейших рассуждений. Заметим теперь, что функции $\tilde{\mathcal{F}}_j(k,\alpha,\varepsilon)$, рассматриваемые как значения функционалов $\mathcal{F}_j(x)$ на основной функции

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\alpha}x_0^2-\varepsilon\vec{x}^2+ikx\right),\ \varepsilon>0,\ \alpha>0,$$

суть целые аналитические функции комплексного переменного

$$k=(k_0,k_1,k_2,k_3).$$

Фиксируем точку $k'=(k_0',\vec{k}_1')=(p_0'+iq_0',\vec{p}'+i\vec{q}')$ из компакта $\mathcal{K}$ и пусть положительное число $\rho<\min\left(\frac{\delta}{3},\frac{\sigma}{4}\right)$. Обозначим через $G(k')$ окрестность точки k', состоящую из точек $k=(k_0,\vec{k})=(p_0+iq_0,\vec{p}+i\vec{q})$ таких, что

$$G(k')\ \left\{|k_s-k_s'|<\frac{\rho}{3},\ s=0,1,2,3\right\}.$$

Тогда при достаточно малом ρ область

$$|k_s-k_s'|<2\rho \qquad s=0,1,2,3 \tag{2.14}$$

будет содержаться в $\mathcal{K}_1$, ибо

$$\sum_{0\le s\le 3}|k_s-k_s'|^2<16\rho^2<\sigma^2.$$

По теореме Коши имеем при всех К из $G(k')$

$$\tilde{\mathcal{F}}_j(k,\alpha,\varepsilon)=\left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^4\int\limits_{0\le\theta_s\le 2\pi}\tilde{\mathcal{F}}_j(k_0'+\rho e^{i\theta_0},\vec{k}'+\vec{\nu}+\rho e^{i\vec{\theta}},\alpha,\varepsilon)\times$$

$$\times\frac{e^{i\theta_0}d\theta_0}{k_0'+\rho e^{i\theta_0}-k_0}\prod_{1\le s\le 3}\frac{e^{i\theta_s}d\theta_s}{k_s'+\nu_s+\rho e^{i\theta_s}-k_s}\times \tag{2.15}$$

при любом вещественном векторе $\vec{\nu}$, для которого

$$|\nu_s| \leq \frac{\rho}{3}; \qquad s = 1,2,3.$$

Заметим теперь, что при всех $\vec{\nu}$, $|\nu_s| \leq \frac{\rho}{3}$; и

$$\theta = (\theta_0, \vec{\theta}) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad 0 \leq \theta_s \leq 2\pi, \quad \text{точки}$$

$$(k_0' + \rho e^{i\theta_0}, \ \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}) \tag{2.16}$$

содержатся в (2.14), а следовательно, и в $\mathcal{K}_1$. Кроме того при всех К из $G(k')$ имеют место неравенства

$$|k_0' - \rho e^{i\theta_0} - k_0| > \frac{2}{3}\rho, \ |k_s' + \nu_s + \rho e^{i\theta_s} - k_s| \geq |\rho e^{i\theta_s}| -$$
$$- |\nu_s| - |k_s - k_s'| > \frac{1}{3}\rho. \tag{2.17}$$

Пусть $\vartheta(\vec{\nu})$ - бесконечно дифференцируемая функция, обращающая в нуль вне куба $|\nu_s| \leq \frac{\rho}{3}$, и такая, что

$$\int \vartheta(\vec{\nu})\, d\vec{\nu} = 1. \tag{2.18}$$

Тогда, в силу (2.17), функция

$$W(k, \vec{\nu}, \theta) = \left(\frac{\rho}{2\pi}\right)^4 \frac{e^{i\theta_0}}{k_0' + \rho e^{i\theta_0} - k_0} \prod_{1 \leq s \leq 3} \frac{e^{i\theta_s} \vartheta(\vec{\nu})}{k_s' + \nu_s + \rho e^{i\theta_s} - k_s} \tag{2.19}$$

аналитическая относительно К в области $G(k)'$ при всех рассматриваемых $\vec{\nu}$ и θ. Кроме того, при всех θ и К из $G(k')$ эта функция бесконечно дифференцируемая и финитная относительно $\vec{\nu}$.

Принимая во внимание независимость (2.15) от вектора $\vec{\nu}$, в силу (2.18) и (2.19) получим

$$\tilde{\mathfrak{F}}_j(k,\alpha,\varepsilon)=\int \tilde{\mathfrak{F}}_j(k_0'+\rho e^{i\theta_0},\vec{k}'+\vec{\nu}+\rho e^{i\vec{\theta}},\alpha,\varepsilon)W(k,\vec{\nu},\theta)\,d\theta\, d\vec{\nu}=$$

$$=\int\limits_{q_0'+\rho\sin\theta_0>0} \tilde{\mathfrak{F}}_\tau(k_0'+\rho e^{i\theta_0},\vec{k}'+\vec{\nu}+\rho e^{i\vec{\theta}},\alpha,\varepsilon)W(k,\vec{\nu},\theta)\,d\theta\, d\vec{\nu}+$$

$$+\int\limits_{q_0'+\rho\sin\theta_0>0} \tilde{\mathfrak{F}}_a(k_0'+\rho e^{i\theta_0},\vec{k}'+\vec{\nu}+\rho e^{i\vec{\theta}},\alpha,\varepsilon)W(k,\vec{\nu},\theta)\,d\theta\, d\vec{\nu}+ \tag{2.20}$$

$$+T_j(k,\alpha,\varepsilon),$$

где

$$T_\tau(k,\alpha,\varepsilon)=\int\limits_{q_0'+\rho\sin\theta_0<0} \tilde{f}(k_0'+\rho e^{i\theta_0},\vec{k}'+\vec{\nu}+\rho e^{i\vec{\theta}},\alpha,\varepsilon)\,W(k,\vec{\nu},\theta)\,d\theta\, d\vec{\nu}, \tag{2.21}$$

$$T_a(k,\alpha,\varepsilon)=-\int\limits_{q_0'+\rho\sin\theta_0>0} \tilde{f}(k_0'+\rho e^{i\theta_0},\vec{k}'+\vec{\nu}+\rho e^{i\vec{\theta}},\alpha,\varepsilon)W(k,\vec{\nu},\theta)\,d\theta\, d\vec{\nu}. \tag{2.22}$$

Для того, чтобы получить выражение для

$$\tilde{\mathfrak{F}}_j(k_0'+\rho e^{i\theta_0},\vec{k}'+\vec{\nu}+\rho e^{i\vec{\theta}},\alpha,\varepsilon),$$

построим вспомогательные функции $f_j(z,\varepsilon)$ одного комплексного переменного z, положив

$$f_j(z,\varepsilon)=\varphi(z)\tilde{\mathfrak{F}}_j\left[z,\vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right],\quad j=\tau, a. \tag{2.23}$$

Вещественные векторы $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ выберем из условия

$$\vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}} = \vec{\lambda}\sqrt{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)\cancel{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)}(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)} + \vec{\mu}, \tag{2.24}$$

т.е.

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{q}' + \rho\,\overrightarrow{\sin\theta}}{\Im m\sqrt{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)}},$$

(2.25)

$$\vec{\mu} = \vec{p}' + \vec{\nu} + \rho\,\overrightarrow{\cos\theta} - (\vec{q}' + \rho\,\overrightarrow{\sin\theta})\frac{\mathrm{Re}\sqrt{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)}}{\Im m\sqrt{(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - a)(k_0' + \rho e^{i\theta_0} - b)}}.$$

Так как точки (2.16) принадлежат $\mathcal{K}_1$, то, в силу (2.9), выбранный в (2.25) вектор $\vec{\lambda}$ будет удовлетворять условию

$$|\vec{\lambda}| \leq 1 - \eta. \tag{2,26}$$

Предполагаем, что функция $\varphi(z)$ обладает следующими свойствами.

I. Аналитическая на всей плоскости комплексного переменного z за исключением линии разреза

$$\Im m\, z = 0, \quad c \leq \mathrm{Re}\, z \leq d \quad (c > b,\ \eta < c - b). \tag{2.27}$$

2. Ведет себя вместе со всеми своими производными при $|z| \to \infty$ как z^{-N_1}, где число N_1 может быть выбрано достаточно большим и, во всяком случае, $N_1 \geq 2N+1$.

3. Если $\Im m\, z \to \pm 0$, то равномерно на каждом конечном интервале переменной $\xi = \mathrm{Re}\, z$

$$\frac{d^i\varphi(z)}{dz^i} \longrightarrow \frac{d^i\varphi_j(\xi)}{d\xi^i}, \quad j = \tau, a, \quad i = 0, 1 \cdots,$$

где предельные функции $\varphi_{z}(\xi) \equiv \varphi(\xi+0)$ и $\varphi_{a}(\xi) \equiv \varphi(\xi-0)$ непрерывны со всеми своими производными на всей вещественной оси. Заметим, что из 1. следует:

$$\varphi_{z}(\xi) = \varphi_{a}(\xi) = 0 \quad , \qquad \text{если} \quad \xi < c; \tag{2.28}$$

из 2. следуют оценки при $|\xi| \longrightarrow \infty$

$$\left|\frac{d^{i}\varphi_{j}(\xi)}{d^{i}\xi}\right| \leq A_{i}|\xi|^{-N_{1}}; \quad j = z, a, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{2.29}$$

4. Предполагаем, наконец, что $\varphi(K_0' + \rho e^{i\theta_0}) \neq 0$ при всех θ_0, $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$.

Функции $\varphi(z)$, удовлетворяющие условиям 1-4, существуют; это будут, например, функции вида

$$\int_{c}^{d} \frac{q(\xi)}{(z-\xi)^{N_1}}\, d\xi,$$

где $q(\xi)$ - функции вещественного переменного ξ, обладающие непрерывными производными всех порядков в интервале $[c, d]$ и обращающиеся в нуль со всеми своими производными в граничных точках этого интервала. Если разрезать плоскость комплексного переменного по линиям

$$\Im m\, z = 0, \; -\infty < \operatorname{Re} z \leq a; \; b \leq \operatorname{Re} z < \infty, \tag{2.30}$$

то в разрезанной таким образом плоскости функции $f_j(z, \varepsilon)$ будут однозначными, принимая при этом разные значения на противоположных берегах разреза (2.30). Это обстоятельство является нежелательным для дальнейших рассуждений. Поэтому вместо функций

$f_j(z,\varepsilon)$ мы будем рассматривать функции

$$f_{j1}(z,\varepsilon)=\frac{\varphi(z)}{2}\Big[\tilde{F}_j(z,\vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon)+$$

$$+\tilde{F}_j(z,-\vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon)\Big],$$

$$f_{j2}(z,\varepsilon)=\frac{\varphi(z)}{2\sqrt{(z-a)(z-b)}}\Big[\tilde{F}_j(z,\vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon)-$$

$$-\tilde{F}_j(z,-\vec{\lambda}\sqrt{(z-a)(z-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\Big].$$

Тогда

$$f_j(z,\varepsilon)=f_{j1}(z,\varepsilon)+\sqrt{(z-a)(z-b)}\,f_{j2}(z,\varepsilon). \qquad (2.31)$$

Заметим, что в силу свойства I. функции $\varphi(z)$, введенные функции $f_{ji}(z,\varepsilon)$, $j=\tau,a$, $i=1,2$ является аналитическими функциями при всех z, кроме линии разреза (2.27). Далее, так как выполнено условие (2.26), то из леммы II и из свойства 2. функции $\varphi(z)$ имеют место оценки при всех $\varepsilon>0$

$$\left|f_{ji}(z,\varepsilon)\right|\le\frac{c(\varepsilon)}{1+|z|}; \qquad (2.32)$$

причем, считаем при $\Im m\, z\geqslant 0$ $j=\tau$ и при $\Im m\, z\leqslant 0$ $j=a$. Принимая во внимание (2.32), по теореме Коши получим

$$f_{ji}(z,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{\tau i}(\xi+0,\varepsilon)-f_{ai}(\xi-0,\varepsilon)}{\xi-z}\,d\xi,$$

полагая при $\Im m\, z > 0$ $j=\tau$ и при $\Im m\, z < 0$, $j=a$.
Принимая во внимание (2.31), получим далее

$$f_{ji}(z,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{\tau 1}(\xi+0,\varepsilon)-f_{a1}(\xi-0,\varepsilon)}{\xi-z}\,d\xi+$$

$$\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{\tau 2}(\xi+0,\varepsilon)-f_{a2}(\xi-0,\varepsilon)}{\xi-z}\,d\xi.$$

Продолжим теперь наши рассуждения, полагая в последнем равенстве $z=k_0'+\rho e^{i\theta_0}$. При этом считаем $j=\tau$ при $q_0'+\rho\sin\theta_0>0$ и $j=a$ при $q_0'+\rho\sin\theta_0<0$.
Принимая во внимание (2.23) и свойства функции $\varphi(z)$, получим

$$\tilde{\mathcal{F}}\left[k_0'+\rho e^{i\theta_0},\vec{\lambda}\sqrt{(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-a)(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi i\,\varphi(k_0'+\rho e^{i\theta_0})}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\tilde{\mathcal{F}}_\tau\left[\xi,\vec{\lambda}\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]\varphi_\tau(\xi)-\tilde{\mathcal{F}}_a\left[\xi,\vec{\lambda}\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}+\right.$$

$$\left.+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]\varphi_a(\xi)+\tilde{\mathcal{F}}_\tau\left[\xi,-\vec{\lambda}\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]\varphi_\tau(\xi)-$$

$$-\tilde{\mathcal{F}}_a\left[\xi,-\vec{\lambda}\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]\varphi_a(\xi)\Big\}\frac{d\xi}{\xi-k_0'-\rho e^{i\theta_0}}+\qquad(2.33)$$

$$+\frac{\sqrt{(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-a)(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-b)}}{4\pi i\,\varphi(k_0'+\rho e^{i\theta_0})}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\tilde{\mathcal{F}}_\tau\left[\xi,\vec{\lambda}\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]\varphi_\tau(\xi)-$$

$$-\tilde{\mathcal{F}}_a\left[\xi,\vec{\lambda}\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]\varphi_a(\xi)-\tilde{\mathcal{F}}_\tau\left[\xi,-\vec{\lambda}\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}+\right.$$

$$\left.+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]\varphi_\tau(\xi)+\tilde{\mathcal{F}}_a\left[\xi,-\vec{\lambda}\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}+\vec{\mu},\alpha,\varepsilon\right]\varphi_a(\xi)\Big\}\frac{d\xi}{(\xi-k_0'-\rho e^{i\theta_0})\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}.$$

Принимая во внимание (2.24), получим из (2.33)

$$\tilde{F}_j(k_0'+\rho e^{i\theta_0}, \vec{k}'+\vec{\nu}+\rho e^{\overrightarrow{i\theta}}, \alpha, \varepsilon)=$$

$$=\sum_{\substack{i=\tau,a\\ \varkappa=\pm 1}}\int_{-\infty}^{\infty} F_i\left[\xi, \vec{q}_H(\xi,\theta)+\vec{\nu}, \alpha, \varepsilon\right]\frac{\Psi_{iH}(\xi,\theta_0)}{\xi-k_0'-\rho e^{i\theta_0}}\,d\xi+ \tag{2.34}$$

$$+\sum_{H=\pm 1}\int_{a-\eta}^{b+\eta} f\left[\xi, \vec{q}_H(\xi,\theta)+\vec{\nu}, \alpha, \varepsilon\right]\frac{\Psi_H(\xi,\theta_0)}{\xi-k_0'-\rho e^{i\theta_0}}\,d\xi,$$

где, в силу (2.25) и (2.28),

$$\Psi_{iH}(\xi,\theta_0)=\left[1+H\sqrt{\frac{(k_0'+\rho e^{i\theta}-a)(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-b)}{(\xi-a)(\xi-b)}}\right]\frac{\varphi_i(\xi)h(\xi)}{4\pi i\varphi(k_0'+\rho e^{i\theta_0})}; \tag{2.35}$$

$$\Psi_H(\xi,\theta_0)=\left[1+H\sqrt{\frac{(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-a)(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-b)}{(\xi-a)(\xi-b)}}\right]\frac{\varphi(\xi)[1-h(\xi)]}{4\pi i\varphi(k_0'+\rho e^{i\theta_0})}; \tag{2.36}$$

$$\vec{q}_H(\xi,\theta)=\vec{p}'+\rho\,\overrightarrow{\cos\theta}+(\vec{q}'+\rho\,\overrightarrow{\sin\theta}).$$

$$\times\frac{H\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}-\mathrm{Re}\sqrt{(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-a)(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-b)}}{\mathrm{Im}\sqrt{(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-a)(k_0'+\rho e^{i\theta_0}-b)}}. \tag{2.37}$$

Функция $h'(\xi)$ бесконечно дифференцируемая и такая, что

$$h(\xi)=1 \quad \text{при } \xi < a-\eta, \quad \xi > b+\eta;$$

$$h(\xi)=0 \quad \text{при } a-\frac{\eta}{2} < \xi < b+\frac{\eta}{2}. \tag{2.38}$$

Принимая во внимание (2.34), получим из (2.20) при всех $k \in G(k')$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_j(k,\alpha,\varepsilon)=\sum_{\substack{i=\tau,a\\ H=\pm 1}} \int \tilde{\mathfrak{F}}_i\left[\xi,\vec{q}_H(\xi,\theta_0)+\vec{\nu},\alpha,\varepsilon\right]$$

$$\times\frac{\Psi_{iH}(\xi,\theta_0)W(k,\vec{\nu},\theta)}{\xi-P_0'-\rho e^{i\theta_0}}\,d\theta\,d\xi\,d\vec{\nu}+\sum_{H=\pm 1}\int_{0\le\theta_s\le 2\pi}\int_{|\nu_s|\le\frac{\rho}{3}}$$

$$\int_{a-\eta}^{b+\eta}\tilde{f}\left[\xi,\vec{q}_H(\xi,\theta)+\vec{\nu},\alpha,\varepsilon\right]\frac{\Psi_H(\xi,\theta_0)W(k,\vec{\nu},\theta)}{\xi-P_0'-\rho e^{i\theta_0}}\,d\xi\,d\vec{\nu}\,d\theta+ \tag{2.39}$$

$$+T_j(k,\alpha,\varepsilon)$$

Теперь отметим, что в силу (2.19), (2.35) и (2.37), функции

$$\tilde{H}_{iH}(k,P'')=\int_{0\le\theta_s\le 2\pi}\frac{\xi\Psi_{iH}(P_0'',\theta_0)W\left[k,\vec{P}''-\vec{g}_H(P_0'',\theta),\theta\right]}{P_0''-k_0'-\rho e^{i\theta_0}}\,d\theta,$$
$$i=\tau,a \quad H=\pm 1 \tag{2.40}$$

при каждом P'' аналитические относительно k в области $G(k')$ и при каждом k из $G(k')$ принадлежат пространству Φ_N, если только число N_1, фигурирующее в (2.29), выбрано достаточно большим. Действительно, знаменатель в (2.40) может обратиться в нуль только при

$$p_0'' = p_0' + \rho \cos\theta_0, \quad q_0' + \rho \sin\theta_0 = 0. \tag{2.41}$$

Так как $k' = (p_0' + i q_0', \vec{k}') \in \mathcal{K}$, то из (2,41) следует, что при достаточно малом ρ точки

$$(p_0' + \rho\cos\theta_0, \ \vec{k}' + \vec{\nu} + \rho e^{i\vec{\theta}}) \in \mathcal{K}_1^*.$$

Но тогда из (2.10) и (2.41) следует, что точки p_0'' , в которых знаменатель в (2.40) может обратиться в нуль, заключены в интервале $[a+\eta, \ b-\eta]$. На этот интервал фактически исключается множителем $h(p_0'')$ (см. (2.38)), входящим в выражения $\psi_{iH}(p_0'', \rho\theta_0)$; функции $\vec{q}_H(p_0'', \theta)$ при этом будут вещественными. Принимая во внимание сказанное, имеем при $\varepsilon \to +0$

$$\int \tilde{\mathfrak{F}}_j \left[\xi, \vec{q}_H(\xi, \theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon\right] \psi_{jH}(\xi, \theta_0) \frac{W(k, \vec{\nu}, \theta)}{\xi - k_0' - \rho e^{i\theta_0}} d\xi\, d\vec{\nu}\, d\theta =$$

$$= \int \tilde{\mathfrak{F}}_j (p'', \alpha, \varepsilon) \tilde{H}_{jH}(k, p'')\, dp'' \to$$

$$\to \int \tilde{\mathfrak{F}}_j (p'') \tilde{\tilde{H}}_{jH}(k, p'')\, dp'' \tag{2.42}$$

равномерно для всех $k \in G(k')$.

Далее, принимая во внимание (2.36) и (2.37), при всех $\vec{\nu}, |\nu_s| \le \frac{\rho}{3}$, и $\theta, 0 \le \theta_s \le 2\pi$, получим неравенство

$$\left| \int_{a-\eta}^{b+\eta} \tilde{f}\left[\xi, \vec{q}_H(\xi,\theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon\right] \frac{\psi_H(\xi,\theta_0)}{\xi - k_0' - \rho e^{i\theta_0}} \, d\xi \right| \le$$

$$\le C_1 \sup_{a-\eta \le \xi \le b+\eta} \left| \tilde{f}\left[\xi, \vec{q}_H(\xi,\theta) + \vec{\nu}, \alpha, \xi\right] \right| +$$

$$+ C_2 \sup_{a+\eta \le \xi \le b-\eta} \left| \frac{d\tilde{f}}{d\xi}\left[\xi, \vec{q}_H(\xi,\theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon\right] \right| .$$

Вспоминая, что точки (2.16) принадлежат $\mathcal{K}_1$, заключаем отсюда и из (2.37), (2.11) и (2.12), что при $\varepsilon \to +0$

$$\left| \iiint_{a-\eta}^{b+\eta} \tilde{f}\left[\xi, \vec{q}_H(\xi,\theta) + \vec{\nu}, \alpha, \varepsilon\right] \frac{\psi_H(\xi,\theta_0) W(k, \vec{\nu}, \theta)}{\xi - k_0' - \rho e^{i\theta_0}} \, d\xi \, d\vec{\nu} \, d\theta \right| \to 0 \tag{2.43}$$

равномерно для всех K из $G(k')$. Из (2.21) и (2.22) следует

$$T_r(k,\alpha,\varepsilon) = 0 \quad \text{при } q_0' \ge \rho; \quad T_a(k,\alpha,\varepsilon) = 0 \quad \text{при } q_0' \le -\rho . \tag{2.44}$$

Пусть теперь

$$k' \in \mathcal{K} \cap \{ |q_0'| \le \rho \} .$$

Тогда при достаточно малом ρ, $\rho < \frac{\delta}{3}$, точки (2.16) будут содержаться в $\mathcal{K}_1^* \times \{ |q_0| \le \delta \}$. Но тогда в силу (2.13), (2.19), (2.21) и (2.22) имеем при $\varepsilon \to +0$

$$|T_j(k,\alpha,\varepsilon)| \to 0 \qquad (2.45)$$

равномерно для всех $k \in G(k')$.

Принимая во внимание (2.42) - (2.45), получим из (2.39) при $\varepsilon \longrightarrow +0$

$$\tilde{\mathcal{F}}_\tau(k,\alpha,\varepsilon) \to \sum_{j=\tau,a} \int \tilde{\mathcal{F}}_j(p'')\tilde{H}_j(k,p'')dp'' \equiv \tilde{\Phi}_\tau(k) \qquad (2.46)$$

равномерно для всех $k \in G(k')$, где $k' \in \mathcal{K} \times \{q_0' \geqslant -\rho\}$;

$$\tilde{\mathcal{F}}_a(k,\alpha,\varepsilon) \to \sum_{j=\tau,a} \int \tilde{\mathcal{F}}_j(p'')\tilde{H}_j(k,p'')dp'' \equiv \tilde{\Phi}_a(k) \qquad (2.47)$$

равномерно для всех $k \in G(k')$, где $k' \in \mathcal{K} \cap \{q_0' \leqslant \rho\}$.

В (2.46) и (2.47) обозначено

$$\tilde{H}_j(k,p'') = \tilde{H}_{j+}(k,p'') + \tilde{H}_{j-}(k,p''). \qquad (2.48)$$

Покрывая компакт $\mathcal{K}$ конечным числом окрестностей $G(k')$, видим из (2.46) и (2.47), что последовательность аналитических по К функций $\tilde{\mathcal{F}}_j(k,\alpha,\varepsilon)$ равномерно сходится к аналитической (теорема Вейерштрасса) функции $\tilde{\Phi}_j(k)$ соответственно при $j=\tau$ на компакте $\mathcal{K} \cap \{q_0' \geqslant -\rho\}$ и при $j=a$ на компакте $\mathcal{K} \cap \{q_0' \leqslant \rho\}$. Так как упомянутые компакты имеют непустое пересечение и компакт $\mathcal{K}$ произвольный в $G(a,b)$, то отсюда заключаем о существовании единой аналитической в $G(a,b)$ функции $\tilde{\Phi}(k)$ такой, что

$$\tilde{\Phi}(k) = \tilde{\Phi}_\tau(k) \ \text{при} \ q_0 \geqslant 0 \ ; \quad \tilde{\Phi}(k) = \tilde{\Phi}_a(k) \ \text{при} \ q_0 \leqslant 0 . \qquad (2.49)$$

Теперь докажем равенства (2.4). Пусть точки $P=(P_0,\vec{P})$ принадлежат

$$\mathcal{K}\cap\{q_0=0,\ \vec{q}=\vec{0}\}.$$

Тогда из (2.7) следует, что

$$\mathcal{K}\cap\{q_0=0,\ \vec{q}=\vec{0}\}\subset G^0\cap G(a,b).$$

Следовательно, по условию теоремы имеем при этих P, когда $\varepsilon\to+0$,

$$\tilde{\mathcal{F}}_j(P,\alpha,\varepsilon)\to\tilde{\mathcal{F}}_r(P)=\tilde{\mathcal{F}}_a(P), \tag{2.50}$$

причем, стремление к пределу имеет место в слабом смысле. Принимая во внимание (2.46), (2.47) и (2.49), получаем из (2.50)

$$\tilde{\Phi}(P)=\tilde{\Phi}_r(P)=\tilde{\Phi}_a(P)=\tilde{\mathcal{F}}_r(P)=\tilde{\mathcal{F}}_a(P)$$

при всех P из $\mathcal{K}\cap\{q_0=0,\vec{q}=\vec{0}\}$. Так как компакт $\mathcal{K}$ произвольный, то из (2.7) следует, что равенства (2.4) имеют место для всех P из

$$G(a,b)\cap\{q_0=0,\ \vec{q}=\vec{0}\}. \tag{2.51}$$

Так как область G есть сумма областей $G(a,b)$, то теорема справедлива и для всей области G. При этом в силу (2.7) и (2.51), равенства (2.4) имеют место при P из

$$\bigcup_{a<b}G(a,b)\cap\{q_0=0,\vec{q}=\vec{0}\}=G\cap\{q_0=0,\vec{q}=\vec{0}\}=G^0.$$

Представление (2.5) в окрестности $G(K')$ следует из соотношений (2.46), (2.47) и (2.49). Теорема доказана полностью. К доказанной теореме сделаем несколько замечаний.

Замечание I. Область аналитичности функции $\tilde{\Phi}(k)$ можно расширить, прибавляя к области G еще область

$$|\vec{q}|<|q_0|. \tag{2.52}$$

Действительно, очевидно, функции

$$\tilde{\mathcal{F}}_j(k)=\int \mathcal{F}_j(x)e^{ikx}dx, \quad j=\tau, a$$

аналитические соответственно в областях $q_0>|\vec{q}|$ при $j=\tau$ и $q_0<-|\vec{q}|$ при $j=a$ x). Если пересечение области G с областью (2.52) не пусто, то область аналитичности функции $\tilde{\Phi}(k)$ есть

$$G+\{|\vec{q}|<|q_0|\}.$$

Замечание II. Из доказательства теоремы I следует общий алгоритм для вычисления области аналитичности в случае произвольной области G^0. Пусть даны две обобщенные функции $\mathcal{F}_\tau(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$, обращающиеся в нуль соответственно в областях $x \lesssim 0$ и $x \gtrsim 0$, и пусть

$$\tilde{\mathcal{F}}_\tau(p)-\tilde{\mathcal{F}}_a(p)=0 \text{ в области } G^0.$$

Для области G^0 вычисляем область G^*, аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы I. Пусть область G^* определяется совокупностью уравнений $\varphi_i(p_0,\vec{p},\vec{q})>0,$

---

x) Здесь уместно упомянуть о примыкающих сюда результатах Бохнера ([II], гл.VI, § 8), касающихся аналитического продолжения функций из $\mathcal{L}_2$, преобразование Фурье которых обращается в нуль вне выпуклого конуса.

где φ_i – непрерывные функции своих аргументов. Тогда соответствующая область аналити~~чески~~ности будет суммой областей $G(a, b)$, где

$$G(a,b)\left\{\begin{array}{l} |\vec{q}| < \left|\mathrm{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right| \\ \varphi_i\left(\xi, \vec{p}-\vec{q}\,\dfrac{\mathrm{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\mathrm{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}, \vec{q}\,\dfrac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{\mathrm{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\right) > 0, a \le \xi \le b \end{array}\right\}.$$

Замечание III. Нетрудно получить, пользуясь предыдущим замечанием, следующий результат (/12/, Математическое дополнение): пусть функции $\mathcal{F}_j(x)$ удовлетворяют условиям замечания II и область G^0 есть шар радиуса r с центром в точке $p = 0$. Тогда существует функция $\tilde{\Phi}(k)$, аналитическая в области

$$|k_s| < \rho, \quad s = 0, 1, 2, 3,$$

(ρ – некоторое число, меньшее r) такая, что

$$\tilde{\Phi}(p) = \tilde{\mathcal{F}}_j(p), \quad |p_s| < \rho.$$

Функция $\tilde{\Phi}(k)$ представима в виде

$$\tilde{\Phi}(k) = \sum_{j=r,a} \int \tilde{\mathcal{F}}_j(p')\tilde{H}_j(k, p')\,dp',$$

где $\tilde{H}(k, p')$ – аналитическая функция К в области $|k_s| < \rho$.

Замечание IV. Из предыдущего замечания получаем такой результат: если функции $\mathcal{F}_j(x)$ удовлетворяют условиям замечания II, то для любого компактного множества, лежащего в G^0, существует функция $\tilde{\Phi}(k)$, аналитическая в области

$$\mathcal{K}^0 \times \left\{|q_0| \le \delta, |\vec{q}| \le \delta\right\},$$

где δ – некоторое положительное число, зависящее от $\mathcal{K}^0$, и такая, что

$$\tilde{\Phi}(p) = \tilde{\mathcal{F}}_j(p), \quad p \in \mathcal{K}^0.$$

Замечание У. Из теоремы I, в частности, при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ получается следующий результат (/2/, Математическое дополнение). Пусть обобщенные функции $\mathcal{F}_j(x)$, $j = r, a$ обладают следующими свойствами:

$$\mathcal{F}_r(x) = 0, \quad \text{если } x \not\gtrsim 0; \qquad \mathcal{F}_a(x) = 0, \quad \text{если } x \not\lesssim 0;$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(p) - \tilde{\mathcal{F}}_a(p) = 0, \quad \text{если} \quad a < p_0 < b.$$

Тогда существует функция $\tilde{\Phi}(k)$, аналитическая в области

$$|\Im m\, \vec{k}| < |\Im m \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}|$$

такая, что при всех $p = (p_0, \vec{p})$, для которых $a < p_0 < b$, имеют место равенства

$$\tilde{\Phi}(p) = \tilde{\mathcal{F}}_r(p) = \tilde{\mathcal{F}}_a(p).$$

Замечания УI. Пусть выполнены условия теоремы I.

I. Фиксируем вещественное p_3 и воспользуемся замечанием У. Тогда можно утверждать, что соответствующая функция $\tilde{\Phi}(k_0, k_1, k_2, k_3)$ аналитична относительно (k_0, k_1, k_3) в области

$$|\Im m\, k_1|^2 + |\Im m\, k_2|^2 < \Im m \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}\,|^2,$$

где

$$a = c_1 - \sqrt{\gamma_1^2 p_3^2 + c_2^2}, \quad b = c_3 + \sqrt{\gamma_2^2 p_3^2 + c_4^2}.$$

Замечание УП. Можно доказать следующее утверждение. Пусть обобщенные функции $\mathfrak{F}_j$ удовлетворяют условиям теоремы I и, сверх того, обладают инвариантностью по отношению к группе пространственных вращений. Тогда область аналитичности функции $\tilde{\Phi}(k)$ есть

$$\left|\Im m\,\vec{k}\right| < \left|\Im m\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|,$$

где

$$a = c_1 - \sqrt{\gamma_1^2 T^2 + c_2^2}, \quad b = c_3 + \sqrt{\gamma_2^2 T^2 + c_4^2},$$

$$T^2 = (\mathrm{Re}\,k)^2 - \frac{(\mathrm{Re}\,\vec{k}\ \Im m\,\vec{k})^2}{(\Im m\,\vec{k})^2} \quad \text{при } \Im m\,\vec{k} \neq \vec{0},$$

$$T^2 = (\mathrm{Re}\,\vec{k})^2 \quad \text{при } \Im m\,\vec{k} = \vec{0},$$

Для доказательства необходимо фиксировать $T^2 = P_3^2$, применить замечания IУ и УI и учесть групповое свойство функций, которые зависят от $\vec{P}$ только посредством $\vec{P}^2$.

§ 3.

Теперь применим теорему I к доказательству теоремы II.

Теорема II.

Пусть даны четыре обобщенные функции

$$\mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t), \quad x_1 = (x_{10}, \vec{x}_1), \quad x_2 = (x_{20}, \vec{x}_2), \quad i, j = \tau, a,$$

инвариантные по отношению к пространственным вращениям и удовлетворяющие, кроме того, условиям:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\tau\tau}(x_1,x_2,t)=0, && \text{если} \quad x_1\leq 0, && \text{или} \quad x_2\leq 0,\\
&\mathcal{F}_{\tau a}(x_1,x_2,t)=0, && \text{если} \quad x_1\leq 0, && \text{или} \quad x_2\geq 0,\\
&\mathcal{F}_{a\tau}(x_1,x_2,t)=0, && \text{если} \quad x_1\geq 0, && \text{или} \quad x_2\leq 0,\\
&\mathcal{F}_{aa}(x_1,x_2,t)=0, && \text{если} \quad x_1\geq 0, && \text{или} \quad x_2\geq 0;
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{F}}_{\tau j}(p_1,p_2,t)-\tilde{\mathcal{F}}_{aj}(p_1,p_2,t)=0, && \text{если} \quad p_1\in \overset{0}{G}_t, \quad j=\tau,a,\\
&\tilde{\mathcal{F}}_{i\tau}(p_1,p_2,t)-\tilde{\mathcal{F}}_{ia}(p_1,p_2,t)=0, && \text{если} \quad p_2\in \overset{0}{G}_t, \quad i=\tau,a;
\end{aligned}
\qquad (3.2)
$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(p_1,p_2,t)=0 \ \text{если} \quad t<\frac{1}{2}(M+\mu), \qquad (3.3)$$

где область $\overset{0}{G}_t$ есть множество точек $p=(p_0,\vec{p})$, удовлетворяющих неравенствам

$$\overset{0}{G}_t\ \left\{(p_0+t)^2<\vec{p}^{\,2}+(M+\mu)^2,\ (p_0-t)^2<\vec{p}^{\,2}+9\mu^2\right\}, \qquad (3.4)$$

и M и μ - некоторые положительные числа, причем,

$$M>2\mu. \qquad (3.5)$$

Тогда при каждом $V\leq\mu^2$ существует число $\rho>0$ и функция $\tilde{\Phi}(z_1,z_2,\dots,z_5,t)$, которая является обобщенной относительно t и аналитической относительно $z=(z_1,z_2,\dots z_5)$ в области Z_0,

$$z_0: \left\{ \begin{array}{l} |z_1 - M^2| \le \rho\mu^2, \ |z_2 - M^2| \le \rho\mu^2, |z_3 - \tau| \le \rho\mu^2, |z_4 - \tau| \le \rho\mu^2, \\ |z_5 - \alpha^2| \le \rho^2\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2, \ V \le \tau \le \mu^2, \ 0 \le \alpha \le 2\sqrt{\varepsilon}\mu \end{array} \right\}$$

причем, в области вещественных p_1 и p_2, для которых точки $z = (z_1, z_2, \dots, z_5)$:

$$z_1 = (p_{10}+t)^2 - \vec{p}_1^{\,2}, \ z_2 = (p_{20}+t)^2 - \vec{p}_2^{\,2}, \ z_3 = (p_{10}-t)^2 - \vec{p}_1^{\,2},$$

$$z_4 = (p_{20}-t)^2 - \vec{p}_2^{\,2}, \ z_5 = (p_{10} - p_{20})^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2$$

лежат в области z_0, имеет место равенство

$$\tilde{\Phi}(z,t) = \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(p_1, p_2, t), \ i,j = r,a. \qquad (3.6)$$

Кроме того,

$$\tilde{\Phi}(z,t) = 0 \quad \text{при} \quad t < \frac{1}{2}(M+\mu). \qquad (3.7)$$

<u>Доказательство.</u>

Докажем теорему в предположении, что обобщенные функции $\mathfrak{F}_{ij}$ непрерывны и полиномиально ограничены относительно t. Рассматривая обобщенные функции $\mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t)$ как обобщенные относительно (x_1, x_2) функции, зависящие от параметра t, мы видим, что порядки этих обобщенных функций ограничены числом, не зависящим от t. Пусть $\varphi(x_2)$ – произвольная основная функция. Тогда обобщенные относительно x_1 функции

$$\mathfrak{F}_{ij}(x_1, t) = \int \mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t)\varphi(x_2)dx_2, \ i,j = r,a \qquad (3.8)$$

обладают в силу (3.I) - (3.3) свойствами:

$$\mathfrak{F}_{rj}(x_1,t)=0,\ \text{если}\ x_1\leq 0;\quad \mathfrak{F}_{aj}(x_1,t)=0,\ \text{если}\ x_1\geq 0;$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{rj}(P_1,t)-\tilde{\mathfrak{F}}_{aj}(P_1,t)=0,\ \text{если}\ P_1\in \overset{0}{G}_t;$$

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1,t)=0,\ \text{если}\ t<\frac{1}{2}(M+\mu).$$

Кроме того, порядки обобщенных функций $\tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1,t)$ ограничены числом, не зависящим от t и $\varphi(x_2)$. Условия теоремы I выполнены. Следовательно, существуют функции $\tilde{\Phi}_j(k_1,t)$ аналитические относительно k в области G_t, и такие, что

$$\tilde{\Phi}_j(P_1,t)=\tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1,t),\ \text{если}\ P_1\in \overset{0}{G}_t; \tag{3.9}$$

$$\tilde{\Phi}_j(k_1,t)=0,\quad t<\frac{1}{2}(M+\mu). \tag{3.10}$$

В окрестности каждой точки области G_t функции $\tilde{\Phi}_j(k_1,t)$ представимы в виде

$$\tilde{\Phi}_j(k_1,t)=\sum_{i=r,a}\int\tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1',t)\tilde{H}_i(k_1,P_1')\,dP_1', \tag{3.11}$$

где функции $\tilde{H}_i(k_1,P_1')$ не зависят от $\varphi(x_2)$ и t и обладают свойствами, сформулированными в теореме I. Докажем, что функции $\tilde{H}_i(k_1,P_1')$ в (3.II) действительно могут быть выбраны не зависящими от t. Пусть окрестность $G(k')$ точки k'

принадлежит области G_{t_1}, $t_1 > \frac{1}{2}(M+\mu)$, и в этой окрестности имеет место представление

$$\tilde{\Phi}_j(k_1,t) = \sum_{i=\tau,a} \int \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(p_1',t)\tilde{H}_i(k_1,p_1',t_1)\,dp_1'$$

Теперь рассмотрим t из промежутка

$$\left[\frac{1}{2}(M+\mu), t_1\right].$$

Так как при $t \geq \frac{1}{2}(M+\mu)$ области G_t^0 и G_t монотонно убывают с возрастанием t, то

$$G(k') \subset G_t\,, \quad \frac{1}{2}(M+\mu) \leq t \leq t_1\,.$$

Так как порядки обобщенных функций $\tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(p_1,t)$ ограничены числом, не зависящим от t, а функции $\tilde{H}_i$ "универсальные", то, полагая,

$$\tilde{H}_i(k_1,p_1',t) = \tilde{H}_i(k_1,p_1',t_1), \quad \frac{1}{2}(M+\mu) \leq t \leq t_1\,,$$

видим, что функции

$$\tilde{\Phi}_j(k_1,t) = \sum_{i=\tau,a} \int \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(p_1',t)\tilde{H}_i(k_1,p_1',t)\,dp_1', \quad t \leq t_1$$

удовлетворяют требуемым условиям в окрестности $G(k')$ и функции $\tilde{H}_i$ не зависят от t при $t \leq t_1$. Согласно теореме I в нашем случае область G_t представляет собой соединение областей $G_t(a,b)$,

$$G_t = \bigcup_{a<b} G_t(a,b)\,,$$

где $G(a,b)$ есть множество комплексных точек $k = (k_0, \vec{k}) = (p_0 + iq_0, \vec{p} + i\vec{q})$, удовлетворяющих неравенству

$$|\vec{q}| < |\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|\,, \tag{3.12}$$

а также обладающих тем свойством, что при всех $\xi, a \le \xi \le b$, выполнены неравенства

$$(\xi+t)^2 < e\left\{\left|\vec{p}-\vec{q}\,\frac{Re\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{Jm\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\right|-\frac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{\left|Jm\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|}\left|\vec{q}\right|\right\}+(M+\mu)^2,$$

$$(\xi-t)^2 < e\left\{\left|\vec{p}-\vec{q}\,\frac{Re\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{Jm\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\right|-\frac{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}}{\left|Jm\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|}\left|\vec{q}\right|\right\}+9\mu^2. \tag{3.13}$$

Из (3.8)-(3.11) следует, что существуют функции $\tilde{\Phi}_j(k_1, x_2, t)$, аналитические относительно k_1 в G_t и обобщенные относительно x_2, и также, что

$$\tilde{\Phi}_j(p_1, x_2, t) = \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(p_1, x_2, t), \quad \text{если } p_1 \in \overset{\circ}{G}_t, \tag{3.14}$$

$$\tilde{\Phi}_j(k_1, x_2, t) = 0, \quad \text{если } t < \frac{1}{2}(M+\mu), \tag{3.15}$$

$$\tilde{\Phi}_j(k_1, x_2, t) = \sum_{i=\tau,a}\int \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(p_1', x_2, t)\tilde{H}_i(k_1, p_1')\,dp_1'. \tag{3.16}$$

Кроме того, из (3.1), (3.2), (3.15) и (3.16) имеем при всех $k_1 \in G_t$

$$\tilde{\Phi}_\tau(k_1, x_2, t) = 0, \text{ если } x_2 \le 0, \quad \tilde{\Phi}_a(k_1, x_2, t) = 0, \text{ если } x_2 \ge 0;$$

$$\tilde{\Phi}_\tau(k_1, p_2, t) - \tilde{\Phi}_a(k_1, p_2, t) = 0, \text{ если } p_2 \in \overset{\circ}{G}_t;$$

$$\tilde{\Phi}_j(k_1, p_2, t) = 0, \text{ если } t < \frac{1}{2}(M+\mu),$$

причем, порядки обобщенных функций $\tilde{\Phi}_j(k_1, P_2, t)$ ограничены числом, не зависящим от k_1 и t. Поэтому условия теоремы I выполнены. Значит, существует функция $\tilde{\Phi}(k_1, k_2, t)$, аналитическая относительно k_2 в области G_t при каждом k_1 из G_t, такая, что

$$\tilde{\Phi}(k_1, P_2, t) = \tilde{\Phi}_j(k_1, P_2, t), \text{ если } P_2 \in \overset{0}{G_t}; \tag{3.17}$$

$$\tilde{\Phi}(k_1, k_2, t) = 0 \quad \text{при } t < \frac{1}{2}(M+\mu); \tag{3.18}$$

$$\tilde{\Phi}(k_1, k_2, t) = \sum_{j=r,a} \int \tilde{\Phi}_j(k_1, P_2', t)\tilde{H}_j(k_2, P_2')\,dP_2' \tag{3.19}$$

Равенства (3.14)-(3.19) показывают, что при каждом t существует функция $\tilde{\Phi}(k_1, k_2, t)$, аналитическая относительно (k_1, k_2) в области $G_t \times G_t$, и такая, что

$$\tilde{\Phi}(P_1, P_2, t) = \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1, P_2, t), \text{ если } (P_1, P_2) \in \overset{0}{G_t} \times \overset{0}{G_t}, \tag{3.20}$$

причем, в окрестности любой точки области $G_t \times G_t$ имеет место интегральное представление

$$\tilde{\Phi}(k_1, k_2, t) = \sum_{i,j=r,a} \int \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1', P_2', t)\tilde{H}_i(k_1, P_1')\tilde{H}_j(k_2, P_2')\,dP_1'\,dP_2'. \tag{3.21}$$

Воспользуемся теперь условием инвариантности по отношению к пространственным вращениям. Ввиду этого условия функции

$$\mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t), \ \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1, P_2, t)$$

также обладают свойством инвариантности относительно пространственных вращений. Следовательно, функция $\tilde{\Phi}(K_1, K_2, t)$ зависит от (K_1, K_2) лишь посредством пяти переменных

$$K_{10},\ K_{20},\ \vec{K}_1^{\,2},\ \vec{K}_2^{\,2},\ \vec{K}_1\vec{K}_2 .$$

Вместо них мы можем ввести эквивалентную систему переменных $z=(z_1, z_2, \dots, z_5)$, положив

$$z_1=(K_{10}+t)^2-\vec{K}_1^{\,2},\quad z_2=(K_{20}+t)^2-\vec{K}_2^{\,2},\quad z_3=(K_{10}-t)^2-\vec{K}_1^{\,2},$$

$$z_4=(K_{20}-t)^2-\vec{K}_2^{\,2},\quad z_5=(K_{10}-K_{20})^2-(\vec{K}_1-\vec{K}_2)^2, \tag{3.22}$$

так что

$$\tilde{\Phi}(K_1,K_2,t)=\tilde{\Phi}(K_{10},K_{20},\vec{K}_1^{\,2},\vec{K}_2^{\,2},\vec{K}_1\vec{K}_2,t)=\tilde{\Phi}(z,t). \tag{3.23}$$

Из (3.22) получаем

$$K_{10}=\frac{z_1-z_3}{4t},\quad K_{20}=\frac{z_2-z_4}{4t},$$

$$\vec{K}_1^{\,2}=t^2-\frac{z_1+z_3}{2}+\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2,\quad \vec{K}_2^{\,2}=t^2-\frac{z_2+z_4}{2}+\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2, \tag{3.24}$$

$$(\vec{K}_1-\vec{K}_2)^2=-z_5+\left(\frac{z_1-z_2-z_3-z_4}{4t}\right)^2.$$

Пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ два произвольных взаимно перпендикулярных единичных вектора. Тогда векторы $\vec{K}_1$ и $\vec{K}_2$ могут быть представлены в виде

$$\vec{k}_1 = A(z,t)\vec{e}_1 + C(z,t)\vec{e}_2\,, \quad \vec{k}_2 = B(z,t)\vec{e}_1 - C(z,t)\vec{e}_2\,, \tag{3.25}$$

где, в силу (3.24), функции A, B и C удовлетворяют соотношениям

$$A^2+C^2=t^2-\frac{z_1+z_3}{2}+\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2, \quad B^2+C^2=t^2-\frac{z_2+z_4}{2}+\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2,$$

$$(A-B)^2+4C^2=-z_5+\left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2.$$

Это дает

$$\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\sqrt{4t^2-z_1-z_2-z_3-z_4+z_5+2\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2+2\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2-\left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2}\,\pm$$

$$\pm\frac{\dfrac{z_2+z_4-z_1-z_3}{2}+\left(\dfrac{z_1-z_3}{4t}\right)^2-\left(\dfrac{z_2-z_4}{4t}\right)^2}{2\sqrt{4t^2-z_1-z_2-z_3-z_4+z_5+2\left(\dfrac{z_1-z_3}{4t}\right)^2+2\left(\dfrac{z_2-z_4}{4t}\right)^2-\left(\dfrac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2}}\,;$$

$$C^2=\frac{1}{4}\left\{-z_5+\left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{\left[\dfrac{z_2+z_4-z_1-z_3}{2}+\left(\dfrac{z_1-z_3}{4t}\right)^2-\left(\dfrac{z_2-z_4}{4t}\right)^2\right]^2}{4t^2-z_1-z_2-z_3-z_4+z_5+2\left(\dfrac{z_1-z_3}{4t}\right)^2+2\left(\dfrac{z_2-z_4}{4t}\right)^2-\left(\dfrac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2}\right\}. \tag{3.26}$$

Обозначая $z^0=(M^2, M^2, \tau, \tau, -\alpha^2)$, получаем из (3.26)

$$A(z^0,t)=B(z^0,t)=\varphi(t,\tau,\alpha)=\sqrt{\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2-\frac{\alpha^2}{4}}\,,$$

$$C(z^0,t)=\frac{\alpha}{2}\,; \tag{3.27}$$

Докажем теперь следующее предположение: при достаточно малом ρ преобразование (3.24)-(3.25) преобразует область Z_0 в область $G_t\times G_t$ при $t\geqslant\frac{1}{2}(M+\mu)$. Рассмотрим сначала случай, когда t, τ и α таковы, что

$$\varphi^2(t,\tau,\alpha)=\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2-\frac{\alpha^2}{4}\geqslant\delta\,, \tag{3.28}$$

где δ - фиксированное положительное число. Из (3.26) и (3.27) следует при условии (3.28), что при всех z из области Z_0 выполнены неравенства

$$|A(z,t)-A(z^0,t)|\leq\frac{c}{t}\rho,\quad |B(z,t)-B(z^0,t)|\leq\frac{c}{t}\rho$$

$$|C(z,t)-C(z^0,t)|=\left|\sqrt{C^2(z,t)}-\sqrt{C^2(z^0,t)}\right|\leq\frac{c}{t}\rho \tag{3.29}$$

В силу (3.24), (3.25), (3.27) и (3.28) достаточно доказать, что область переменных k_1 и k_2, для которых

$$\left|k_{10}-\frac{M^2-\tau}{4t}\right|\leq\frac{c_1}{t}\rho,\quad \left|k_{20}-\frac{M^2-\tau}{4t}\right|\leq\frac{c_1}{t}\rho,$$

$$\left|\vec{k}_1-\varphi(t,\tau,\alpha)\vec{e}_1-\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2\right|\leq\frac{c_1}{t}\rho,\quad \left|\vec{k}_2-\varphi(t,\tau,\alpha)\vec{e}_1+\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2\right|\leq\frac{c_1}{t}\rho,$$

содержится в $G_t \times G_t$. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что точки

$$\left[\frac{M^2-\tau}{4t}+k_0', \ \varphi(t,\tau,\alpha)\vec{e}_1 \pm \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\vec{k}'\right],$$

где $k'=(k_0', \vec{k}')$ комплексный вектор такой, что $|k_0'|\le\frac{\rho_1}{t}$, $|\vec{k}'|\le\frac{\rho_1}{t}$ (ρ_1 достаточно малое положительное число, не зависящее от τ, α и t), содержатся в области

$$G_t(a,b),\ a=\frac{M^2-\tau}{4t}-\frac{2\rho_1}{t}, \quad b=\frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{2\rho_1}{t}. \tag{3.30}$$

Обратимся к неравенствам (3.12) и (3.13), определяющим область $G_t(a,b)$. Замечая, что в нашем случае

$$k_0=\frac{M^2-\tau}{4t}+k_0', \quad \vec{p}^{\,2}=\varphi^2(t,\tau,\alpha)+\frac{\alpha^2}{4}+O(\rho_1)=$$

$$=\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2+O(\rho_1),$$

$$|\vec{q}_1|=|\mathcal{Im}\,\vec{k}'|\le\frac{\rho_1}{t}<\sqrt{3}\,\frac{\rho_1}{t}\le\left|\mathrm{Re}\sqrt{\frac{4\rho_1^2}{t^2}-k_0'^2}\right|=\left|\mathcal{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}\right|,$$

$$\left(\frac{M^2-\tau}{4t}+\frac{2\rho_1}{t}+t\right)^2<(M+\mu)^2+\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2+O(\rho_1),$$

$$\left(\frac{M^2-\tau}{4t}-\frac{2\rho_1}{t}-t\right)^2<9\mu^2+\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2+O(\rho_1),$$

убеждаемся в справедливости неравенства (3.12) и (3.13) при достаточно малом ρ_1, причем, ρ_1 может быть выбрано не зависящим от α, τ и t (ρ_1 зависит от V).

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\varphi^2(t,\tau,\alpha)=\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2-\frac{\alpha^2}{4}\leq\delta; \tag{3.31}$$

откуда

$$t\leq\frac{1}{2}\sqrt{M^2+\frac{\alpha^2}{4}+\delta}+\frac{1}{2}\sqrt{\tau+\frac{\alpha^2}{4}+\delta},\quad \tau\geq-\delta-\frac{\alpha^2}{4}.$$

В этом случае достаточно установить, в силу (3.25), (3.27) и равномерной непрерывности функций A, B и C на любом компактном множестве, что каждая точка компакта

$$\left[\frac{M^2-\tau}{4t},\ \varphi(t,\tau,\alpha)e_1+\frac{\alpha}{2}e_2\right],\ -\delta-\frac{\alpha^2}{4}\leq\tau\leq\mu^2,\quad 0\leq\alpha\leq 2\sqrt{2}\mu \tag{3.32}$$

вместе с некоторой своей окрестностью принадлежит области G_t при каждом t из промежутка

$$\cancel{(M^2, M^2, \tau, \tau-\alpha^2), -\delta-\frac{\alpha^2}{4}\leq\tau\leq\mu^2,\ 0\leq\alpha\leq 2\sqrt{2}\mu}$$
$$\frac{1}{2}(M+\mu)\leq t\leq\frac{1}{2}\sqrt{M^2+\frac{\alpha^2}{4}+\delta}+\frac{1}{2}\sqrt{\tau+\frac{\alpha^2}{4}+\delta}. \tag{3.33}$$

При преобразовании (3.22) компакт (3.32) перейдет в компакт

$$(M^2, M^2, \tau, \tau-\alpha^2),\ -\delta-\frac{\alpha^2}{4}\leq\tau\leq\mu^2,\ 0\leq\alpha\leq 2\sqrt{2}\mu \tag{3.34}$$

Окрестность компакта (3.32) перейдет в соответствующую окрестность компакта (3.34). Покрывая, согласно лемме Бореля-Лебега, компакт (3.34) конечным числом окрестностей, выбираем наименьшую из них и соответствующее число ρ, которое с учетом случая (3.28) и определит область Z_0. Точки (3.32), для которых выполнены неравенства

$$0 \le \varphi^2(t, \tau, \alpha) \le \delta,$$

очевидно, принадлежат области $G_t(a, b)$, где a и b определены в (3.30). Осталось рассмотреть тот случай, когда в (3.31) $\delta = 0$. Мы докажем, что в этом случае точки (3.32) принадлежат более узкой области, чем G_t, а именно:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{q}| < |\Im m \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}|, \\ (\xi + t)^2 < (M+\mu)^2, \ (\xi - t^2) < 9\mu^2, \ a \le \xi \le b \end{array} \right\},$$

т.е.

$$|\vec{q}| < \left| \Im m \sqrt{(k_0 + 3\mu - t)(k_0 - M - \mu + t)} \right|. \tag{3.35}$$

Заметим, что область (3.35) не пуста, если t принадлежит промежутку (3.33). Действительно, тогда

$$t \le \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + 2\mu^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu < \frac{1}{2}(M + 4\mu).$$

В силу (3.31), (3.32) и (3.35) для доказательства достаточно установить справедливость неравенства

$$M^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 < \left(\frac{M^2 - \tau}{4t} - t + 3\mu\right)\left(M + \mu - t - \frac{M^2 - \tau}{4t}\right),$$

при всех t, τ и α, удовлетворяющих неравенствами

$$\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2-\frac{\alpha^2}{4}\leq 0,\quad t\geq\frac{1}{2}(M+\mu),$$
$$\tau\leq\mu^2,\quad 0\leq\alpha\leq 2\sqrt{2}\,\mu. \tag{3.36}$$

Обозначая

$$f(t,\tau,\alpha)=\left(\frac{M^2-\tau}{4t}-t+3\mu\right)\left(M+\mu-t-\frac{M^2-\tau}{4t}\right)-$$
$$-M^2-\frac{\alpha^2}{4}+\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2= \tag{3.37}$$
$$=\frac{M^2-\tau}{4t}(M+2t-2\mu)+2t^2+3\mu(M+\mu)-t(M+4\mu)-M^2-\frac{\alpha^2}{4},$$

имеем

$$\frac{\partial f(t,\tau,\alpha)}{\partial\tau}=-\frac{M-2\mu+2t}{4t}<0 \tag{3.38}$$

в области (3.36). Кроме того, с учетом (3.5) имеем

$$f\left(\frac{M+\mu}{2},\mu^2,\alpha\right)=2\mu^2-\frac{\alpha^2}{4}\geq 0,$$

$$\frac{\partial f(t,\mu^2,\alpha)}{\partial t}=4t-M-4\mu-\frac{(M^2-\mu^2)(M-2\mu)}{4t^2}\geq(M-2\mu)\left(1-\frac{M-\mu}{M+\mu}\right)>0.$$

Последние неравенства показывают, что

$$f(t,\mu^2,\alpha)\geq 0$$

на границе $\tau=\mu^2$ области (3.36), причем знак равенства имеет место в точке $t=\frac{1}{2}(M+\mu)$, $\alpha=2\sqrt{2}\,\mu$. Учитывая (3.38), видим, что для все точек области (3.36), кроме точки

$$t = \frac{1}{2}(M+\mu),\ \tau = \mu^2,\ \alpha = 2\sqrt{2}\,\mu\,. \tag{3.39}$$

Однако, если обратиться к неравенствам (3.12) и (3.13), то увидим, что точки (3.32), соответствующие значениям (3.39) для параметров t , τ и α , лежат вместе со своей окрестностью в области $G_{\frac{1}{2}}(M+\mu)$. Итак область Z_0 является областью аналитичности функции $\tilde{\Phi}(z,t)$ и, в силу (3.18), (3.20), (3.22) и (3.23), имеют место равенства (3,6) и (3.7). Докажем теперь, что построенная функция $\tilde{\Phi}(z,t)$ является обобщенной относительно t . Для этого достаточно доказать, что при всех $z \in Z_0$ функция

$$\tilde{\Phi}\Big(\frac{z_1-z_3}{4t},\ A(z,t)\vec{e}_1+C(z,t)\vec{e}_2,\ \frac{z_2-z_4}{4t},$$

$$B(z,t)\vec{e}_1-C(z,t)\vec{e}_2,\ t\Big) \tag{3.40}$$

является непрерывной относительно t и обобщенной при больших положительных t, $t>C$. Непрерывность по t следует из представления (3.21), а также из (3.23) и (3.24). Для доказательства того, что выражение (3,40) есть обобщенная функция t при $t>C$ достаточно доказать это утверждение для функции

$$\tilde{\Phi}\Big(\frac{M^2-\tau}{4t}+k_{10}',\ \varphi(t,\tau,\alpha)\vec{e}_1+\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\vec{k}_1',$$

$$\frac{M^2-\tau}{4t}+k_{20}',\ \varphi(t,\tau,\alpha)\vec{e}_1-\frac{\alpha}{2}\vec{e}_2+\vec{k}_2',\ t\Big)$$

при всех рассматриваемых τ и α и при

$$|k'_{10}| \leq \frac{\rho_1}{t}, \quad |\vec{k}'_i| \leq \frac{\rho_1}{t}, \quad i = 1,2.$$

Это значит, согласно определению, необходимо доказать, что функция

$$\tilde{\Phi}\Big(\frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{k'_{10}}{t}, \varphi\vec{e}_1 + \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \frac{\vec{k}'_1}{t}, \frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{k'_{20}}{t},$$
$$\varphi\vec{e}_1 - \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \frac{\vec{k}'_2}{t}, t\Big) \tag{3,41}$$

есть обобщенная функция t при всех $|k'_{10}| \leq \rho_1$ и $|\vec{k}'_i| \leq \rho_1$.
Но, по доказанному, функция (3.41) есть аналитическое продолжение обобщенных относительно (P'_1, P'_2) функций

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}\Big(\frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{P'_{10}}{t}, \varphi\vec{e}_1 + \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \frac{\vec{P}'_1}{t}, \frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{P'_{20}}{t},$$
$$\varphi\vec{e}_1 - \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \frac{\vec{P}'_2}{t}, t\Big). \tag{3.42}$$

Принимая во внимание, что в силу (3.27) функция $\varphi(t,\tau,\alpha)$ при $t > c$ бесконечно дифференцируема и полиномиально ограничена со всеми своими производными по t, а также полиномиальную ограниченность функций $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(P_1, P_2, t)$ по t, заключаем, что функции (3.42) являются обобщенными относительно (P_1, P_2, t) при $t > c$. Следовательно, их аналитическое продолжение (3.41) является обобщенной функцией t, причем, в силу замечания Ш к теореме I,

$$\tilde{\Phi}\Big(\frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{k'_{10}}{t}, \varphi\vec{e}_1 + \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \frac{\vec{k}'_1}{t}, \frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{k'_{20}}{t},$$
$$\varphi\vec{e}_1 - \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \frac{\vec{k}'_2}{t}, t\Big) = \sum_{ij} \int \tilde{\mathcal{F}}_{ij}\Big(\frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{P'_{10}}{t}, \tag{3.43}$$
$$\varphi\vec{e}_1 + \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \frac{\vec{P}'_1}{t}, \frac{M^2-\tau}{4t} + \frac{P'_{20}}{t}, \varphi\vec{e}_1 - \frac{\alpha}{2}\vec{e}_2 + \frac{\vec{P}'_2}{t}, t\Big)\tilde{H}(k_1, k_2, P'_1, P'_2)\,dP'_1\,dP'_2,$$

если

$$|k_{i0}'| \le \rho_1, \quad |\vec{k}_i'| \le \rho_1 .$$

Таким образом, теорема справедлива в случае, когда функции $\mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t)$ непрерывные и полиномиально ограниченные по t. Чтобы рассмотреть общий случай, возьмем последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\delta_\varepsilon(t, t_1)$, $\varepsilon > 0$ таких, что

$$\delta_\varepsilon(t, t_1) = \delta_\varepsilon(t_1, t) \geq 0, \quad \int \delta_\varepsilon(t, t_1)\, dt_1 = 1,$$

$$\delta_\varepsilon(t, t_1) = 0, \text{ если } t_1 < \max\left(t - \frac{\varepsilon}{|t|}, t - \frac{\varepsilon}{\mu}\right), t_1 > \min\left(t + \frac{\varepsilon}{|t|}, t + \frac{\varepsilon}{\mu}\right), \quad (3.44)$$

$$\| \delta_\varepsilon(t, t_1) \|_N \le C_\varepsilon (1 + |t|^{N_1}), \quad (3.45)$$

$$\delta_\varepsilon(t, t) \longrightarrow \delta(t - t_1) \text{ при } \varepsilon \to +0. \quad (3.46)$$

Введем функции

$$\mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon) = \int \mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t_1)\, \delta_\varepsilon(t, t_1)\, dt_1, \quad ij = \tau, a,$$

являющиеся обобщенными относительно (x_1, x_2), бесконечно дифференцируемыми и, в силу (3.45), полиномиально ограниченными относительно t. Заметим, что порядки обобщенных относительно (x_1, x_2) функций $\mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon)$ ограничены числом, не зависящим от t и ε. Из (3.46) имеем при $\varepsilon \to +0$

$$\mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon) \longrightarrow \mathfrak{F}_{ij}(x_1, x_2, t), \quad \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1, P_2, t, \varepsilon) \longrightarrow \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(P_1, P_2, t).$$

Функции $\mathcal{F}_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям (3.I). Кроме того, из (3.3), (3.5) и (3.44) следует, что

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(P_1, P_2, t, \varepsilon) = 0, \text{ если } t < \frac{1}{2}(M+\mu) - \frac{4\varepsilon}{3\mu}.$$

Считая $\varepsilon < \frac{3}{16}\mu^2$ и замечая, что при $t \geqslant \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}\mu$ область G_t^o монотонно убывает с увеличением t, получаем из (3.2) и (3.44):

$$\tilde{\mathcal{F}}_{rj}(P_1, P_2, t, \varepsilon) - \tilde{\mathcal{F}}_{aj}(P_1, P_2, t, \varepsilon) = 0, \text{ если } P_1 \in G^o_{t+\frac{\varepsilon}{t}}, \ j = r, a,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ir}(P_1, P_2, t, \varepsilon) - \tilde{\mathcal{F}}_{ia}(P_1, P_2, t, \varepsilon) = 0, \text{ если } P_2 \in G^o_{t+\frac{\varepsilon}{t}}, \ i = r, a,$$

если

$$t \geqslant \frac{1}{2}(M+\mu) - \frac{4\varepsilon}{3\mu}.$$

Применяя к построенным функциям

$$\mathcal{F}_{ij}(x_1, x_2, t, \varepsilon), \quad \text{и} \quad \tilde{\mathcal{F}}_{ij}(P_1, P_2, t, \varepsilon)$$

доказанные выше результаты и переходя в соответствующих формулах (3.2I) и (3.43) к пределу при $\varepsilon \longrightarrow +0$, убеждаемся в справедливости теоремы в общем случае.

§ 4.

Применим теорему II к доказательству нашей основной теоремы.

Теорема Ш.

Пусть даны трансляционно-инвариантные обобщенные функции четырех векторов:

$$\mathcal{F}^{\nu}_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad ij = r, a, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 8,$$

линейно преобразующиеся при преобразованиях $\mathcal{L}$ из группы Лоренца:

$$\mathcal{F}^{\nu}_{i_\gamma}(\mathcal{L}x_1, \dots, \mathcal{L}x_4) = \sum_{1\le\nu'\le e} A_{\nu,\nu'}(\mathcal{L})\,\mathcal{F}^{\nu'}_{i_\gamma}(x_1, \dots, x_4) \tag{4.1}$$

с помощью некоторого представления $A(\mathcal{L})$ этой группы, разбивающегося на обычные тензорные и спинорные представления. Предположим, кроме того, что введенные обобщенные функции удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{\nu}_{\tau\tau}(x_1, \dots, x_4) = 0 && \text{при} \quad x_1 \lesssim x_3, && \text{или} \quad x_2 \lesssim x_4; \\
&\mathcal{F}^{\nu}_{\tau a}(x_1, \dots, x_4) = 0 && \text{при} \quad x_1 \lesssim x_3, && \text{или} \quad x_2 \gtrsim x_4; \\
&\mathcal{F}_{a\tau}(x_1, \dots, x_4) = 0 && \text{при} \quad x_1 \gtrsim x_3, && \text{или} \quad x_2 \lesssim x_4; \\
&\mathcal{F}_{aa}(x_1, \dots, x_4) = 0 && \text{при} \quad x_1 \gtrsim x_3, && \text{или} \quad x_2 \gtrsim x_4
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Рассмотрим преобразования Фурье:

$$\int \mathcal{F}^{\nu}_{i_\gamma}(x_1, \dots, x_4)\exp i(p_1x_1 + \dots + p_4x_4)\,dx_1 \dots dx_4 =$$

$$= \delta(p_1 + \dots + p_4)\,\widetilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{i_\gamma}(p_1, \dots, p_4). \tag{4.3}$$

Здесь

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{i_\gamma}(p_1, \dots, p_4)$$

обобщенные функции $(p_1, \dots, p_4)$, определенные на многообразии

$$p_1 + \dots + p_4 = 0. \tag{4.4}$$

Предположим, что они удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{rj}(P_1,\ldots,P_4)-\tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{aj}(P_1,\ldots,P_4)=0 \text{ при } P_1^2<(M+\mu)^2,\ P_3^2<9\mu^2,\ j=r,a;\\ \tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{ir}(P_1,\ldots,P_4)-\tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{ia}(P_1,\ldots,P_4)=0 \text{ при } P_2^2<(M+\mu)^2,\ P_4^2<9\mu^2,\ i=r,a;\end{array}\right\} \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(P_1,\ldots,P_4)=0, \text{ если } (P_1+P_3)^2<(M+\mu)^2 \text{ или } P_{10}+P_{30}<0, \quad (4.6)$$

где

$$M>2\mu>0.$$

Тогда можно построить обобщенные функции $\tilde{\Phi}_\lambda(z,\xi)$ вещественной переменной ξ со свойствами:

1) $\tilde{\Phi}_\lambda(z,\xi)$ аналитичны относительно $z=(z_1,\ldots,z_5)$ в области

$$|z_1-M^2|\le\rho\mu^2,\ |z_2-M^2|\le\rho\mu^2,\ |z_3-\tau|\le\rho\mu^2,\ |z_4-\tau|\le\rho\mu^2,$$

$$|z_5+\alpha^2|\le\rho^2\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2,\ V\le\tau\le\mu^2,\ 0\le\alpha\le2\sqrt{2}\,\mu; \quad (4.7)$$

2) $\Phi_\lambda(z,\xi)=0$, если $\xi<\left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2$.

3) для вещественных $(P_1,\ldots,P_4)$ из многообразия (4.4), для которых величины

$$z_1=P_1^2,\ z_2=P_2^2,\ z_3=P_3^2,\ z_4=P_4^2,\ z_5=(P_1+P_2)^2$$

удовлетворяют неравенствам (4.7), а $\xi=\left(\frac{P_1+P_3}{2}\right)^2$, имеем представление вида:

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{ij}(P_1, \ldots, P_4) = \sum P^{\alpha_1}_{i_1} \ldots P^{\alpha_s}_{i_s} \tilde{\Phi}_{\lambda}(z, \xi), \text{ если } P_{10} + P_{30} > 0, \tag{4.8}$$

с конечным числом членов в сумме.

Доказательство.

Ввиду трансляционной инвариантности обобщенных функций $\mathcal{F}^{\nu}_{ij}(x_1, \ldots, x_4)$ их можно рассматривать как обобщенные функции трех переменных, например:

$$y_1 = x_1 - x_3, \quad y_2 = x_4 - x_2, \quad y_3 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Положим

$$\mathcal{F}^{\nu}_{ij}(x_1, \ldots, x_4) = \mathcal{F}^{\nu}_{ij_1}(x_1 - x_3, x_4 - x_2, x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \tag{4.9}$$

где $j_1 = r$, если $j = a$; $j_1 = a$, если $j = r$ если
Ясно тогда, в силу (4.9) и (4.2), что обобщенные функции $\mathcal{F}^{\nu}_{ij}(y_1, y_2, y_3)$ удовлетворяют условиям

$$\mathcal{F}^{\nu}_{rr}(y_1, y_2, y_3) = 0, \quad \text{если } y_1 \lesssim 0, \text{ или } y_2 \lesssim 0;$$

$$\mathcal{F}^{\nu}_{ra}(y_1, y_2, y_3) = 0, \quad \text{если } y_1 \lesssim 0, \text{ или } y_2 \gtrsim 0;$$

$$\mathcal{F}^{\nu}_{ar}(y_1, y_2, y_3) = 0, \quad \text{если } y_1 \gtrsim 0, \text{ или } y_2 \lesssim 0;$$

$$\mathcal{F}^{\nu}_{aa}(y_1, y_2, y_3) = 0, \quad \text{если } y_1 \gtrsim 0, \text{ или } y \gtrsim 0. \tag{4.10}$$

Далее, из (4.9) следует, что

$$\tilde{F}^{\nu}_{ij}(q_1+q_3,\,-q_2-q_3,\,q_3-q_1,\,q_2-q_3)=\tilde{F}^{\nu}_{ij}(q_1,q_2,q_3). \tag{4.11}$$

Положив

$$p_1=q_1+q_3,\quad p_2=-q_2-q_3,\quad p_3=q_3-q_1,\quad p_4=q_2-q_3,$$

имеем

$$q_3=\frac{p_1+p_3}{2},\quad p_1^2=(q_1+q_3)^2,\quad p_2^2=(q_2+q_3)^2,\quad p_3^2=(q_1-q_3)^2,$$
$$p_4^2=(q_2-q_3)^2,\quad (p_1+p_2)^2=(q_1-q_2)^2 \tag{4.12}$$

Тогда из (4.5) и (4.6) получаем

$$\tilde{F}^{\nu}_{rj}(q_1,q_2,q_3)-\tilde{F}^{\nu}_{aj}(q_1,q_2,q_3)=0,\ \text{если}\ (q_1+q_3)^2<(M+\mu)^2,\ (q_1-q_3)^2<9\mu^2;$$

$$\tilde{F}^{\nu}_{ir}(q_1,q_2,q_3)-\tilde{F}^{\nu}_{ia}(q_1,q_2,q_3)=0,\ \text{если}\ (q_2+q_3)^2<(M+\mu)^2,\ (q_2-q_3)^2<9\mu^2; \tag{4.13}$$

$$\tilde{F}^{\nu}_{ij}(q_1,q_2,q_3)=0,\ \text{если}\ q_3^2<\left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2,\ \text{или}\ q_{30}<0.$$

Из (4.1) и(4.9) следует также, что при преобразованиях $\mathcal{L}$ из группы Лоренца функции $F^{\nu}_{ij}(y_1,y_2,y_3)$, линейно преобразуются,

$$F^{\nu}_{ij}(\mathcal{L}y_1,\mathcal{L}y_2,\mathcal{L}y_3)=\sum_{1\le\nu'\le\ell}A_{\nu,\nu'}(\mathcal{L})F^{\nu'}_{ij}(y_1,y_2,y_3).$$

Отсюда вытекает, что функции

$$\tilde{F}^{\nu}_{ij}\,(q_1, q_2, q_3)$$

линейно выражаются (с полиномиальными коэффициентами от q_i) через скалярные функции (q_1, q_2, q_3) . Таким образом, для доказательства теоремы достаточно считать, что функции

$$\tilde{\tilde{F}}^{\nu}_{ij}\,(y_1, y_2, y_3) \text{ и } \tilde{F}_{ij}\,(q_1, q_2, q_3)$$

скалярные и удовлетворяют условиям (4.10) и (4.13). Для этого рассмотрим выражения

$$\int F_{ij}(y_1, y_2, y_3)\, e^{iq_3 y_3}\, dy_3\,, \tag{4.14}$$

где $q_3 = te$, а e - временно-подобный единичный четырех-вектор,

$$e_0 > 0, \quad e^2 = 1.$$

Совершим лоренцовское преобразование $y_i' = \mathcal{L} y_i$ таким образом, чтобы e оказался направленным по временной оси. Выражения (4.14) можно рассматривать как функции

$$F_{ij}(y_1', y_2', t).$$

В силу (4.10), (4.13) и условия скалярности эти функции удовлетворяют всем условиям теоремы II. Поэтому мы можем построить функцию

$$\tilde{\Phi}\,(z, t),$$

аналитическую относительно z в области (4.7) и обобщенную по t. Функция $\tilde{\Phi}(z,t)$ обладает тем свойством, что в области вещественных q_1' и q_2', для которых точки

$$z = (z_1, z_2, \dots z_5):$$

$$z_1 = (q_{10}' + t)^2 - \vec{q}_1'^2,\quad z_2 = (q_{20}' + t)^2 - \vec{q}_2'^2,\quad z_3 = (q_{10}' - t)^2 - \vec{q}_1'^2,$$

$$z_4 = (q_{20}' - t)^2 - \vec{q}_2'^2,\quad z_5 = (q_{10}' - q_{20}')^2 - (\vec{q}_1' - \vec{q}_2')^2 \tag{4.15}$$

лежат в области (4.7), имеет место равенство

$$\tilde{\Phi}(z,t) = \tilde{F}_{ij}(q_1', q_2', t),\quad i,j = r,a.$$

Кроме того,

$$\tilde{\Phi}(z,t) = 0 \qquad \text{при} \quad t < \frac{1}{2}(M+\mu).$$

Вводя функцию $\Phi(z,\xi)$

$$\Phi(z,\xi) = \begin{cases} \tilde{\Phi}(z,\sqrt{\xi}), & \xi \geq \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2, \\ 0 & \xi < \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2 \end{cases}$$

и замечая, что, в силу (4.12),

$$(q_{10}' + t)^2 - \vec{q}_1'^2 = (q_1 + q_3)^2 = P_1^2,\quad (q_{20}' + t)^2 - \vec{q}_2'^2 = (q_2 + q_3)^2 = P_2^2,$$

$$(q_{10}' - t)^2 - \vec{q}_1'^2 = (q_1 - q_3)^2 = P_3^2,\quad (q_{20}' - t)^2 - \vec{q}_2'^2 = (q_2 - q_3)^2 = P_4^2,$$

$$(q_1' - q_2')^2 = (q_1 - q_2)^2 = (P_1 + P_2)^2,\quad t^2 = q_3'^2 = q_3^2 = \left(\frac{P_1 + P_3}{2}\right)^2,$$

видим, что эта функция удовлетворяет всем условиям, сформулированным в теореме. Теорема доказана.

Замечание I.

Вместо условия (4.6) мы можем ввести условие

$$\left[(P_1+P_3)^2-M^2\right]\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{\nu}(P_1,\ldots,P_4)=0,$$

$$\text{если } (P_1+P_3)^2<(M+\mu)^2, \text{ или } P_{10}+P_{30}<0.$$

Действительно, в этом случае вместо $\mathcal{F}_{ij}^{\nu}$ можем рассмотреть функции

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2-M^2\right]\mathcal{F}_{ij}^{\nu}(x_1,\ldots,x_4),$$

удовлетворяющие всем условиям теоремы Ш.

Соотношение (4.8) окажется тогда умноженным на

$$\left[(P_1+P_3)^2-M^2\right].$$

На этот множитель мы можем, однако, разделить в области, где

$$(P_1+P_3)^2\neq M^2.$$

Поэтому (4.8) остается верным, если к условию $P_{10}+P_{30}>0$ добавить

$$(P_1+P_3)^2\neq M^2.$$

Замечание П.

Пусть выполнены все условия теоремы Ш, кроме условий

(4.5), в которых неравенства $P_3^2 < 9\mu^2$, $P_4^2 < 9\mu^2$

заменим на:

$$P_3^2 < 4\mu^2, \quad P_4^2 < 4\mu^2.$$

Тогда легко проверить, что теорема Ш остается справедливой при условии, что в области (4.7) α заключено в интервале

$$0 \leq \alpha \leq 2$$

Литература

I. Сборник "Дисперсионные соотношения", Проблемы современной физики", 2, (1957).

2. Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В. и Поливанов М.К., "Вопросы теории дисперсионных соотношений" (в печати).

3. Боголюбов Н.Н. и Парасюк О.С. "Об аналитическом продолжении обобщен.функций", ДАН СССР, I09 (1956), 717-719.

4. Титчмарш Е., "Введение в теорию интегралов Фурье", ИИЛ, 1948.

5. Соболев С.Л., "Methode nouvelle a résoudre le problème de Cauchy", Матем.сб., 1 (1936).

6. Schwartz L., "Théorie des distribution", I-II, Paris, 1950-1951.

7. Гельфанд И.М. и Шилов Г.Е., "Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши", Успехи мат.наук, УШ 6(58) (1953), 3-54.

8. Боголюбов Н.Н. и Ширков Д.В., "Вопросы квантовой теории поля", I, П, Успехи физ.наук, т.55 (1955), I49-212; т.57 (1955), I-92.

9. Парасюк О.С. "К теории причинных сингулярных функций", ДАН СССР, I00 (1955), 643-645.

I0. Соболев С.Л. "Некоторые применения функционального анализа в математической физике", Изд-во ЛГУ, 1950.

II. Бохнер С. и Мартин У.Т., "Функции многих комплексных переменных", ИИЛ, Москва (I95I).