ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В.К. Мельников

Р 660

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРА ПРИ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

1

Дубна 1961 год

В.К. Мельников

Р 660

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРА ПРИ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

1

Направлено в Труды Московского математического общества

Введение

Пусть для системы

$$\dot{x} = f_0(x,y) \quad , \quad \dot{y} = g_0(x,y) \tag{1_0}$$

точка (x_c, y_c) является положением равновесия типа центр. Это означает, что на плоскости (x,y) существует односвязная окрестность точки (x_c, y_c), не содержащая других положений равновесия кроме (x_c, y_c) и целиком заполненная замкнутыми траекториями. В настоящей работе нас будет интересовать случай, когда замкнутые траектории не заполняют всю плоскость (x, y). Более того, ради упрощения некоторых доказательств, мы ограничимся случаем, когда граница, отделяющая односвязную область, заполненную замкнутыми траекториями, лежит в ограниченной части плоскости и проходит только через одно положение равновесия системы (1_0). (Пуанкаре показал /см. [/1/], стр. 135-136), что граница, отделяющая замкнутые траектории, всегда проходит хотя бы через одно положение равновесия системы (1_0)). Тогда, как известно[/2/], это положение равновесия будет типа седло, а границей будет траектория, которая при $t \to \pm\infty$ стремится к этому положению равновесия. Здесь, как и всюду в дальнейшем, мы предполагаем, что функции $f_0(x,y)$ и $g_0(x,y)$ аналитические, а все положения равновесия системы (1_0) простые, т.е. если точка (x_z, y_z) является положением равновесия, то в этой точке

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_0(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_0(x,y)}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g_0(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g_0(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Возьмем теперь возмущенную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x,y) + \varepsilon f_1(x,y,t,\varepsilon), \\ \dot{y} &= g_0(x,y) + \varepsilon g_1(x,y,t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{1_ε}$$

где $f_1(x,y,t,\varepsilon)$ и $g_1(x,y,t,\varepsilon)$ – периодические (с одним и тем же периодом 2π) функции времени, а ε – малый периметр.

В настоящей работе нас будет интересовать существование и устойчивость колеблющихся решений системы (1_ε). При этом мы не будем ограничиваться окрестностью какого-либо периодического решения, как это делали многие авторы, а рассмотрим проблему в целом, т.е. займемся изучением всей совокупности колеблющихся решений. Мы сможем ответить на поставленные вопросы, изучив структуру областей, из которых в заданный момент времени t_0 выходят колеблющиеся решения. С этой целью мы найдем кривые $\Gamma_\varepsilon(t_0)$, которые для заданного момента времени t_0 отделяют на плоскости (x_0, y_0) начальные данные колеблющихся решений от начальных данных неколеблющихся решений. Тогда решения системы (I_ε), выходящие при $t=t_0$ из точек (x_0, y_0), лежащих на кривых $\Gamma_\varepsilon(t_0)$, образуют в трехмерном пространстве (x , y , t) поверхности, которые отделяют колеблющиеся решения от неколеблющихся. В предлагаемой читателю первой части работы дается метод нахождения кривых $\Gamma_\varepsilon(t_0)$.

Вторая часть работы будет посвящена изучению структуры областей начальных данных, из которых выходят колеблющиеся решения. Несмотря на чрезвычайно сложное расположение кривых $\Gamma_\varepsilon(t_0)$, эти области всегда имеют довольно простое строение. При этом каждая из таких областей распадается на некоторое число меньших областей, обладающих тем свойством, что для каждой из них найдется целое число $m>0$ такое, что всякое решение, вышедшее при $t=t_0$ из произвольной точки, принадлежащей этой области, в момент времени $t_1 = t_0 + 2\pi m$ снова возвращается в исходную область. Там же будут сформулированы условия, при выполнении которых колеблющиеся решения образуют устойчивый режим.

Подобного рода вопросы стали актуальными в последние годы в связи с развитием методов ускорения заряженных частиц /3-6/. Аналогичная задача возникает также при изучении работы системы синхронных генераторов, однако, возникающая там система уравнений удовлетворяет другим предположениям и в настоящей работе рассматриваться не будет. Этому вопросу будет посвящена отдельная работа.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что в нужной области изменения переменных функции $f(x,y,t,\varepsilon) = f_0(x,y) + \varepsilon f_1(x,y,t,\varepsilon)$

и $g(x,y,t,\varepsilon)=g_0(x,y)+\varepsilon g_1(x,y,t,\varepsilon)$ аналитические по переменным x, y, ε и непрерывно дифференцируемые по переменной t.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность С.В. Фомину за многочисленные обсуждения полученных результатов. Я благодарен также В.В. Немыцкому и участникам его семинара на механико-математическом факультете МГУ за полезные замечания.

Часть 1

Метод нахождения кривых, отделяющих начальные данные колеблющихся решений от начальных данных неколеблющихся решений

Результаты первой части настоящей работы являются, в известной мере, обобщением результатов работы /5/ на случай системы иного вида: с одной стороны здесь не предполагается, что рассматриваемая система имеет тот специальный вид, который предполагался в предыдущей работе, но с другой стороны мы требуем, чтобы функции, входящие в систему (I_ε), были периодическими по времени с одним и тем же периодом 2π. Это требование является существенным – благодаря ему здесь будут доказаны более сильные утверждения, чем в /5/.

Сформулируем несколько определений. Пусть точка (x_s, y_s) является положением равновесия типа седло для системы (1_0). Обозначим через $(x_s(t,\varepsilon)$, $y_s(t,\varepsilon))$ решение системы уравнений

$$f(x,y,t,\varepsilon)=0\,,\quad g(x,y,t,\varepsilon)=0\,,$$

которое при $\varepsilon=0$ обращается в (x_s, y_s). Используя теорему о неявных функциях (см. /7/, стр. 80-85) и наши предположения, легко показать, что названное решение существует и обладает следующим свойством: $x_s(t,\varepsilon)$ и $y_s(t,\varepsilon)$ являются непрерывными и периодическими (с периодом 2π) функциями времени. Пусть далее

$$x_s'(\varepsilon)=\min_{t\in[0,2\pi]} x_s(t,\varepsilon)\,,\qquad x_s''(\varepsilon)=\max_{t\in[0,2\pi]} x_s(t,\varepsilon)\,,$$

$$y_s'(\varepsilon)=\min_{t\in[0,2\pi]} y_s(t,\varepsilon)\,,\qquad y_s''(\varepsilon)=\max_{t\in[0,2\pi]} y_s(t,\varepsilon)\,,$$

Предположим, что $x_s'(\varepsilon) < x_s''(\varepsilon)$, а $y_s'(\varepsilon) < y_s''(\varepsilon)$. Решение $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ системы (1_ε) назовем граничным, если оно определено при всех t, больших некоторого t_0, и существует такой момент времени $t_1(\varepsilon)$, что при всех $t > t_1(\varepsilon)$ $x_s'(\varepsilon) < x_\varepsilon(t) < x_s''(\varepsilon)$, а $y_s'(\varepsilon) < y_\varepsilon(t) < y_s''(\varepsilon)$. В этом случае, если прямоугольник $x_s'(\varepsilon) < x < x_s''(\varepsilon)$, $y_s'(\varepsilon) < y < y_s''(\varepsilon)$ вырождается в отрезок или точку, решение $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ будем называть граничным, если оно определено при всех t, больших некоторого t_0, удовлетворяет приведенному выше определению по той координате, по которой нет вырождения (если такая имеется), а каждая из координат, по которым имеется вырождение, удовлетворяет условию: существует такой момент времени t_2, что при $t > t_2$ величина этой координаты при $t \to \infty$ монотонно стремится к пределу, равному величине соответствующего общего значения максимума и минимума. Заметим, что параметр ε здесь предполагается действительным. В дальнейшем, когда параметр ε будет комплексным, эти определения будут уточнены.

Для заданного момента времени t_0 обозначим через $\Gamma_\varepsilon(t_0)$ множество точек на плоскости (x_0, y_0) таких, что выходящие из них при $t = t_0$ решения системы (1_ε) будут граничными. Множество $\Gamma_\varepsilon(t_0)$ отделяет на плоскости (x_0, y_0) начальные данные колеблющихся решений от начальных данных неколеблющихся решений. Более точно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\Delta = \widetilde{E}^2 \setminus \Gamma_\varepsilon(t_0)$, где $\widetilde{E}^2$ есть плоскость (x_0, y_0), из которой выброшены изолированные точки множества $\overline{\Gamma_\varepsilon(t_0)} \setminus \Gamma_\varepsilon(t_0)$ и пусть $\Delta' \subset \Delta$ - произвольное линейно связное множество. Предположим, что во множестве Δ' существует точка (x_0, y_0), из которой в момент времени t_0 выходит колеблющееся решение. Тогда любое другое решение, выходящее в момент времени t_0 из произвольной точки, принадлежащей Δ', также будет колеблющимся.

Приведенная теорема является некоторым обобщением теоремы 1 из работы /5/ и сформулирована здесь для того, чтобы сделать понятной цель, ради которой изучаются граничные траектории. Однако доказательство этой теоремы при сделанных предположениях с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при доказательстве теоремы 1 в работе /5/, наталкивается на серьезные трудности. Исходя из этого, мы приводим здесь формулировку теоремы без доказательства. Во второй части работы, которая будет опубликована несколько позднее, мы, используя фактически найденное $\Gamma_\varepsilon(t_0)$, дадим совсем простое доказательство этой теоремы.

§ 1. Некоторые полезные преобразования системы (1_ε)

Прежде чем приступить к выполнению намеченной программы, приведем систему (1_ε) к несколько более удобному виду. С этой целью докажем следующую теорему.

Теорема 2. Существует замена переменных вида:

$$x = x_s + \alpha(u+p(t,\varepsilon))\cos\varphi - \frac{1}{\alpha}(v+q(t,\varepsilon))\sin\varphi, \qquad (1.1)$$
$$y = y_s + \alpha(u+p(t,\varepsilon))\sin\varphi + \frac{1}{\alpha}(v+q(t,\varepsilon))\cos\varphi,$$

где α и φ постоянные, а функции $p(t,\varepsilon)$ и $q(t,\varepsilon)$ аналитические по ε в окрестности точки $\varepsilon=0$, периодические по t с периодом 2π и обладающие непрерывными частными производными по t до второго порядка включительно, такая, что в новых переменных система (1_ε) примет вид:

$$\dot u = \lambda v + p_0(u,v) + \varepsilon p_1(u,v,t,\varepsilon), \qquad (1.2)$$
$$\dot v = \lambda u + q_0(u,v) + \varepsilon q_1(u,v,t,\varepsilon),$$

где $\lambda > 0$, $p_1(0,0,t,\varepsilon) = q_1(0,0,t,\varepsilon) \equiv 0$, а разложение функций $p_0(u,v)$, $q_0(u,v)$ в ряд в окрестности точки $(0,0)$ начинается с членов не ниже второго порядка.

Для доказательства этой теоремы нам потребуются три следующие леммы.

Лемма 1.

Пусть (X_c, y_c) – произвольное положение равновесия типа пентр системы (1_0), а G_c – максимальная односвязная окрестность точки (X_c, y_c), целиком заполненная замкнутыми траекториями и не содержашая других положений равновесия, кроме (X_c, y_c). Пусть далее $(X_0(t), y_0(t))$ – произвольное периодическое решение системы (1_0), лежащее в области G_c, а T_0 – его период. Тогда

$$\int_0^{T_0} \left\{ f'_{0x}(x_0(t), y_0(t)) + g'_{0y}(x_0(t), y_0(t)) \right\} dt = 0 .$$

Доказательство:

Пусть $x_0 = x_0(0)$, $y_0 = y_0(0)$. Обозначим через $(x(t,\xi), y(t,\xi))$ решение системы (1_0), удовлетворяюшее условиям:

$$x(0,\xi) = x_0 - \frac{g_0(x_0,y_0)}{\sqrt{f_0^2(x_0,y_0) + g_0^2(x_0,y_0)}}\,\xi \ , \quad y(0,\xi) = y_0 + \frac{f_0(x_0,y_0)}{\sqrt{f_0^2(x_0,y_0) + g_0^2(x_0,y_0)}}\,\xi \ .$$

Очевидно, что в некоторой окрестности точки $\xi = 0$ решение $(x(t,\xi), y(t,\xi))$ будет периодическим по t с периодом $T(\xi)$, зависяшим от ξ.

Возьмем систему в вариациях:

$$\dot u = f'_{0x}(x_0(t), y_0(t))u + f'_{0y}(x_0(t), y_0(t))v ,$$

$$\dot v = g'_{0x}(x_0(t), y_0(t))u + g'_{0y}(x_0(t), y_0(t))v .$$

Она обладает следующими решениями:

$$u_1(t) = \dot x_0(t) \ , \qquad v_1(t) = \dot y_0(t) \ ,$$

$$u_2(t) = \left.\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} \ , \quad v_2(t) = \left.\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} \ .$$

Эти два решения образуют фундаментальную систему, так как при $t=0$ определитель Вронского этой системы отличен от нуля. Действительно,

$$W(0)=\begin{vmatrix} f_0(x_0,y_0) & g_0(x_0,y_0) \\ \dfrac{-g_0(x_0,y_0)}{\sqrt{f_0^2(x_0,y_0)+g_0^2(x_0,y_0)}} & \dfrac{f_0(x_0,y_0)}{\sqrt{f_0^2(x_0,y_0)+g_0^2(x_0,y_0)}} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Покажем, что $W(t)$ периодическая /с периодом T_0 / функция t. Для этой цели вычислим $\dfrac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi}$ и $\dfrac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}$. Утверждаем, что функции

$$p(t,\xi)=\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi}+t\,\frac{T'(\xi)}{T(\xi)}\,\dot{x}(t,\xi)$$

и

$$q(t,\xi)=\frac{\partial y(t,\xi)}{\partial \xi}+t\,\frac{T'(\xi)}{T(\xi)}\,\dot{y}(t,\xi)$$

периодические по t с периодом $T(\xi)$. Действительно, нетрудно проверить, что

$$p(t+T(\xi),\xi)-p(t,\xi)=\frac{d}{d\xi}\left[x(t+T(\xi),\xi)-x(t,\xi)\right]\equiv 0,$$

а

$$q(t+T(\xi),\xi)-q(t,\xi)=\frac{d}{d\xi}\left[y(t+T(\xi),\xi)-y(t,\xi)\right]\equiv 0,$$

так как по определению $T(\xi)$

$$x(t+T(\xi),\xi)\equiv x(t,\xi), \quad \text{а} \quad y(t+T(\xi),\xi)=y(t,\xi).$$

Отсюда легко получаем, что

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}_0(t) & \dot{y}_0(t) \\ p(t,0) & q(t,0) \end{vmatrix}$$

будет периодической (с периодом T_0) функцией t . Значит, $W(T_0)=W(0)$.
По теореме Лиувилля имеем:

$$W(T_0) = W(0)\exp\left(\int_0^{T_0} \{ f'_{0x}(x_0(t),y_0(t)) + g'_{0y}(x_0(t),y_0(t))\} dt \right).$$

Следовательно, $\displaystyle\int_0^{T_0} \{ f'_{0x}(x_0(t),y_0(t)) + g'_{0y}(x_0(t),y_0(t))\} dt = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 2.

Пусть (x_c, y_c) – произвольное положение равновесия типа центр системы (1_0), а G_c – максимальная односвязная окрестность точки (x_c, y_c), целиком заполненная замкнутыми траекториями и не содержащая других положений равновесия, кроме (x_c, y_c). Пусть далее (x_s, y_s) – единственное положение равновесия типа седло системы (1_0), лежащее на границе области G_c . Тогда в точке (x_s, y_s)

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial g_0}{\partial y} = 0.$$

Доказательство:

Предположим противное: пусть в точке (x_s, y_s) $\dfrac{\partial f_0}{\partial x} + \dfrac{\partial g_0}{\partial y} = A_s \neq 0$.
Тогда найдется $R_0 > 0$ такое, что $\left| \dfrac{\partial f_0(x,y)}{\partial x} + \dfrac{\partial g_0(x,y)}{\partial y} \right| \geq \dfrac{1}{2} |A_s|$
для всех (x, y), лежащих в круге

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 \leq R_0^2 .$$

Пусть (x_0, y_0) – произвольная точка, лежащая на границе области G_c , отличная от (x_s, y_s). Обозначим через $(x(t,\xi), y(t,\xi))$ решение системы (1_0), удовлетворяющее условиям:

$$x(0,\xi) = x_0 + \xi \cos\varphi_0 , \quad y(0,\xi) = y_0 + \xi \sin\varphi_0 ,$$

где угол φ_0 выбран так, что вектор $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$, будучи проведен из точки (X_0 , y_0), направлен внутрь области G_c. Тогда найдется $\xi_0 > 0$ такое, что для любого $\xi \in (0, \xi_0]$ решение $(x(t,\xi), y(t,\xi))$ содержится в G_c.

Для упрощения дальнейших рассуждений предположим, что в точке (x_s, y_s) $\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial g_0}{\partial y}$. (В том случае, если $\frac{\partial f_0}{\partial x} \neq \frac{\partial g_0}{\partial y}$, сделаем замену:

$$x = x_s + (x' - x_s)\cos\varphi + (y' - y_s)\sin\varphi,$$

$$y = y_s - (x' - x_s)\sin\varphi + (y' - y_s)\cos\varphi,$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial g_0}{\partial y}}{\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial g_0}{\partial x}}$; нетрудно проверить, что в новых переменных (x', y') $\frac{\partial f_0}{\partial x'} = \frac{\partial g_0}{\partial y'}$, а $\frac{\partial f_0}{\partial x'} + \frac{\partial g_0}{\partial y'} = \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial g_0}{\partial y}$).

Положим

$$K_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t,0) - y_s}{x(t,0) - x_s}, \quad K_2 = \lim_{t\to\infty} \frac{y(-t,0) - y_s}{x(-t,0) - x_s}.$$

Как известно (см. /1/, стр. 25-26), эти пределы существуют и удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} K^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial g_0}{\partial y}\right) K - \frac{\partial g_0}{\partial x} = 0.$$

Из предположения, что $\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial g_0}{\partial y}$, следует, что $K_1 = -K_2$. Это означает, что при $t \to \infty$ $\frac{y(t,0) - y_s}{x(t,0) - x_s} \cdot \frac{x(-t,0) - x_s}{y(-t,0) - y_s} \to -1$. Отсюда следует, что найдется $t_1 > 0$ такое, что при всех $t \geq t_1$ либо $\frac{x(-t,0) - x_s}{x(t,0) - x_s} > 0$, либо $\frac{y(t,0) - y_s}{y(-t,0) - y_s} > 0$. В дальнейших рассуждениях для определенности будем предполагать, что имеет место первое неравенство.

Пусть $y = f(x)$ - решение уравнения $f_0(x,y) = 0$, равное y_s при $x = x_s$. Так как в точке (x_s, y_s) $\frac{\partial f_0}{\partial x}\frac{\partial g_0}{\partial y} - \frac{\partial f_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_0}{\partial x} < 0$, то пользуясь тем, что $\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial g_0}{\partial y}$ получаем, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial y}\frac{\partial g_0}{\partial x} > \left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^2. \qquad (1.3)$$

Следовательно, $\frac{\partial f_0}{\partial y} \neq 0$ и по теореме о неявных функциях равенство $f_0(x,y)=0$ определяет в некотором интервале $(x_s-\Delta_0, x_s+\Delta_0)$ $(\Delta_0>0)$ однозначную функцию $y=f(x)$. Из неравенства (1.3) также следует, что

$$\frac{\frac{\partial g_0}{\partial x}}{\frac{\partial f_0}{\partial y}} > \frac{\left(\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)^2}, \quad \text{т.е.} \quad -\left(\frac{\frac{\partial g_0}{\partial x}}{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\frac{\partial f_0}{\partial x}}{\frac{\partial f_0}{\partial y}} < \left(\frac{\frac{\partial g_0}{\partial x}}{\frac{\partial f_0}{\partial y}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Значит, $-|K| < f'(x_s) < |K|$, где $K=K_1=-K_2$.

Возьмем теперь $t_2>t_1$ настолько большим, чтобы при всех $t \geq t_2$ и всех $t \leq -t_2$ выполнялись неравенства:

$$(x(t,0)-x_s)^2 + (y(t,0)-y_s)^2 \leq R_0^2,$$

$$\left|\frac{y(t,0)-y_s}{x(t,0)-x_s} - K \operatorname{sign} t\right| < \frac{|K|-|f'(x_s)|}{4},$$

где $K=K_1=-K_2$. Возьмем далее $\Delta_1<\Delta_0$ такое, чтобы на отрезке $[x_s-\Delta_1, x_s+\Delta_1]$ было выполнено условие: $|f'(x)-f'(x_s)| < \frac{|K|-|f'(x_s)|}{4}$.

Пусть положительное $\Delta < \min\left(\Delta_1, |x(t_2,0)|, |x(-t_2,0)|, \frac{R_0}{\sqrt{1+\frac{25}{16}K^2}}\right)$ так мало, что при $x\in[x_s-\Delta, x_s+\Delta]$ и $y\in[y_s-\frac{5}{4}\Delta|K|, y_s+\frac{5}{4}\Delta|K|]$ $f_0(x,y)$ обращается в нуль только на кривой $y=f(x)$. Возьмем прямую $x=\bar{x}_0=x_s+\Delta \operatorname{sign} x(t_2,0)$. Пусть $(\bar{x}_0, y_+)$ – точка пересечения прямой $x=\bar{x}_0$ с траекторией $(x(t,0), y(t,0))$ при $t>t_2$, а t_0^+ – соответствующий момент времени. Такая точка единственна. Пусть далее $(\bar{x}_0, y_-)$ – точка пересечения прямой $x=\bar{x}_0$ с траекторией $(x(t,0), y(t,0))$

при $t < -t_2$, а t_0^- - соответствующий момент времени. Такая точка также единственна. Пусть для определенности $y_+ > y_-$ и пусть $\bar{y}_0 = f(\bar{x}_0)$. Тогда $y_- < \bar{y}_0 < y_+$ и благодаря выбору Δ на множестве $L_1 = \{x = \bar{x}_0, y_- < y < \bar{y}_0\}$ и на множестве $L_2 = \{x = \bar{x}_0, \bar{y}_0 < y < y_+\}$ $f_0(x, y)$ не обращается в нуль. Как нетрудно проверить, этого достаточно для того, чтобы L_i $(i = 1, 2)$ было дугой без контакта. Следовательно (см. /1/, стр. 62-64), каждая траектория, лежащая в G_c, пересекает L_i не более одного раза. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра следует, что найдется $\xi_1 > 0$ $(\xi_1 < \xi_0)$ такое, что решение $(x(t,\xi), y(t,\xi))$ для всех $\xi \in (0, \xi_1]$ будет пересекать как L_1, так и L_2. Пусть $T(\xi)$ период решения $(x(t,\xi), y(t,\xi))$, а $t^+(\xi)$ $(0 < t^+(\xi) < T(\xi))$ - момент пересечения решением $(x(t,\xi), y(t,\xi))$ дуги L_1, а $t^-(\xi)$ $(0 > t^-(\xi) > -T(\xi))$ - момент пересечения решением $(x(t,\xi), y(t,\xi))$ дуги L_2 $(0 < \xi \le \xi_1)$. Очевидно, что $T(\xi) - t^+(\xi) + t^-(\xi) > 0$.

Пусть

$$\mathcal{J}(\xi) = \int_0^{T(\xi)} \{ f'_{0x}(x(t,\xi), y(t,\xi)) + g'_{0y}(x(t,\xi), y(t,\xi)) \} \, dt =$$

$$= \int_{t^-(\xi)}^{t^+(\xi)} \{ f'_{0x}(x(t,\xi), y(t,\xi)) + g'_{0y}(x(t,\xi), y(t,\xi)) \} \, dt +$$

$$+ \int_{t^+(\xi)}^{T(\xi)+t^-(\xi)} \{ f'_{0x}(x(t,\xi), y(t,\xi)) + g'_{0y}(x(t,\xi), y(t,\xi)) \} \, dt .$$

Из теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра следует, что при $\xi \to +0$ $t^+(\xi) \to t_0^+$, $t^-(\xi) \to t_0^-$, $T(\xi) \to \infty$ и равномерно по t для всех $t \in [t_0^- - 1, t_0^+ + 1]$ $x(t,\xi) \to x(t,0)$, $y(t,\xi) \to y(t,0)$. Следовательно, найдется положительное $\xi_2 < \xi_1$ такое, что при $0 < \xi < \xi_2$

$$\left| \int_{t^-(\xi)}^{t^+(\xi)} \{ f'_{0x}(x(t,\xi), y(t,\xi)) + g'_{0y}(x(t,\xi), y(t,\xi)) \} \, dt \right| <$$

$$< 1 + \left| \int_{t_0^-}^{t_0^+} \{ f'_{0x}(x(t,0), y(t,0)) + g'_{0y}(x(t,0), y(t,0)) \} dt \right| ,$$

а

$$T(\xi) > t^+(\xi) - t^-(\xi) + \frac{2}{|A_s|} \left(2 + \left| \int_{t_0^-}^{t_0^+} \{ f'_{0x}(x(t,0), y(t,0)) + g'_{0y}(x(t,0), y(t,0)) \} dt \right| \right).$$

Тогда при $0 < \xi < \xi_2$ имеем:

$$|\mathcal{J}(\xi)| > \left| \int_{t^+(\xi)}^{T(\xi)+t^-(\xi)} \{ f'_{0x}(x(t,\xi), y(t,\xi)) + g'_{0y}(x(t,\xi), y(t,\xi)) \} dt \right| -$$

$$-1 - \left| \int_{t_0^-}^{t_0^+} \{ f'_{0x}(x(t,0), y(t,0)) + g'_{0y}(x(t,0), y(t,0)) \} dt \right| .$$

Так как при $t \in [t^+(\xi), T(\xi) + t^-(\xi)]$ решение $(x(t,\xi), y(t,\xi))$ находится внутри криволинейного треугольника, образованного решением $(x(t,0), y(t,0))$ $(t > t_0^+)$ и $(t < t_0^-)$ и отрезком $y_- \leq y \leq y_+$ прямой $x = \bar{x}_0$, который по построению находится внутри круга $(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 \leq R_0^2$, то при $0 < \xi < \xi_2$ имеем:

$$\left| \int_{t^+(\xi)}^{T(\xi)+t^-(\xi)} \{ f'_{0x}(x(t,\xi), y(t,\xi)) + g'_{0y}(x(t,\xi), y(t,\xi)) \} dt \right| >$$

$$> 2 + \left| \int_{t_0^-}^{t_0^+} \{ f'_{0x}(x(t,0), y(t,0)) + g'_{0y}(x(t,0), y(t,0)) \} dt \right| .$$

Следовательно, при $0 < \xi < \xi_2$ $|\mathcal{J}(\xi)| > 1$ вопреки тому, что в лемме 1 мы доказали, что $\mathcal{J}(\xi) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Сделаем теперь в системе (1_0) замену:

$$x = x_s + \alpha\,\tilde{u}\cos\varphi - \frac{\tilde{v}}{\alpha}\sin\varphi,$$
$$y = y_s + \alpha\,\tilde{u}\sin\varphi + \frac{\tilde{v}}{\alpha}\cos\varphi, \qquad (1.4)$$

где угол φ выбран так, что

$$\sin 2\varphi = \frac{-\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial g_0}{\partial y}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial g_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial g_0}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\cos 2\varphi = \frac{\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial g_0}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial g_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial g_0}{\partial x}\right)^2}};$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial g_0}{\partial x}\right)^2 - 4\Delta} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial g_0}{\partial x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial g_0}{\partial x}\right)^2 - 4\Delta} - \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{\partial g_0}{\partial x}\right)}},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x} & \frac{\partial f_0}{\partial y} \\ \frac{\partial g_0}{\partial x} & \frac{\partial g_0}{\partial y} \end{vmatrix} < 0.$$

Тогда, используя лемму 2, путем элементарных вычислений получим, что в новых переменных $(\tilde{u}, \tilde{v})$ система (1_0) примет вид:

$$\dot{\tilde{u}} = \lambda\tilde{v} + p_0(\tilde{u},\tilde{v}), \quad \dot{\tilde{v}} = \lambda\tilde{u} + q_0(\tilde{u},\tilde{v}), \qquad (1,5)$$

где $\lambda = \sqrt{-\Delta} > 0$, а разложение функций $p_0(\tilde{u};\tilde{v})$ и $q_0(\tilde{u},\tilde{v})$ в окрестности точки (0,0) начинается с членов не ниже второго порядка.

Сделаем описанную выше замену переменных в системе (1_ε). В результате получим:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}} &= \lambda\tilde{v} + p_0(\tilde{u},\tilde{v}) + \varepsilon\tilde{p}_1(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon), \\ \dot{\tilde{v}} &= \lambda\tilde{u} + q_0(\tilde{u},\tilde{v}) + \varepsilon\tilde{q}_1(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где функции $p_0(\tilde{u},\tilde{v})$ и $q_0(\tilde{u},\tilde{v})$ те же самые, что и в системе (1.5).

Лемма 3.

Система (1.6) имеет аналитически зависящее от параметра ε периодическое с периодом 2π решение ($\tilde{u}_s(t,\varepsilon)$, $\tilde{v}_s(t,\varepsilon)$) такое, что при $\varepsilon=0$ $\tilde{u}_s(t,\varepsilon)=\tilde{v}_s(t,\varepsilon)\equiv 0$.

Доказательство:

Обозначим через $(\tilde{u}(t,\alpha,\beta,\varepsilon), \tilde{v}(t,\alpha,\beta,\varepsilon))$ решение системы (1.6), которое при $t=0$ удовлетворяет условиям:

$$\tilde{u}(0,\alpha,\beta,\varepsilon)=\alpha \quad , \quad \tilde{v}(0,\alpha,\beta,\varepsilon)=\beta,$$

и попытаемся так подобрать аналитические функции $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$, чтобы выполнялись тождественно следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}(2\pi,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)-\alpha(\varepsilon)=0, \\ &\tilde{v}(2\pi,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)-\beta(\varepsilon)=0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

которые необходимы и достаточны для того, чтобы решение $(\tilde{u}(t,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon), \tilde{v}(t,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon))$ было периодическим с периодом 2π. В силу теоремы Пуанкаре об аналитической зависимости решения от параметра (см. /8/, стр.153-160/) функции $\tilde{u}(2\pi,\alpha,\beta,\varepsilon)$ и $\tilde{v}(2\pi,\alpha,\beta,\varepsilon)$ будут аналитическими функциями параметров α, β, ε, если последние достаточно малы. Рассматривая равенства (1.7) как уравнения, мы сведем задачу об отыскании аналитических функций $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ к теореме о неявных функциях (см. /7/, стр. 80-85). Для применимости этой теоремы нужно, чтобы система (1.7) имела решение при $\varepsilon=0$ и ее функциональный определитель по переменным α и β при $\alpha=\beta=0$ был отличен от нуля. Первое требование выполнено, так как $\alpha=\beta=0$, очевидно, является решением при $\varepsilon=0$. Вычислим величину функционального определителя. Имеем при $\alpha=\beta=0$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}(2\pi,\alpha,\beta,0)}{\partial\alpha} - 1 & \dfrac{\partial \tilde{u}(2\pi,\alpha,\beta,0)}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}(2\pi,\alpha,\beta,0)}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial \tilde{v}(2\pi,\alpha,\beta,0)}{\partial\beta} - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{ch} 2\pi\lambda - 1 & \operatorname{sh} 2\pi\lambda \\ \operatorname{sh} 2\pi\lambda & \operatorname{ch} 2\pi\lambda - 1 \end{vmatrix} = 2 - 2\operatorname{ch} 2\pi\lambda < 0$$

так как $\lambda > 0$. Таким образом, требования теоремы о неявных функциях выполнены. Лемма доказана.

Обозначим через $(\tilde{u}_s(t,\varepsilon), \tilde{v}_s(t,\varepsilon))$ периодическое решение системы (1.6), полученное в лемме 3. Сделаем теперь в системе (1.6) замену:

$$\tilde{u} = u + \tilde{u}_s(t,\varepsilon) \quad , \quad \tilde{v} = v + \tilde{v}_s(t,\varepsilon) . \tag{1.8}$$

В результате замены получим систему:

$$\dot{u} = \lambda v + p_0(u,v) + \varepsilon p_1(u,v,t,\varepsilon) ,$$
$$\dot{v} = \lambda u + q_0(u,v) + \varepsilon q_1(u,v,t,\varepsilon) ,$$

которая, очевидно, удовлетворяет тем же условиям, что и система (1.2). Понимая под заменой (1.1) последовательное применение замен (1.4) и (1.8), мы получим замену, удовлетворяющую теореме 2. Теорема доказана.

Систему (1.2) будем называть стандартной формой системы (1_ε) в окрестности седла.

§ 2. Вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теоремы об аналитической зависимости граничных траекторий от параметра ε

В следующих параграфах нам потребуются некоторые свойства решений линейного уравнения:

$$\ddot{x} + 2a(t)x - k(t)x = f(t), \tag{2.1}$$

где $a(t)$, $k(t)$ и $f(t)$ комплексные функции действительного переменного t. На протяжении всего параграфа мы будем предполагать, что эти функции ограничены и непрерывны. Отделяя действительную и мнимую части мы запишем уравнение (2.1) в виде системы двух уравнений с действительными функциями:

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + 2a_1(t)\dot{u} - 2a_2(t)\dot{v} - k_1(t)u + k_2(t)v = f_1(t), \\ &\ddot{v} + 2a_2(t)\dot{u} + 2a_1(t)\dot{v} - k_2(t)u - k_1(t)v = f_2(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь положено: $x = u + iv$, $a = a_1 + ia_2$, $k = k_1 + ik_2$, $f = f_1 + if_2$.

Цель этого параграфа – доказательство двух следующих утверждений:

1. Пусть при всех $t \geqslant t_0$ $k_1(t) - a_2^2(t) \geqslant c > 0$ а $f_1^2(t) + f_2^2(t) \to 0$ при $t \to \infty$; тогда для любой пары (u_0, v_0) существует и единственно решение системы (2.2) такое, что $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$, а $u^2(t) + v^2(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

2. Пусть функции $a_i(t)$, $k_i(t)$ и $f_i(t)$ $(i = 1, 2)$, входящие в систему (2.2), зависят от действительного параметра λ, непрерывны по λ при $\lambda = \lambda_0$ и при всех λ из некоторой окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ удовлетворяют условиям: при всех $t \geqslant t_0$ $k_1(t,\lambda) - a_2^2(t,\lambda) \geqslant c > 0$, $f_1^2(t,\lambda) + f_2^2(t,\lambda) \to 0$ при $t \to \infty$ и при всех $t \geqslant t_0$ $f_1^2(t,\lambda) + f_2^2(t,\lambda) \leqslant C$ (постоянные c и C от λ не зависят); тогда для любой пары (u_0, v_0) решение системы (2.2), удовлетворяющее условиям: $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$, $u^2(t) + v^2(t) \to 0$

при $t \to \infty$, непрерывно зависит от λ при $\lambda = \lambda_0$. Доказательство первого утверждения содержится в леммах 4,5,6 и 7, доказательство второго – в леммах 8,9 и 10.

Лемма 4. (принцип максимума).

Пусть $(u(t), v(t))$ – произвольное нетривиальное решение однородной системы (2.2) и пусть при любом $t \geqslant t_0$ $K_1(t) - a_2^2(t) > 0$. Тогда $r(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ не может иметь максимума ни при каком $t > t_0$.

Доказательство:

Предположим противное: пусть при $t = t' > t_0$ $r(t)$ имеет максимум, т.е. $r(t') > 0$, $\dot r(t') = 0$ и $\ddot r(t') \leqslant 0$. Умножив первое уравнение системы (2.2) на u, а второе – на $-v$ и сложив их, получим следующее равенство:

$$\ddot u u + \ddot v v + 2a_1(t)(\dot u u + \dot v v) - 2a_2(t)(u\dot v - \dot u v) - K_1(t)(u^2 + v^2) = 0,$$

которое путем элементарных преобразований превращается в следующее:

$$\ddot r + 2a_1(t)\dot r - \left(K_1(t) + 2a_2(t)\omega(t) + \omega^2(t)\right) r = 0. \tag{2.3}$$

Здесь положено: $r(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$, $\omega(t) = \dfrac{u(t)\dot v(t) - \dot u(t) v(t)}{u^2(t) + v^2(t)}$.

Так как при любом $t \geqslant t_0$ $K_1(t) - a_2^2(t) > 0$, то при любом $t \geqslant t_0$ выражение $K_1(t) + 2a_2(t)\omega(t) + \omega^2(t)$ не обращается в нуль и, следовательно, строго положительно. Таким образом, при $t = t'$

$$\ddot r(t') = \left(K_1(t') + 2a_2(t')\omega(t') + \omega^2(t')\right) r(t') > 0,$$

вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 5.

Пусть в системе (2.2) при любом $t \geqslant t_0$ выполнено соотношение: $K_1(t) - a_2^2(t) \geqslant c > 0$. Тогда для любой пары (u_0, v_0) существует решение однородной системы (2.2) такое, что $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ и $u^2(t) + v^2(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Обозначим через $(u_n(t), v_n(t))$ $(n = 1, 2, \dots)$ решение однородной системы (2.2), удовлетворяющее условиям: $u_n(t_n) = v_n(t_n) = 0$, $\dot u_n(t_n) = \dot v_n(t_n) = 1$, $t_n = t_0 + n$. Из леммы 4 следует, что при любом $t \in [t_0, t_n)$ $u_n^2(t) + v_n^2(t) > 0$, а $\dot u_n(t) u_n(t) + \dot v_n(t) v_n(t) < 0$.

Вместе с решением $(u_n(t), v_n(t))$ однородной системе (2.2), очевидно, удовлетворяет и пара $(-v_n(t), u_n(t))$. Комбинируя решение $(u_n(t), v_n(t))$ с решением $(-v_n(t), u_n(t))$ и пользуясь тем, что $u_n^2(t_0)+v_n^2(t_0)>0$, мы легко получим решение $(\bar{u}_n(t), \bar{v}_n(t))$ такое, что $\bar{u}_n(t_0)=u_0$, $\bar{v}_n(t_0)=v_0$ и $\bar{u}_n(t_n)=\bar{v}_n(t_n)=0$. Это решение дается следующими формулами:

$$\bar{u}_n(t) = u_0\frac{u_n(t_0)u_n(t)+v_n(t_0)v_n(t)}{u_n^2(t_0)+v_n^2(t_0)} + v_0\frac{v_n(t_0)u_n(t)-u_n(t_0)v_n(t)}{u_n^2(t_0)+v_n^2(t_0)},$$

$$\bar{v}_n(t) = u_0\frac{-v_n(t_0)u_n(t)+u_n(t_0)v_n(t)}{u_n^2(t_0)+v_n^2(t_0)} + v_0\frac{u_n(t_0)u_n(t)+v_n(t_0)v_n(t)}{u_n^2(t_0)+v_n^2(t_0)}.$$

Непосредственно проверяется, что $\dot{\bar{u}}_n(t)\bar{u}_n(t)+\dot{\bar{v}}_n(t)\bar{v}_n(t) =$

$$= \frac{u_0^2+v_0^2}{u_n^2(t_0)+v_n^2(t_0)}\left(\dot{u}_n(t)u_n(t)+\dot{v}_n(t)v_n(t)\right),$$

и, следовательно, при любом $t\in[t_0, t_n)$

$$\dot{\bar{u}}_n(t)\bar{u}_n(t)+\dot{\bar{v}}_n(t)\bar{v}_n(t)<0.$$

Рассмотрим последовательность пар $(\dot{\bar{u}}_n(t_0), \dot{\bar{v}}_n(t_0))$ $(n=1,2,3\ldots)$. Покажем, что она ограничена. Действительно, предположим противное: пусть найдется подпоследовательность $(\dot{\bar{u}}_{n_m}(t_0), \dot{\bar{v}}_{n_m}(t_0))$ такая, что $\dot{\bar{u}}_{n_m}^2(t_0)+\dot{\bar{v}}_{n_m}^2(t_0)\to\infty$ при $m\to\infty$. Последовательность

$$\left\{\frac{\dot{\bar{u}}_{n_m}(t_0)}{\sqrt{\dot{\bar{u}}_{n_m}^2(t_0)+\dot{\bar{v}}_{n_m}^2(t_0)}}, \frac{\dot{\bar{v}}_{n_m}(t_0)}{\sqrt{\dot{\bar{u}}_{n_m}^2(t_0)+\dot{\bar{v}}_{n_m}^2(t_0)}}\right\}$$

ограничена и, следовательно, имеет, по крайней мере, одну предельную точку. Эта точка имеет вид $(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что подпоследовательность $(\dot{\bar{u}}_{n_m}(t_0), \dot{\bar{v}}_{n_m}(t_0))$ выбрана так, что последовательность

$$\left\{ \frac{\dot{\bar{u}}_{n_m}(t_0)}{\sqrt{\dot{\bar{u}}^2_{n_m}(t_0)+\dot{\bar{v}}^2_{n_m}(t_0)}} \;,\; \frac{\dot{\bar{v}}_{n_m}(t_0)}{\sqrt{\dot{\bar{u}}^2_{n_m}(t_0)+\dot{\bar{v}}^2_{n_m}(t_0)}} \right\}$$

сходится.

Обозначим через $(u(t), v(t))$ решение однородной системы (2.2), удовлетворяющее следующим условиям: $u(t_0)=v(t_0)=0$, $\dot{u}(t_0)=\cos\varphi_0$, $\dot{v}(t_0)=\sin\varphi_0$. Это решение таково, что $r(t)=\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}$ при $t \geqslant t_0$ будет монотонно возрастать, т.е. $\dot{r}(t)>0$. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных следует, что найдется такое m_0, что для всех $m>m_0$ справедливы неравенства:

$$|r(t_0+1)-\bar{r}_{n_m}(t_0+1)|<\frac{1}{2}r(t_0+1), \quad |\dot{r}(t_0+1)-\dot{\bar{r}}_{n_m}(t_0+1)|<\frac{1}{2}\dot{r}(t_0+1),$$

где $\bar{r}_{n_m}(t)=\sqrt{\dfrac{\bar{u}^2_{n_m}(t)+\bar{v}^2_{n_m}(t)}{\dot{\bar{u}}^2_{n_m}(t_0)+\dot{\bar{v}}^2_{n_m}(t_0)}}$. Используя лемму 4, легко получаем, что все $\bar{r}_{n_m}(t)$ при $m>m_0$ и $t \geqslant t_0+1$ монотонно возрастают, вопреки их определению. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что последовательность $\left(\dot{\bar{u}}_n(t_0), \dot{\bar{v}}_n(t_0)\right)$ неограниченна, ложно.

Пусть $(\dot{\bar{u}}_0, \dot{\bar{v}}_0)$ одна из предельных точек последовательности $\left(\dot{\bar{u}}_n(t_0), \dot{\bar{v}}_n(t_0)\right)$. Обозначим через $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ решение однородной системы (2.2), удовлетворяющее следующим начальным условиям: $\bar{u}(t_0)=u_0$, $\bar{v}(t_0)=v_0$, $\dot{\bar{u}}(t_0)=\dot{\bar{u}}_0$, $\dot{\bar{v}}(t_0)=\dot{\bar{v}}_0$. Используя теорему о непрерывной зависимости решения от начальных данных и свойства решений $(\bar{u}_n(t), \bar{v}_n(t))$ нетрудно показать, что при $t \geqslant t_0$ $\bar{r}(t)=\sqrt{\bar{u}^2(t)+\bar{v}^2(t)}>0$, а $\dot{\bar{r}}(t)<0$. Покажем теперь, что $\bar{r}(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Для этого проинтегрируем уравнение (2.3) для $\bar{r}(t)$ по t от t_0 до ∞. Имеем:

$$-\dot{\bar{r}}(t_0)+2\int_{t_0}^{\infty} a_1(t)\dot{\bar{r}}(t)\,dt=\int_{t_0}^{\infty}\left(K_1(t)+2a_2(t)\bar{\omega}(t)+\bar{\omega}^2(t)\right)\bar{r}(t)\,dt,$$

где

$$\bar{\omega}(t)=\frac{\bar{u}(t)\dot{\bar{v}}(t)-\dot{\bar{u}}(t)\bar{v}(t)}{\bar{u}^2(t)+\bar{v}^2(t)}.$$

Очевидно, что

$$K_1(t)+2a_2(t)\bar{\omega}(t)+\bar{\omega}^2(t)\geq K_1(t)-a_2^2(t)\geq c>0 .$$

Следовательно, $c\int\limits_{t_0}^{\infty}\bar{\tau}(t)dt\leq-\dot{\bar{\tau}}(t_0)+2\int\limits_{t_0}^{\infty}|a_1(t)||\dot{\bar{\tau}}(t)|\,dt$.

Так как при $t\geq t_0$ $\dot{\bar{\tau}}(t)<0$, то $|\dot{\bar{\tau}}(t)|=-\dot{\bar{\tau}}(t)$, и, следовательно $\int\limits_{t_0}^{\infty}|a_1(t)||\dot{\bar{\tau}}(t)|dt\leq\bar{\tau}(t_0)\sup\limits_{t\geq t_0}|a_1(t)|$. Окончательно получаем:

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\bar{\tau}(t)dt\leq\frac{1}{c}\left(-\dot{\bar{\tau}}(t_0)+2\bar{\tau}(t_0)\sup\limits_{t\geq t_0}|a_1(t)|\right),$$

т.е. интеграл $\int\limits_{t_0}^{\infty}\bar{\tau}(t)\,dt$ сходится. Так как $\bar{\tau}(t)$ положительна и монотонно убывает, то последнее возможно только тогда, когда $\bar{\tau}(t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 6 (существование).

Пусть в уравнении (2.1) при любом $t\geq t_0$ выполнено соотношение $K_1(t)-a_2^2(t)\geq c>0$, а $f_1^2(t)+f_2^2(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Тогда для любого комплексного числа X_0 существует решение $X(t)$ неоднородного уравнения (2.1) такое, что $X(t_0)=X_0$ и $|X(t)|\to 0$ при $t\to\infty$.
Это решение дается формулой:

$$X(t)=X_0\tilde{X}(t)-\tilde{X}(t)\int\limits_{t_0}^{t}\left\{\frac{e^{-2\int\limits_{t_0}^{\tau}a(\alpha)d\alpha}}{\tilde{X}^2(\tau)}\int\limits_{\tau}^{\infty}f(\xi)\tilde{X}(\xi)e^{2\int\limits_{t_0}^{\xi}a(\alpha)d\alpha}d\xi\right\}d\tau ,$$

где $\tilde{X}(t)$ - решение однородного уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям: $\tilde{X}(t_0)=1$, $\tilde{\tau}(t)=|\tilde{X}(t)|\to 0$ при $t\to\infty$.

Доказательство:

Нетрудно проверить, что написанное выражение формально удовлетворяет уравнению (2.1). Поэтому для доказательства леммы нам остается показать, что написанное выражение действительно определено (т.е. интеграл $\int\limits_{\tau}^{\infty}f(\xi)\tilde{X}(\xi)e^{2\int\limits_{t_0}^{\xi}a(\alpha)d\alpha}d\xi$ при любом $\tau\geq t_0$ сходится) и стремится к нулю при $t\to\infty$. Очевидно, что

$$|x(t)| \leqslant |x_0||\tilde{x}(t)| + \left| \tilde{x}(t) \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{e^{-2\int_{t_0}^{\tau} a(\alpha)\,d\alpha}}{\tilde{x}^2(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} f(\xi)\, \tilde{x}(\xi)\, e^{2\int_{t_0}^{\xi} a(\alpha)\,d\alpha}\, d\xi \right\} d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant x_0\, \tilde{z}(t) + \tilde{z}(t) \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{e^{-2\int_{t_0}^{\tau} a_1(\alpha)\,d\alpha}}{\tilde{z}^2(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} |f(\xi)|\, \tilde{z}(\xi)\, e^{2\int_{t_0}^{\xi} a_1(\alpha)\,d\alpha}\, d\xi \right\} d\tau, \tag{2.4}$$

где $\tilde{z}(t) = |\tilde{x}(t)|$. Последнее выражение формально удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\int_{t_0}^{t} a_1(\alpha)\,d\alpha}\, \dot{\tilde{z}}(t) \right) - e^{2\int_{t_0}^{t} a_1(\alpha)\,d\alpha} \big(k_1(t) + 2a_2(t)\,\tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}^2(t) \big)\, \tilde{z}(t) = e^{2\int_{t_0}^{t} a_1(\alpha)\,d\alpha} \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}, \tag{2.5}$$

где

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{\tilde{u}(t)\,\dot{\tilde{v}}(t) - \dot{\tilde{u}}(t)\,\tilde{v}(t)}{\tilde{u}^2(t) + \tilde{v}^2(t)}, \qquad \tilde{x}(t) = \tilde{u}(t) + i\,\tilde{v}(t).$$

К уравнению (2.5) может быть применена теорема 5 работы /5/. Применительно к этому уравнению теорема 5 утверждает, что если оба интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \left\{ e^{-2\int_{t_0}^{t} a_1(\alpha)\,d\alpha} \int_{t_0}^{t} \big(k_1(\tau) + 2a_2(\tau)\,\tilde{\omega}(\tau) + \tilde{\omega}^2(\tau) \big)\, e^{2\int_{t_0}^{\tau} a_1(\alpha)\,d\alpha}\, d\tau \right\} dt,$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \left\{ \big(k_1(t) + 2a_2(t)\,\tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}^2(t) \big)\, e^{2\int_{t_0}^{t} a_1(\alpha)\,d\alpha} \int_{t_0}^{t} e^{-2\int_{t_0}^{\tau} a_1(\alpha)\,d\alpha}\, d\tau \right\} dt \tag{2.6}$$

расходятся, $|f(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, то правая часть выражения (2.4) действительно является решением уравнения (2.5), (т.е. интеграл $\int_{\tau}^{\infty} |f(\xi)|\, \tilde{z}(\xi)\, e^{2\int_{t_0}^{\xi} a_1(\alpha)\,d\alpha}\, d\xi$ при любом $\tau \geqslant t_0$ сходится; так как

$$\left|\int_{\tau}^{\infty} f(\xi)\tilde{x}(\xi)e^{2\int_{t_0}^{\xi} a(\alpha)d\alpha}d\xi\right| \leqslant \int_{\tau}^{\infty}|f(\xi)|\tilde{r}(\xi)e^{2\int_{t_0}^{\xi} a_1(\alpha)d\alpha}d\xi,$$

то отсюда будет следовать также сходимость интеграла $\int_{\tau}^{\infty} f(\xi)\tilde{x}(\xi)e^{2\int_{t_0}^{\xi} a(\alpha)d\alpha}d\xi$) и стремится к нулю при $t\to\infty$. Покажем, что интегралы (2.6) расходятся. Действительно из работ /9/ и /10/ известно, что необходимым и достаточным условием существования стремящегося к нулю при $t\to\infty$ решения однородного уравнения (2.5) является одновременная расходимость интегралов (2.6). Так как с помощью леммы 5 было показано, что однородное уравнение (2.5) имеет стремящееся к нулю при $t\to\infty$ решение $\tilde{r}(t)$, то интегралы (2.6) расходятся и теорема 5 применима. Лемма доказана.

Лемма 7 (единственность).

Пусть уравнение (2.1) по-прежнему удовлетворяет условиям леммы 6; тогда для любого комплексного числа X_0 решение $X(t)$ неоднородного уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям: $X(t_0)=X_0$ и $|x(t)|\to 0$ при $t\to\infty$, единственно.

Доказательство.

Для доказательства леммы, очевидно, достаточно доказать, что условиям $x(t_0)=0$ и $|x(t)|\to 0$ при $t\to\infty$ удовлетворяет только тривиальное решение однородного уравнения. Сделаем это. Предположим противное: пусть решение $x(t)\not\equiv 0$ однородного уравнения (2.1) удовлетворяет условиям: $x(t_0)=0$, $|x(t)|\to 0$ при $t\to\infty$. Тогда при некотором $t'>t_0$ $r(t)=|x(t)|$ имеет максимум, вопреки лемме 4. Лемма доказана.

Лемма 8.

Пусть в уравнении (2.1) функции $a(t)$ и $K(t)$ зависят от действительного параметра λ и непрерывны по λ при $\lambda=\lambda_0$; пусть далее при всех λ, лежащих в некоторой окрестности точки $\lambda=\lambda_0$, и при всех $t\geqslant t_0$ выполнено неравенство: $K_1(t,\lambda)-a_2^2(t,\lambda)\geqslant C>0$, где C не зависит от λ. Тогда решение $x(t,\lambda)$ однородного уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям $x(t_0,\lambda)=x_0$ и $|x(t,\lambda)|\to 0$ при $t\to\infty$, зависит непрерывно от λ при $\lambda=\lambda_0$, т.е. $x(t,\lambda)\to x(t,\lambda_0)$, а $\dot{x}(t,\lambda)\to\dot{x}(t,\lambda_0)$ при $\lambda\to\lambda_0$ равномерно на каждом конечном отрезке $[t_0,t_1]$.

Доказательство.

Для доказательства леммы, очевидно, достаточно доказать, что $\dot{x}(t_0,\lambda) \to \dot{x}(t_0,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$, где $\dot{x}(t_0,\lambda)$ есть значение первой производной при $t = t_0$ для решения $x(t,\lambda)$ однородного уравнения (2.1), удовлетворяющего условиям: $x(t_0,\lambda) = x_0$ и $|x(t,\lambda)| \to 0$ при $t \to \infty$. Докажем это. Для этого докажем сначала, что существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\lambda \in [\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta]$ $\dot{x}(t_0,\lambda)$ ограничено независящей от λ константой. Предположим, что это не так. Тогда найдется последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$ такая, что $|\dot{x}(t_0,\lambda_n)| \to \infty$ при $n \to \infty$. Последовательность $\frac{\dot{x}(t_0,\lambda_n)}{|\dot{x}(t_0,\lambda_n)|}$ ограничена и, следовательно, имеет предельную точку, по модулю равную единице. Пусть это будет $e^{i\varphi_0}$. Мы предположим сразу, что последовательность λ_n выбрана так, что последовательность $\frac{\dot{x}(t_0,\lambda_n)}{|\dot{x}(t_0,\lambda_n)|}$ сходится. Пусть $\bar{x}(t,\lambda_0)$ решение однородного уравнения (2.1) с $\lambda = \lambda_0$, удовлетворяющее начальным условиям: $\bar{x}(t_0,\lambda_0) = 0$, $\dot{\bar{x}}(t_0,\lambda_0) = e^{i\varphi_0}$. Из леммы 4 следует, что $|\bar{x}(t,\lambda_0)|$ при $t \geq t_0$ монотонно возрастает, т.е. $\frac{d}{dt}|\bar{x}(t,\lambda_0)| > 0$. Объединяя теорему о непрерывной зависимости решения от параметра с теоремой о непрерывной зависимости решения от начальных данных легко получаем, что существует n_0 такое, что при $n > n_0$ и $t = t_0 + 1$

$$\left| \frac{d}{dt}|\bar{x}(t,\lambda_0)| - \frac{\frac{d}{dt}|x(t,\lambda_n)|}{|\dot{x}(t_0,\lambda_n)|} \right| < \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}|\bar{x}(t,\lambda_0)|.$$

На основании леммы 4 отсюда следует, что при $n > n_0$ и $t \geq t_0 + 1$ все $|x(t,\lambda_n)|$ монотонно возрастают, вопреки их определению. Следовательно, требуемое $\delta > 0$ существует.

Покажем теперь, что $\dot{x}(t_0,\lambda) \to \dot{x}(t_0,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$. Предположим противное: пусть найдется последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $|\dot{x}(t_0,\lambda_n) - \dot{x}(t_0,\lambda_0)| > \varepsilon$. Из последовательности λ_n выберем подпоследовательность λ_{n_m}, такую, что последовательность $\dot{x}(t_0,\lambda_{n_m})$ сходится. Пусть $\tilde{x}_0$ ее предел. Очевидно, что $\tilde{x}_0 \neq \dot{x}(t_0,\lambda_0)$. Пусть $\tilde{x}(t,\lambda_0)$ решение однородного уравнения (2.1) с $\lambda = \lambda_0$, удовлетворяющее условиям: $\tilde{x}(t_0,\lambda_0) = x_0$, $\dot{\tilde{x}}(t_0,\lambda_0) = \tilde{x}_0$. В силу леммы 7 модуль $\tilde{x}(t,\lambda_0)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$. Следовательно, найдется такой момент времени $t_1 > t_0$, что при $t = t_1$ $\frac{d}{dt}|\tilde{x}(t,\lambda_0)| > 0$. В силу теорем о непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных данных найдется m_0 такое, что при $m > m_0$ и $t = t_1$

$$\left|\frac{d}{dt}|\tilde{x}(t,\lambda_0)| - \frac{d}{dt}|x(t,\lambda_{n_m})|\right| < \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\tilde{x}(t,\lambda_0)|,$$

т.е. на основании леммы 4 при $t \geqslant t_1$ и $m > m_0$ все $|x(t,\lambda_{n_m})|$ монотонно возрастают, вопреки определению. Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть однородное уравнение (2.1) по-прежнему удовлетворяет условиям леммы 5, а $x(t)$ есть стремящееся к нулю при $t \to \infty$ решение однородного уравнения (2.1). Тогда $\left|\dot{x}(t)e^{2\int_{t_0}^{t} a(\alpha)d\alpha}\right| \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство.

Для доказательства леммы потребуется несколько оценок. Начнем с них. Запишем уравнение (2.3) для $r(t) = |x(t)|$ в виде

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)\dot{r}(t)\right) - m(t)\tilde{k}(t)r(t) = 0, \tag{2.7}$$

где $m(t) = e^{2\int_{t_0}^{t} a_1(\alpha)d\alpha}$, а $\tilde{k}(t) = k_1(t) + 2a_2(t)\omega(t) + \omega^2(t)$.

Интегрируя (2.7) по t от t_0 до t получаем, что

$$m(t)\dot{r}(t) = m(t_0)\dot{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} m(\tau)\tilde{k}(\tau)r(\tau)\,d\tau.$$

Из леммы 7 работы /5/ следует, что $m(t)\dot{r}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, интеграл $\int_{t_0}^{\infty} m(\tau)\tilde{k}(\tau)r(\tau)\,d\tau$ сходится. Из его сходимости следует сходимость интеграла $\int_{t_0}^{\infty} m(\tau)r(\tau)\,d\tau$, так как $\tilde{k}(\tau) \geqslant c > 0$. Покажем, что интеграл $\int_{t_0}^{\infty} m(\tau)|\dot{r}(\tau)|\,d\tau$ также сходится. Интегрируя по частям и пользуясь тем, что $|\dot{r}(\tau)| = -\dot{r}(\tau)$, получаем:

$$\int_{t_0}^{t} m(\tau)|\dot{r}(\tau)|\,d\tau = -m(t)r(t) + m(t_0)r(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{m}(\tau)r(\tau)\,d\tau.$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства, положителен. Поэтому справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t} m(\tau)|\dot{r}(\tau)|d\tau \leq m(t_0)r(t_0) + \left|\int_{t_0}^{t} \dot{m}(\tau)r(\tau)\,d\tau\right| \leq$$

$$\leq m(t_0)r(t_0) + 2\sup_{t \geq t_0}|a_1(t)| \int_{t_0}^{\infty} m(\tau)r(\tau)d\tau ,$$

т.е. выражение $\int_{t_0}^{t} m(\tau)|\dot{r}(\tau)|d\tau$ ограничено при любом $t \geq t_0$ не зависящей от t константой. С другой стороны это выражение монотонно возрастает. Следовательно, по известной теореме анализа оно имеет предел при $t \to \infty$, т.е. интеграл $\int_{t_0}^{\infty} m(\tau)|\dot{r}(\tau)|d\tau$ сходится.

Нам нужно доказать, что $|\dot{x}(t)|\, m(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Нетрудно проверить, что $|\dot{x}(t)| = \sqrt{\dot{r}^2(t)+\omega^2(t)r^2(t)}$, где $\omega(t) = \dfrac{u(t)\dot{v}(t)-\dot{u}(t)v(t)}{u^2(t)+v^2(t)}$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $\dot{r}(t)\,m(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\omega(t)r(t)m(t) \to 0$ при $t \to \infty$. То, что $\dot{r}(t)m(t) \to 0$ при $t \to \infty$ доказано в лемме 7 работы /5/. Остается показать, что $\omega(t)r(t)m(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из уравнения (2.1) имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}(t)e^{2\int_{t_0}^{t} a(\alpha)d\alpha}\right) - e^{2\int_{t_0}^{t} a(\alpha)d\alpha} K(t)\,x(t) = 0 . \tag{2.8}$$

Интегрируя равенство (2.8) на промежутке от t_0 до t, получим:

$$\dot{x}(t)e^{2\int_{t_0}^{t} a(\alpha)d\alpha} = \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{2\int_{t_0}^{\tau} a(\alpha)d\alpha} K(\tau)\,x(\tau)\,d\tau .$$

Следовательно, $|\dot{x}(t)|m(t) \leq |\dot{x}(t_0)| + \int_{t_0}^{\infty} m(\tau)|K(\tau)|r(\tau)d\tau$, т.е. левая часть при любом $t \geq t_0$ ограничена не зависящей от t константой. Так как $|\dot{x}(t)| \geq \omega(t)r(t)$, то отсюда следует, что и $\omega(t)r(t)m(t)$ при любом $t \geq t_0$ ограничено той же константой.

Умножим первое уравнение однородной системы (2.2) на $-v$ и сложим со вторым уравнением однородной системы (2.2), умноженным на u. В результате получим:

$$u\ddot{v}-\ddot{u}v+2a_2(t)(u\dot{u}+v\dot{v})+2a_1(t)(u\dot{v}-\dot{u}v)-\kappa_2(t)(u^2+v^2)=0.$$

Путем элементарных преобразований это равенство превращается в следующее:

$$\dot{\omega}+2\left(\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}+a_1(t)\right)\omega+2a_2(t)\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}-\kappa_2(t)=0.$$

Интегрируя полученное уравнение для $\omega(t)$, легко получаем, что

$$\omega(t)=\frac{1}{m(t)r^2(t)}\left\{C_0-\int\limits_{t_0}^{t}m(\tau)r(\tau)\big(2a_2(\tau)\dot{r}(\tau)-\kappa_2(\tau)r(\tau)\big)d\tau\right\}.$$

Интеграл, стоящий в правой части полученного равенства, при $t\to\infty$ стремится к конечному пределу. Это следует из сходимости интегралов $\int\limits_{t_0}^{\infty}m(\tau)r(\tau)d\tau$ и $\int\limits_{t_0}^{\infty}m(\tau)|\dot{r}(\tau)|d\tau$. Поэтому это равенство можно заменить на следующее:

$$\omega(t)r(t)m(t)=\frac{C_0'}{r(t)}+\frac{1}{r(t)}\int\limits_{t}^{\infty}m(\tau)r(\tau)\big(2a_2(\tau)\dot{r}(\tau)-\kappa_2(\tau)r(\tau)\big)d\tau.$$

Из того, что $\omega(t)r(t)m(t)$, по доказанному выше, ограничено, следует, что $C_0'=0$. Следовательно,

$$\omega(t)r(t)m(t)\leq\frac{1}{r(t)}\int\limits_{t}^{\infty}m(\tau)r(\tau)\big(2|a_2(\tau)||\dot{r}(\tau)|+|\kappa_2(\tau)|\,r(\tau)\big)d\tau\leq$$

$$\leq 2\sup_{t\geq t_0}|a_2(t)|\int\limits_{t}^{\infty}m(\tau)|\dot{r}(\tau)|d\tau+\sup_{t\geq t_0}|\kappa_2(t)|\int\limits_{t}^{\infty}m(\tau)r(\tau)d\tau,$$

так как максимальное при $\tau\geq t$ значение $r(\tau)$, очевидно, принимает при $\tau=t$. Правая часть неравенства по доказанному стремится к нулю при $t\to\infty$. Следовательно, $\omega(t)r(t)m(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 10.

Пусть однородное уравнение (2.1) по-прежнему удовлетворяет условиям леммы 8, а функция $f(t)$ зависит от действительного параметра λ и удовлетворяет условиям:

1. Существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\lambda \in [\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta]$ и всех $t \geq t_0$ $|f(t,\lambda)| < C$, где C - константа;

2. Для любого $\lambda \in [\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta]$ $|f(t,\lambda)| \to 0$ при $t \to \infty$;

3. $f(t,\lambda)$ непрерывна по λ при $\lambda = \lambda_0$. Тогда решение $x(t,\lambda)$ неоднородного уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям: $x(t_0,\lambda) = x_0$ и $|x(t,\lambda)| \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$, непрерывно по λ при $\lambda = \lambda_0$, т.е. $x(t,\lambda) \to x(t,\lambda_0)$, а $\dot{x}(t,\lambda) \to \dot{x}(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$ равномерно на каждом конечном отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство.

Согласно лемме 7

$$x(t,\lambda) = x_0\tilde{x}(t,\lambda) - \tilde{x}(t,\lambda)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{e^{-2\int_{t_0}^{\tau} a(\alpha,\lambda)d\alpha}}{\tilde{x}^2(\tau,\lambda)}\int_{\tau}^{\infty} f(\xi,\lambda)\tilde{x}(\xi,\lambda)e^{2\int_{t_0}^{\xi} a(\alpha,\lambda)d\alpha}d\xi\right\}d\tau,$$

где $\tilde{x}(t,\lambda)$ есть решение однородного уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям: $\tilde{x}(t_0,\lambda) = 1$, $|\tilde{x}(t,\lambda)| \to 0$ при $t \to \infty$. Так как согласно лемме 8 $\dot{\tilde{x}}(t,\lambda) \to \dot{\tilde{x}}(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$ равномерно на каждом конечном отрезке $[t_0, t_1]$, то, опираясь на лемму 9, можно написать, что при $\lambda \to \lambda_0$

$$\int_{\tau}^{\infty} K(\xi,\lambda)\tilde{x}(\xi,\lambda)e^{2\int_{t_0}^{\xi} a(\alpha,\lambda)d\alpha}d\xi = -\dot{\tilde{x}}(\tau,\lambda)\,e^{2\int_{t_0}^{\tau} a(\alpha,\lambda)d\alpha} \to$$

$$\to -\dot{\tilde{x}}(\tau,\lambda_0)e^{2\int_{t_0}^{\tau} a(\alpha,\lambda_0)d\alpha} = \int_{\tau}^{\infty} K(\xi,\lambda_0)\tilde{x}(\xi,\lambda_0)e^{2\int_{t_0}^{\xi} a(\alpha,\lambda_0)d\alpha}d\xi$$

равномерно по τ на каждом конечном отрезке $[t_0, t_1]$. Отсюда, используя равномерную ограниченность функции $f(t,\lambda)$, следовательно, и функции $\frac{f(t,\lambda)}{K(t,\lambda)}$, нетрудно показать, что при $\lambda \to \lambda_0$

$$\int_{\tau}^{\infty} f(\xi,\lambda)\,\tilde{x}(\xi,\lambda)\, e^{2\int_{t_0}^{\xi} a(\alpha,\lambda)d\alpha} d\xi \to \int_{\tau}^{\infty} f(\xi,\lambda_0)\,\tilde{x}(\xi,\lambda_0)\, e^{2\int_{t_0}^{\xi} a(\alpha,\lambda_0)d\alpha} d\xi$$

равномерно по τ на каждом конечном отрезке $[t_0, t_1]$. Отсюда совсем просто следует, что при $\lambda \to \lambda_0$ выражение для $x(t,\lambda)$ и получающееся из него дифференцированием по t выражение для $\dot{x}(t,\lambda)$ соответственно стремится к $x(t,\lambda_0)$ и $\dot{x}(t,\lambda_0)$ равномерно на каждом конечном отрезке $[t_0, t_1]$. Лемма доказана.

§ 3. Теорема существования и единственности граничных траекторий системы (I_ε)

В этом параграфе будет выяснен вопрос о существовании и единственности граничных траекторий системы (I_ε) при комплексных значениях параметра ε. Однако будет удобнее рассмотреть этот вопрос для системы (1.2). Поэтому, прежде чем давать формулировку соответствующей теоремы для системы (1.2), мы должны ответить на два вопроса:

1. Все ли граничные траектории системы (I_ε) переходят при замене (1.1) в граничные траектории системы (1.2) в смысле ранее приведенного определения граничных траекторий?

2. Что понимать под граничной траекторией системы (1.2) при комплексных значениях ε? Ответ на первый вопрос дает следующая лемма.

Лемма 11.

Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом действительном ε, заключенном между $-\varepsilon_0$ и ε_0, для любой граничной траектории $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ системы (I_ε) найдется такой момент времени $t_1(\varepsilon)$, что при $t > t_1(\varepsilon)$ оба выражения

$$\frac{1}{\alpha}\left[(x_\varepsilon(t)-x_s)\cos\varphi+(y_\varepsilon(t)-y_s)\sin\varphi\right]-\tilde{u}_s(t,\varepsilon),$$

$$\alpha\left[-(x_\varepsilon(t)-x_s)\sin\varphi+(y_\varepsilon(t)-y_s)\cos\varphi\right]-\tilde{v}_s(t,\varepsilon)$$

монотонно стремятся к нулю с ростом t. Здесь $(\tilde{u}_s(t,\varepsilon)\ ,\ \tilde{v}_s(t,\varepsilon))$ – периодическое решение системы (1.6), построенное в лемме 3, а α и φ те же, что в замене (1.4).

Доказательство:

Очевидно, что

$$u_\varepsilon(t)=-\tilde{u}_s(t,\varepsilon)+\frac{1}{\alpha}\left[(x_\varepsilon(t)-x_s)\cos\varphi+(y_\varepsilon(t)-y_s)\sin\varphi\right],$$

$$v_\varepsilon(t)=-\tilde{v}_s(t,\varepsilon)+\alpha\left[-(x_\varepsilon(t)-x_s)\sin\varphi+(y_\varepsilon(t)-y_s)\cos\varphi\right]$$

есть решение системы (1.2). Согласно определению граничных траекторий существует момент времени $t_1^*(\varepsilon)$ такой, что при $t>t_1(\varepsilon)$ $x_s'(\varepsilon)<x_\varepsilon(t)<x_s''(\varepsilon)$, $y_s'(\varepsilon)<y_\varepsilon(t)<y_s''(\varepsilon)$ (здесь предполагается, что $x_s'(\varepsilon)<x_s''(\varepsilon)$, а $y_s'(\varepsilon)<y_s''(\varepsilon)$; в том случае, когда либо $x_s'(\varepsilon)=x_s''(\varepsilon)$, либо $y_s'(\varepsilon)<y_s''(\varepsilon)$, доказательство подвергается незначительным изменениям). Это означает, что найдутся $\varepsilon_0'>0$ и константа $L_1>0$ такие, что при $-\varepsilon_0'<\varepsilon<\varepsilon_0'$ и $t>t_1(\varepsilon)$ $|x_s-x_\varepsilon(t)|<L_1\varepsilon$ и $|y_s-y_\varepsilon(t)|<L_1\varepsilon$. С другой стороны, очевидно, существуют $\varepsilon_0''>0$ и $L_2>0$ такие, что при любом t и $-\varepsilon_0''<\varepsilon<\varepsilon_0''$ $|\tilde{u}_s(t,\varepsilon)|<L_2\varepsilon$ и $|\tilde{v}_s(t,\varepsilon)|<L_2\varepsilon$. Все это взятое вместе означает, что существуют $\tilde{\varepsilon}_0=\min(\varepsilon_0',\varepsilon_0'')$ и константа $L=\max\left(L_2+\frac{\sqrt{2}L_1}{\alpha},\ L_2+\sqrt{2}L_1\alpha\right)$ такие, что при $-\tilde{\varepsilon}_0<\varepsilon<\tilde{\varepsilon}_0$ и $t>t_1(\varepsilon)$ $|u_\varepsilon(t)|<L\varepsilon$, $|v_\varepsilon(t)|<L\varepsilon$. Покажем, что существует $\varepsilon_0>0$ такое, что при $-\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_0$ полученным оценкам удовлетворяют только граничные траектории системы (1.2). Для этого сделаем в системе (1.2) замену: $u=\varepsilon x$, $v=\varepsilon y$. В результате получим:

$$\dot{x}=\lambda y+\varepsilon R(x,y,t,\varepsilon),$$
$$\dot{y}=\lambda x+\varepsilon S(x,y,t,\varepsilon).$$

Далее, используя лемму Адамара (см. /12/, стр. 81–82), запишем полученную систему в виде:

$$\dot{x} = \lambda y + \varepsilon r(x,y,t,\varepsilon)\, x + \varepsilon s(x,y,t,\varepsilon)\, y,$$
$$\dot{y} = \lambda x + \varepsilon p(x,y,t,\varepsilon)\, x + \varepsilon q(x,y,t,\varepsilon)\, y.$$

Продифференцируем теперь первое уравнение по t и в полученном результате исключим $\dot{y}$ с помощью второго уравнения. В итоге получим:

$$\ddot{x} = \varepsilon\left(r + x r'_x + y s'_x\right)\dot{x} + \left[(\lambda+\varepsilon p)(\lambda+\varepsilon s+\varepsilon x r'_y+\varepsilon y s'_y)+\varepsilon r'_t\right]x +$$
$$+\varepsilon\left[(\lambda+\varepsilon s+\varepsilon x r'_y+\varepsilon y s'_y)q + s'_t\right]y.$$

Наконец, заменим y, стоящее в конце правой части, с помощью первого уравнения. Окончательно получим:

$$\ddot{x} - \varepsilon\left(r + q + x r'_x + y s'_x + \varepsilon q\frac{x r'_y + y s'_y}{\lambda+\varepsilon s} + \frac{s'_t}{\lambda+\varepsilon s}\right)\dot{x} -$$
$$-\left[\left(1+\varepsilon\frac{x r'_y + y s'_y}{\lambda+\varepsilon s}\right)\left((\lambda+\varepsilon s)(\lambda+\varepsilon p)-\varepsilon^2 q r\right)+\varepsilon r'_t - \varepsilon^2\frac{r s'_t}{\lambda+\varepsilon s}\right]x = 0.$$

Пусть C равно максимальному значению, принимаемому функцией $\ell(x,y,t,\varepsilon)=$

$$= |r(x,y,t,\varepsilon)| + |s(x,y,t,\varepsilon)| + |p(x,y,t,\varepsilon)| + |q(x,y,t,\varepsilon)| +$$
$$+ |x r'_y(x,y,t,\varepsilon)| + |y s'_y(x,y,t,\varepsilon)| + |x p'_x(x,y,t,\varepsilon)| + |y q'_x(x,y,t,\varepsilon)| +$$
$$+ |r'_t(x,y,t,\varepsilon)| + |s'_t(x,y,t,\varepsilon)| + |p'_t(x,y,t,\varepsilon)| + |q'_t(x,y,t,\varepsilon)|$$

при изменении x, y, t, ε в кубе $|x| \le 2L, |y| \le 2L, |t| \le \pi$ и $|\varepsilon| \le \tilde{\varepsilon}_0$. Возьмем $\varepsilon_0 = \min\left(\tilde{\varepsilon}_0, \frac{1}{6C}, \frac{\lambda^2}{6C}\right)$. Нетрудно убедиться, что при $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $|x| \le 2L$ и $|y| \le 2L$

$$\left(1+\varepsilon\frac{x r'_y + y s'_y}{\lambda+\varepsilon s}\right)\left((\lambda+\varepsilon s)(\lambda+\varepsilon p)-\varepsilon^2 q r\right)+\varepsilon r'_t-\varepsilon^2\frac{r s'_t}{\lambda+\varepsilon s} > \varepsilon_0$$

при любом t. Используя этот факт и лемму 4, нетрудно убедиться, что, если в какой-нибудь момент $t = t'$ $x_\varepsilon(t')\dot{x}_\varepsilon(t') \geqslant 0$ и $|x_\varepsilon(t')| + |\dot{x}_\varepsilon(t')| > 0$, то при $t \geqslant t'$ $x_\varepsilon^2(t)$ будет монотонно возрастать по крайней мере до тех пор пока либо $|x_\varepsilon(t)|$ станет больше $2L$, либо $|\dot{x}_\varepsilon(t)|$ станет больше $2L$. Так как при $t > t_1(\varepsilon)$ и $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ решение $\left(x_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}u_\varepsilon(t),\ y_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}v_\varepsilon(t)\right)$ удовлетворяет условию $|x_\varepsilon(t)| < L, |y_\varepsilon(t)| < L$, то отсюда следует, что при $t > t_1(\varepsilon)$ $x_\varepsilon(t)\dot{x}_\varepsilon(t) < 0$. Применив далее рассуждения леммы 5, нетрудно показать, что $\lim\limits_{t\to\infty} x_\varepsilon(t) = 0$. Почти дословным повторением приведенных выше рассуждений доказывается аналогичное утверждение для $y_\varepsilon(t)$. Лемма доказана.

Сформулируем теперь следующее определение: решение $(u_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t))$ системы (1.2) назовем граничным, если для него найдется такой момент времени $t_1(\varepsilon)$, что при $t > t_1(\varepsilon)$ $|u_\varepsilon(t)|$ и $|v_\varepsilon(t)|$ монотонно стремятся к нулю с ростом t. Это определение имеет смысл и при комплексных ε. При действительном ε оно, очевидно, совпадает с приведенным выше определением граничных траекторий. Полезность этого определения выясняется в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть точка $(0,0)$ является положением равновесия для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda y + p_0(x,y) + \varepsilon p_1(x,y,t,\varepsilon), \\ \dot{y} &= \lambda x + q_0(x,y) + \varepsilon q_1(x,y,t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\lambda > 0$, а разложение функций $p_0(x,y)$ и $q_0(x,y)$ в ряд в окрестности точки $(0,0)$ начинается с членов не ниже второго порядка. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для любых комплексных ε и x_0, удовлетворяющих условиям $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|x_0| < \delta_0$ и любого t_0 существует и единственно решение $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ системы (3.1) такое, что $x_\varepsilon(t_0) = x_0$, $|x_\varepsilon(t)| + |y_\varepsilon(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, для всех $t \geqslant t_0$ $\frac{d}{dt}|x_\varepsilon(t)| < 0$ и $\frac{d}{dt}|y_\varepsilon(t)| < 0$.

Доказательство теоремы содержится в следующих пяти леммах.

Лемма 12.

Существуют $\varepsilon_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$, для которых найдутся две константы $C_0 > 0$ и $T_0 > 0$ такие, что для любых t_0, ε, $\delta > 0$, x_0 и y_0 (ε, x_0 и y_0, вообще говоря, комплексные), удовлетворяющих условиям $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, $\delta < \delta_1$, $|x_0| \leqslant \delta$, $|y_0| = C_0\delta$, решение системы (3.1), удовлетворяющее условиям $x_\varepsilon(t_0) = x_0$, $y_\varepsilon(t_0) = y_0$, существует для всех $t \in [t_0, t_0 + T_0]$ и $|x_\varepsilon(t_0 + T_0)| > \frac{3}{2}\delta$.

Доказательство.

Сделаем в системе (3.1) замену $x = \delta u$, $y = \delta v$. После замены получим систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \lambda v + A(u, v, t, \varepsilon, \delta), \\ \dot{v} &= \lambda u + B(u, v, t, \varepsilon, \delta), \end{aligned} \tag{3.2}$$

в которой функции $A(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ и $B(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ будут аналитическими по переменным u, v, ε, δ и периодическими по переменной t; очевидно, $A(u,v,t,0,0) = B(u,v,t,0,0) \equiv 0$.

Пусть $(u_0(t), v_0(t))$ решение системы (3.2) с $\varepsilon = \delta = 0$, удовлетворяющее условиям: $u_0(t_0) = u_0$, $v_0(t_0) = v_0$, где $|u_0| \leqslant 1$, а $|v_0| = C_0$. Очевидно, что

$$u_0(t) = u_0 \operatorname{ch} \lambda(t - t_0) + v_0 \operatorname{sh} \lambda(t - t_0),$$

$$v_0(t) = u_0 \operatorname{sh} \lambda(t - t_0) + v_0 \operatorname{ch} \lambda(t - t_0).$$

Пусть $u_0 = |u_0| e^{i\varphi}$, а $v_0 = C_0 e^{i\psi}$. Тогда $|u_0(t)|^2 = |u_0|^2 ch\lambda(t-t_0) +$ $+ 2|u_0| C_0 \cos(\varphi-\psi) sh\lambda(t-t_0) ch\lambda(t-t_0) + C_0^2 sh^2\lambda(t-t_0)$.

Возьмем $t = t_0 + T_0$, где $T_0 > 0$ – произвольно. Тогда $|u_0(t_0+T_0)|^2 =$ $|u_0|^2 ch\lambda T_0 + 2|u_0| C_0 \cos(\varphi-\psi) sh\lambda T_0 ch\lambda T_0 + C_0^2 sh^2\lambda T_0$.

Для произвольного $R_0 > 0$ возьмем $C_0(R_0) = \dfrac{R_0 + |u_0| ch\lambda T_0}{sh\lambda T_0}$.

Подставив в выражение для $|u_0(t_0+T_0)|^2$, получим, что $|u_0(t_0+T_0)|^2 \geqslant R_0^2$ независимо от разности фаз $\varphi - \psi$.

Пусть $(u_{\delta,0}(t), v_{\delta,0}(t))$ решение системы (3.2) с $\varepsilon = 0$, удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и решение $(u_0(t), v_0(t))$. Из теоремы о дифференцируемости решения по параметру δ и из компактности множества (u_0, v_0) таких, что $|u_0| \leqslant 1$, $|v_0| = C_0$, следует, что для любых $T_0 > 0$ и $C_0 > 0$ найдутся $\delta(T_0, C_0) > 0$ и $M(T_0, C_0) > 0$ такие, что при любом $|\delta| < \delta(T_0, C_0)$ и любом $t \in [t_0, t_0 + T_0]$

$$|u_{\delta,0}(t) - u_0(t)| + |v_{\delta,0}(t) - v_0(t)| < M(T_0, C_0)\,|\delta|.$$

Пусть, наконец, $(u_{\delta,\varepsilon}(t), v_{\delta,\varepsilon}(t))$ решение системы (3.2), удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и решение $(u_{\delta,0}(t), v_{\delta,0}(t))$. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра ε следует, что для любых $T_0 > 0$, $C_0 > 0$ и δ $(|\delta| > 0)$ найдется $\varepsilon(T_0, C_0, \delta) > 0$ такое, что, если $|\varepsilon| < \varepsilon(T_0, C_0, \delta)$, то для любого $t \in [t_0, t_0 + T_0]$

$$|u_{\delta,\varepsilon}(t) - u_{\delta,0}(t)| + |v_{\delta,\varepsilon}(t) - v_{\delta,0}(t)| < |\delta|.$$

В силу того, что при $\varepsilon \neq 0$ система (3.2) перестает быть автономной $\varepsilon(T_0, C_0, \delta)$ еще, вообще говоря, будет зависеть и от t_0. Однако, используя периодическую зависимость системы (3.2) от времени, нетрудно показать, что $\varepsilon(T_0, C_0, \delta)$ можно выбрать независящим от t_0. В силу полученных неравенств имеем:

$$|u_{\varepsilon,\delta}(t_0+T_0)|^2 > |u_{\delta,0}(t_0+T_0)|^2 - |\delta|^2 > |u_0(t_0+T_0)|^2 - (1 + M^2(T_0, C_0))|\delta|^2$$

при любом $|\delta| < \delta(T_0, C_0)$ и любом $|\varepsilon| < \varepsilon(T_0, C_0, \delta)$.

Возьмем теперь произвольные $C_0>0$ и $T_0>0$ такими, чтобы

$$R_0(T_0,C_0) = C_0\, sh\lambda T_0 - |u_0|\, ch\lambda T_0 = 2 .$$

Пусть далее $\delta_1 \doteq \delta(T_0,C_0)$ так мало, что $(1+M^2(T_0,C_0))\delta_1^2 < \frac{7}{4}$ и пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon(T_0,C_0,\delta_1)$. Тогда получаем, что при любом $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ и любом $|\delta|<\delta_1$ $|u_{\delta,\varepsilon}(t_0+T_0)|>\frac{3}{2}$. Переходя к переменным (x,y) получаем, что $|x_\varepsilon(t_0+T_0)| > \frac{3}{2}\delta$. Лемма доказана.

Лемма 13. Если решение $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ системы (3.2) определено для любого $t\in[t_0,t_1)$ и удовлетворяет условию $|x_\varepsilon(t)|+|y_\varepsilon(t)| < C$, где C константа, то существуют пределы $x_\varepsilon(t_1) = \lim\limits_{t\to t_1} x_\varepsilon(t)$, $y_\varepsilon(t_1) = \lim\limits_{t\to t_1} y_\varepsilon(t)$.

Доказательство.

Предположим противное: тогда найдутся две последовательности $t_n'\to t_1$ и $t_n''\to t_1$ при $n\to\infty$ такие, что пределы

$$x_0' = \lim_{n\to\infty} x_\varepsilon(t_n'),\quad y_0' = \lim_{n\to\infty} y_\varepsilon(t_n'),\quad x_0'' = \lim_{n\to\infty} x_\varepsilon(t_n''),\quad y_0'' = \lim_{n\to\infty} y_\varepsilon(t_n'')$$

существуют и $|x_0'-x_0''|+|y_0'-y_0''| = r_0 > 0$. Пусть $(x_\varepsilon'(t), y_\varepsilon'(t))$ решение системы (3.2), удовлетворяющее условиям: $x_\varepsilon'(t_1)=x_0'$, $y_\varepsilon'(t_1)=y_0'$; пусть далее $(x_\varepsilon''(t), y_\varepsilon''(t))$ решение системы (3.2), удовлетворяющее условиям: $x_\varepsilon''(t_1)=x_0''$, $y_\varepsilon''(t_1)=y_0''$. Очевидно, существует $\Delta>0$ такое, что при всех $t\in[t_1-\Delta, t_1+\Delta]$

$$|x_\varepsilon'(t)-x_\varepsilon''(t)| + |y_\varepsilon'(t)-y_\varepsilon''(t)| > \frac{3}{4} r_0 .$$

Решение $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ удовлетворяет условиям: $x_\varepsilon(t_n') = x_0' + \alpha_n'$, $y_\varepsilon(t_n') = y_0' + \beta_n'$, где $t_n'\to t_1$, а $|\alpha_n'|+|\beta_n'|\to 0$ при $n\to\infty$. На основании теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных следует, что существует n_0 такое, что решение $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ системы (3.1), удовлетворяющее условиям $x_\varepsilon(t_n')=x_0'+\alpha_n'$, $y_\varepsilon(t_n')=y_0'+\beta_n'$ при $n>n_0$ и любом $t\in[t_1-\Delta, t_1+\Delta]$ удовлетворяет неравенству $|x_\varepsilon(t)- x_\varepsilon'(t)|+|y_\varepsilon(t)-y_\varepsilon'(t)| < \frac{r_0}{4}$. Сделав аналогичную оценку в окрестности решения $(x_\varepsilon''(t), y_\varepsilon''(t))$, мы получим, что для всех $t\in[t_1-\Delta, t_1+\Delta]$

$$0=|x_\varepsilon(t)-x_\varepsilon(t)|+|y_\varepsilon(t)-y_\varepsilon(t)|\geqslant|x'_\varepsilon(t)-x''_\varepsilon(t)|+$$
$$+|y'_\varepsilon(t)-y''_\varepsilon(t)|-|x'_\varepsilon(t)-x_\varepsilon(t)|-|y'_\varepsilon(t)-y_\varepsilon(t)|-$$
$$-|x''_\varepsilon(t)-x_\varepsilon(t)|-|y''_\varepsilon(t)-y_\varepsilon(t)|>\frac{3}{4}r_0-\frac{1}{4}r_0-\frac{1}{4}r_0=\frac{1}{4}r_0>0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 14. Существуют $\varepsilon_2>0$ и $\delta_2>0$ такие, что для любых комплексных ε и x_0 таких, что $|\varepsilon|<\varepsilon_2$, а $|x_0|=\delta<\delta_2$, найдется y_0 такое, что решение системы (3.2), удовлетворяющее условиям: $x_\varepsilon(t_0)=x_0$, $y_\varepsilon(t_0)=y_0$, будет существовать при всех $t\geqslant t_0$ и при всех $t\geqslant t_0$ будет удовлетворять условию: $|x_\varepsilon(t)|\leqslant\delta$.

Доказательство.

Как и при доказательстве леммы 12, с помощью замены $x=\delta u$, $y=\delta v$ перейдем от системы (3.1) к системе (3.2).

Пусть $(u_{\varphi,\beta}(t),\ v_{\varphi,\beta}(t))$ решение системы (3.2) с $\varepsilon=\delta=0$, удовлетворяющее условиям: $u_{\varphi,\beta}(t_0)=u_0$, $v_{\varphi,\beta}(t_0)=-u_0(1+\beta e^{i\varphi})$, где $|u_0|=1$, а $0\leqslant\beta<1$. Очевидно, что

$$u_{\varphi,\beta}(t)=-u_0\frac{\beta}{2}e^{i\varphi}e^{\lambda(t-t_0)}+u_0\left(1+\frac{\beta}{2}e^{i\varphi}\right)e^{-\lambda(t-t_0)},$$
$$v_{\varphi,\beta}(t)=-u_0\frac{\beta}{2}e^{i\varphi}e^{\lambda(t-t_0)}-u_0\left(1+\frac{\beta}{2}e^{i\varphi}\right)e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Пусть $t_1(\varphi,\beta)>t_0$ – момент времени, для которого $|u_{\varphi,\beta}(t)|=1$. Определим его, решая следующее уравнение:

$$\left(1+\beta\cos\varphi+\frac{\beta^2}{4}\right)e^{-2\lambda(t-t_0)}-\left(\beta\cos\varphi+\frac{\beta^2}{2}\right)+\frac{\beta^2}{4}e^{2\lambda(t-t_0)}=1,$$

Путем элементарных вычислений находим, что $t_1(\varphi,\beta) = t_a + \frac{1}{2\lambda}\ln\left[\frac{4}{\beta^2}\left(1+\beta\cos\varphi+\frac{\beta^2}{4}\right)\right]$.

Таким образом, при любом $0<\beta<1$ $u_{\varphi,\beta}(t_1(\varphi,\beta))$ дает непрерывное отображение окружности $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ в окружность $|u|=1$. Покажем, что это отображение взаимно-однозначно. Нетрудно проверить, что $u_{\varphi,\beta}(t_1(\varphi,\beta)) = u_0 e^{i\delta(\varphi)}$, где $\delta(\varphi) = \operatorname{arctg}\dfrac{(1+\beta\cos\varphi)\sin\varphi}{(1+\beta\cos\varphi)\cos\varphi-\frac{\beta}{2}}$.

При изменении φ от нуля до 2π $\delta(\varphi)$ будет монотонно возрастать, так как $\delta'(\varphi) = \dfrac{1+\frac{3}{2}\beta\cos\varphi+\frac{1}{2}\beta^2}{1+\beta\cos\varphi+\frac{1}{4}\beta^2} > 0$ при любом φ и любом β, заключенном строго между нулем и единицей. Покажем теперь, что при изменении φ от нуля до 2π $\delta(\varphi)$ изменяется от $\delta(0)$ до $\delta(0)+2\pi$. Для доказательства этого утверждения сосчитаем разность

$$\delta(2\pi)-\delta(0) = \int_0^{2\pi}\delta'(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1+\frac{3}{2}\beta\cos\varphi+\frac{1}{2}\beta^2}{1+\beta\cos\varphi+\frac{1}{4}\beta^2}\,d\varphi .$$

Используя равенство

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+\alpha\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (0\leqslant\alpha<1),$$

нетрудно проверить, что интересующий нас интеграл равен 2π. Утверждение доказано.

В дальнейшем нам потребуются величины интегралов $J_n = \int_{(n-1)\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2}}\delta'(\varphi)\,d\varphi$ $(n=1,2,3,4)$.

Используя формулу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+\alpha\cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \qquad (0\leqslant\alpha<1),$$

нетрудно проверить, что $J_1 = J_4 = \frac{3}{4}\pi - \operatorname{arctg}\frac{2-\beta}{2+\beta}$,

а $J_2 = J_3 = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2-\beta}{2+\beta}$.

Для $\beta=\frac{1}{3}$ определим $t^+(\varphi) = \tau + t_1(\varphi,\frac{1}{3})$ и $t^-(\varphi) = -\tau + t_1(\varphi,\frac{1}{3})$, где $\tau>0$ так мало, что для всех $t\in[t^-(\varphi),t^+(\varphi)]$ выполнено неравенство $\left|u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t) - u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\frac{1}{3}))\right| < \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{7}\right)$.

Выбор τ подчиним условию: $\tau < \frac{1}{\lambda}\ln 2$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$|u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t^+(\varphi))| = \sqrt{1+(1+\tfrac{1}{3}\cos\varphi)(e^{2\lambda\tau}-1)+\tfrac{1}{36}(e^{\lambda\tau}-e^{-\lambda\tau})^2} >$$

$$> 1+\tfrac{1}{3}\,\mathrm{sh}\,\lambda\tau ,$$

а

$$|u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t^-(\varphi))| = \sqrt{1-(1+\tfrac{1}{3}\cos\varphi)(1-e^{2\lambda\tau})+\tfrac{1}{36}(e^{\lambda\tau}-e^{-\lambda\tau})^2} <$$

$$< 1-\tfrac{1}{3}\,\mathrm{sh}\,\lambda\tau ,$$

т.е. $u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t^+(\varphi))$ находится вне круга $|u|=1$ на расстоянии большем $\frac{1}{3}\mathrm{sh}\,\lambda\tau$ от границы, а $u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t^-(\varphi))$ находится внутри круга $|u|=1$ на расстоянии большем $\frac{1}{3}\mathrm{sh}\,\lambda\tau$ от границы. Очевидно, что $\frac{1}{3}\mathrm{sh}\,\lambda\tau < \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{7}\right)$.

Пусть теперь $(u_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta), v_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta))$ решение системы (3.2), удовлетворяющее следующим условиям: $u_{\varphi,\beta}(t_0,\varepsilon,\delta)=u_0$, $v_{\varphi,\beta}(t_0,\varepsilon,\delta)=-u_0(1+\beta e^{i\varphi})$, где $|u_0|=1$, а $0\leq\beta\leq 1$. На основании теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров ε, δ существуют такие $\varepsilon_2>0$ и $\delta_2>0$, что для всех $t\in[t_0, t^+(\varphi)]$ и всех $|\varepsilon|<\varepsilon_2$, $|\delta|<\delta_2$ $|u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t,\varepsilon,\delta)-u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t)|<\frac{1}{3}\mathrm{sh}\,\lambda\tau$. Пользуясь тем, что система (3.2) зависит от t периодически, нужные $\varepsilon_2>0$ и $\delta_2>0$ можно выбрать независящими от t_0. Кроме того, выбор ε_2 и δ_2 подчиним условию $\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_1$, $\delta_2\leqslant\delta_1$, где $\varepsilon_1>0$ и $\delta_1>0$ таковы, что для них справедлива лемма 12 с $C_0=2$. (Как это следует из доказательства леммы 12, в качестве C_0 можно брать любое число большее единицы). Покажем, что решения $(u_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta), v_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta))$ делятся на два типа: на решения, которые покидают цилиндр $|u|\leqslant 1$, и на решения, которые остаются в области

$|u| \leq 1$, $|v| \leq 2$ и согласно лемме 13 существуют при всех $t > t_0$. Действительно, предположим противное: пусть найдется решение ($u_{\varphi_0,\beta_0}(t,\varepsilon,\delta)$, $v_{\varphi_0,\beta_0}(t,\varepsilon,\delta)$) и момент времени $t_1 > t_0$ такой, что $|u_{\varphi_0,\beta_0}(t_1,\varepsilon,\delta)| \leq 1$, а $|v_{\varphi_0,\beta_0}(t_1,\varepsilon,\delta)| > 2$. Так как при $t = t_0$ $|v_{\varphi_0,\beta_0}(t_0,\varepsilon,\delta)| \leq \frac{4}{3}$, то найдется t' $(t_1 > t' > t_0)$ такое, что $|v_{\varphi_0,\beta_0}(t',\varepsilon,\delta)| = 2$. Из леммы 12 следует, что решение $(u_{\varphi_0,\beta_0}(t,\varepsilon,\delta), v_{\varphi_0,\beta_0}(t,\varepsilon,\delta))$ покинет цилиндр $|u| \leq 1$.

Теперь мы можем закончить доказательство леммы. Предположим, что все решения $(u_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta), v_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta))$ покидают цилиндр $|u| \leq 1$, т.е. для каждой пары (φ,β) найдется $t^*(\varphi,\beta,\varepsilon,\delta) > t_0$ такое, что $|u_{\varphi,\beta}(t^*(\varphi,\beta,\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)| > 1$. Пусть $C_1 = [0, \frac{\pi}{2}]$, $C_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $C_1' = [\pi, \frac{3}{2}\pi]$, $C_2' = [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ и пусть $t_1(\varphi,\varepsilon,\delta)$, заключенное между $t^-(\varphi)$ и $t^+(\varphi)$, таково, что $|u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)| = 1$. В силу выбора $t^-(\varphi)$ $t^+(\varphi)$, ε_2 и δ_2 такое $t_1(\varphi,\varepsilon,\delta)$ существует для всех φ и всех $|\varepsilon| < \varepsilon_2$, $|\delta| < \delta_2$. С помощью $t_1(\varphi,\varepsilon,\delta)$ мы определим отображение $u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)$ окружности $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ в окружность $|u| = 1$. Это отображение близко к отображению $u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\frac{1}{3}))$ в том смысле, что образы множеств C_i и C_i' $(i = 1,2)$ при отображении $u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)$ не имеют общих точек. Действительно, пусть $\varphi \in C_{i_0}$, а $\varphi' \in C_{i_0}'$. Тогда

$$|u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta) - u_{\varphi',\frac{1}{3}}(t_1(\varphi',\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)| \geq$$

$$\geq |u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\tfrac{1}{3})) - u_{\varphi',\frac{1}{3}}(t_1(\varphi',\tfrac{1}{3}))| - |u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\tfrac{1}{3})) -$$

$$- u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\varepsilon,\delta))| - |u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\varepsilon,\delta)) - u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)| -$$

$$- |u_{\varphi',\frac{1}{3}}(t_1(\varphi',\tfrac{1}{3})) - u_{\varphi',\frac{1}{3}}(t_1(\varphi',\varepsilon,\delta))| - |u_{\varphi',\frac{1}{3}}(t_1(\varphi',\varepsilon,\delta)) -$$

$$- u_{\varphi',\frac{1}{3}}(t_1(\varphi',\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)| > (2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) \sin(\tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\tfrac{5}{7}) -$$

$$-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) sh\lambda\tau > \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{5}{7}\right).$$

Пусть $\mathcal{D}_i$ образ множества C_i при отображении $u_{\varphi,\frac{1}{3}}(t_1(\varphi,\varepsilon,\delta),\varepsilon,\delta)$, а $\mathcal{D}_i'$ – образ C_i' $(i=1,2)$. Так как множества $\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_i'$ $(i=1,2)$ замкнуты и не пересекаются, то найдутся открытые множества $\mathcal{A}_i$ $(i=1,2)$, которые на окружности $|u|=1$ отделяют $\mathcal{D}_i$ от $\mathcal{D}_i'$. Очевидно, что $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = 0$. Обозначим через B_i' множество тех пар (φ,β) $(\varphi\in[0,2\pi]$, $\beta\in[0,\frac{1}{3}])$, для которых решение $u_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta)$ уходит из цилиндра $|u|\leq 1$ через множество $\mathcal{A}_i$. Так как $\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2=0$, то и $B_1'\cap B_2'=0$. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных следует, что каждое B_i' – открытое множество. Покажем, что в круге $K=(\varphi\in[0,2\pi]$, $\beta\in[0,\frac{1}{3}])$ множество B_i' отделяет C_i от C_i'. Действительно, предположим противное: тогда найдется континуум K_{i_0}, который соединяет C_{i_0} с C_{i_0}' и не пересекается с B_{i_0}'. Пусть $\mathcal{A}_{i_0}'\subset\mathcal{A}_{i_0}$ – замкнутое множество, отделяющее $\mathcal{D}_{i_0}$ от $\mathcal{D}_{i_0}'$ и пусть $\mathcal{D}$ есть окружность $|u|=1$. Тогда открытое множество $\mathcal{D}\setminus\mathcal{A}_{i_0}'$ можно представить в виде суммы двух открытых непересекающихся множеств $\tilde{\mathcal{D}}_{i_0}$ и $\tilde{\mathcal{D}}_{i_0}'$ таких, что $\mathcal{D}_{i_0}\subset\tilde{\mathcal{D}}_{i_0}$ и $\mathcal{D}_{i_0}'\subset\tilde{\mathcal{D}}_{i_0}'$. Пусть $\mathcal{E}_{i_0}$ – множество тех $(\varphi,\beta)\in K_{i_0}$, для которых $u_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta)$ уходит из круга $|u|\leq 1$ через с множество $\tilde{\mathcal{D}}_{i_0}$, а $\mathcal{E}_{i_0}'$ – множество тех $(\varphi,\beta)\in K_{i_0}$, для которых $u_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta)$ уходит из круга $|u|\leq 1$ через множество $\tilde{\mathcal{D}}_{i_0}'$. Очевидно, что ни $\mathcal{E}_{i_0}$, ни $\mathcal{E}_{i_0}'$ не пусто. Так как $\tilde{\mathcal{D}}_{i_0}\cap\tilde{\mathcal{D}}_{i_0}'=0$, то и $\mathcal{E}_{i_0}\cap\mathcal{E}_{i_0}'=0$. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных следует, что $\mathcal{E}_{i_0}$ и $\mathcal{E}_{i_0}'$ открытые в K_{i_0} множества. Так как мы предположили, что все $u_{\varphi,\beta}(t,\varepsilon,\delta)$ уходят из круга $|u|\leq 1$ и так как $K_{i_0}\cap B_{i_0}'=0$, то $\mathcal{E}_{i_0}\cup\mathcal{E}_{i_0}'=K_{i_0}$, вопреки определению континуума. Полученное противоречие показывает, что B_{i_0}' отделяет C_{i_0} от C_{i_0}'.

Известно, что, если открытое множество B_i' отделяет множество C_i от множества C_i', то существует замкнутое множество $B_i\subset B_i'$, которое также отделяет C_i от C_i'. Очевидно, что $B_1\cap B_2=0$. Таким образом, мы пришли в противоречие с теоремой о том, что любые два замкнутые множества, отделяющие пары противоположных сторон квадрата, всегда пересекаются (см. /11/, стр. 64-65). Лемма доказана.

Лемма 15. Существуют $\varepsilon_0' > 0$ и $\delta_0' > 0$ такие, что для любого $|\varepsilon| < \varepsilon_0'$ всякое решение $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ системы (3.1), удовлетворяющее при всех $t \geqslant t_0$ условию $|x_\varepsilon(t)| \leqslant \delta_0'$, $|y_\varepsilon(t)| \leqslant 2\delta_0'$, обладает следующими свойствами: $|x_\varepsilon(t)| + |y_\varepsilon(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, при всех $t \geqslant t_0$ $\frac{d}{dt}|x_\varepsilon(t)| < 0$ и $\frac{d}{dt}|y_\varepsilon(t)| < 0$.

Доказательство.

Заменой $x = \delta u$, $y = \delta v$ перейдем от системы (3.1) к системе (3.2). Далее, используя лемму Адамара (см. /12/, стр. 81-82), запишем систему (3.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot u &= \lambda v + a(u,v,t,\varepsilon,\delta)u + b(u,v,t,\varepsilon,\delta)v, \\ \dot v &= \lambda u + c(u,v,t,\varepsilon,\delta)u + d(u,v,t,\varepsilon,\delta)v, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где функции $a(u,v,t,\varepsilon,\delta)$, $b(u,v,t,\varepsilon,\delta)$, $c(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ и $d(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ аналитические по переменным u, v, ε, δ, непрерывно дифференцируемые и периодические по t; $a(u,v,t,0,0) = b(u,v,t,0,0) = c(u,v,t,0,0) = d(u,v,t,0,0) \equiv 0$.

Продифференцируем первое уравнение системы (3.3) по t. Имеем:

$$\ddot u = (a + ua_u' + vb_u')\dot u + (\lambda + b + ua_v' + vb_v')\dot v + a_t' u + b_t' v.$$

Используя второе уравнение системы (3.3), исключим $\dot v$. Получим:

$$\ddot u = (a + ua_u' + vb_u')\dot u + [(\lambda + c)(\lambda + b + ua_v' + vb_v') + a_t']u + $$
$$+ [(\lambda + b + ua_v' + vb_v')d + b_t']v.$$

Используя теперь первое уравнение системы (3.3) заменим v, стоящее в самом конце правой части равенства. Окончательно получаем:

$$\ddot u = \left(a + d + ua_u' + vb_u' + d\,\frac{ua_v' + vb_v'}{\lambda + b} + \frac{b_t'}{\lambda + b}\right)\dot u \; +$$

$$+\left[\left(1+\frac{ua'_v+vb'_v}{\lambda+b}\right)\left((\lambda+b)(\lambda+c)-ad\right)+a'_t-\frac{ab'_t}{\lambda+b}\right]u \,. \tag{3.4}$$

Проделав аналогичные преобразования со вторым уравнением системы (3.3), получим уравнение для v :

$$\ddot{v}=\left(a+d+uc'_v+vd'_v+a\frac{uc'_u+vd'_u}{\lambda+c}+\frac{c'_t}{\lambda+c}\right)\dot{v}+ \tag{3.5}$$
$$+\left[\left(1+\frac{uc'_u+vd'_u}{\lambda+c}\right)\left((\lambda+b)(\lambda+c)-ad\right)+d'_t-\frac{dc'_t}{\lambda+c}\right]v.$$

Таким образом, из системы (3.3) мы получим систему:

$$\begin{gathered}\ddot{u}+2\alpha(u,v,t,\varepsilon,\delta)\dot{u}-\kappa(u,v,t,\varepsilon,\delta)u=0\,,\\ \ddot{v}+2\beta(u,v,t,\varepsilon,\delta)\dot{v}-n(u,v,t,\varepsilon,\delta)v=0\,,\end{gathered} \tag{3.6}$$

которая представляет собой более короткую запись уравнений (3.4) и (3.5). Функции $\alpha(u,v,t,\varepsilon,\delta)$, $\beta(u,v,t,\varepsilon,\delta)$, $\kappa(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ и $n(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ будут аналитическими по переменным u , v , ε , δ и непрерывными по t . Из структуры уравнений (3.4) и (3.5) следует, что $\alpha(u,v,t,0,0)=$ $=\beta(u,v,t,0,0)\equiv 0$, а $\kappa(u,v,t,0,0)=n(u,v,t,0,0)\equiv\lambda^2$. Следовательно, найдутся такие $\varepsilon'_0>0$ и $\delta'_0>0$, что для любых u , v , ε и δ таких, что $|u|^2+|v|^2\leq 10$, $|\varepsilon|<\varepsilon'_0$, $|\delta|<\delta'_0$ выполнены неравенства:

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\kappa(u,v,t,\varepsilon,\delta)-(\operatorname{Im}\alpha(u,v,t,\varepsilon,\delta))^2\geqslant\frac{\lambda^2}{2}\,,\\ \operatorname{Re}n(u,v,t,\varepsilon,\delta)-(\operatorname{Im}\beta(u,v,t,\varepsilon,\delta))^2\geqslant\frac{\lambda^2}{2}\,.\end{gathered} \tag{3.7}$$

К каждому из уравнений (3.6) применимы результаты § 2. Из них следует, что, если в какой-то момент времени $t' \geqslant t_0$ $\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t)| \geqslant 0$ (или $\frac{d}{dt}|v_\varepsilon(t)| \geqslant 0$), то при $t \geqslant t'$ $|u_\varepsilon(t)|$ (или $|v_\varepsilon(t)|$) будет монотонно возрастающей функцией времени, по крайней мере, до тех пор, пока выполнены условия (3.7). Следовательно, наступит такой момент $t_1 > t'$, что при $t = t_1$ $|u_\varepsilon(t)|$ будет больше единицы (или $|v_\varepsilon(t)| > 2$), вопреки предположениям. Значит, при $t \geqslant t_0$ $\frac{d}{dt}|u_\varepsilon(t)| < 0$ и $\frac{d}{dt}|v_\varepsilon(t)| < 0$. Применив далее рассуждения леммы 5 нетрудно показать, что

$\lim\limits_{t\to\infty} u_\varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to\infty} v_\varepsilon(t) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 16. Существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для любых x_0 и ε, удовлетворяющих условиям $|x_0| < \delta_0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, решение $(x'_\varepsilon(t), y'_\varepsilon(t))$ системы (3.1), удовлетворяющее условиям: $x'_\varepsilon(t_0) = x_0$, при всех $t \geqslant t_0$ $\frac{d}{dt}|x'_\varepsilon(t)| < 0$. $\lim\limits_{t\to\infty} x'_\varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y'_\varepsilon(t) = 0$ единственно.

Доказательство.

С помощью замены $x = \delta u$, $y = \delta v$ перейдем от системы (3.1) к системе (3.2) и предположим, что кроме решения $(u'_\varepsilon(t), v'_\varepsilon(t))$ найдется решение $(u''_\varepsilon(t), v''_\varepsilon(t))$, удовлетворяющее тем же условиям, что и решение $(u'_\varepsilon(t), v'_\varepsilon(t))$. Из леммы 12 следует, что при всех $t \geqslant t_0$ $|u'_\varepsilon(t)| \leq 2$ и $|v''_\varepsilon(t)| \leq 2$. Действительно, предположим противное: пусть найдется момент $t' \geqslant t_0$ такой, что, например, $|v'_\varepsilon(t')| > 2$. Так как $|v'_\varepsilon(t)| \to 0$ при $t \to \infty$, то найдется такой момент $t_1 > t'$ что $|v'_\varepsilon(t_1)| = 2$. Применяя лемму 12, получим, что при $t'_1 = t_1 + T_0$ $|u'_\varepsilon(t'_1)| > \frac{3}{2}$ вопреки предположению.

Используя лемму Адамара (см. /12/, стр. 81-82), мы можем написать, что $\tilde{u} = u'_\varepsilon(t) - u''_\varepsilon(t)$ и $\tilde{v} = v'_\varepsilon(t) - v''_\varepsilon(t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}} &= \lambda\tilde{v} + \tilde{a}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)\tilde{u} + \tilde{b}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)\tilde{v}, \\ \dot{\tilde{v}} &= \lambda\tilde{u} + \tilde{c}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)\tilde{u} + \tilde{d}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)\tilde{v}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $$\tilde{a}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)=\int\limits_0^1 A'_u(u''_\varepsilon(t)+\xi\tilde{u},\,v''_\varepsilon(t)+\xi\tilde{v},\,t,\varepsilon,\delta)\,d\xi,$$

$$\tilde{b}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)=\int\limits_0^1 A'_v(u''_\varepsilon(t)+\xi\tilde{u},\,v''_\varepsilon(t)+\xi\tilde{v},\,t,\varepsilon,\delta)\,d\xi,$$

$$\tilde{c}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)=\int\limits_0^1 B'_u(u''_\varepsilon(t)+\xi\tilde{u},\,v''_\varepsilon(t)+\xi\tilde{v},\,t,\varepsilon,\delta)\,d\xi,$$

$$\tilde{d}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)=\int\limits_0^1 B'_v(u''_\varepsilon(t)+\xi\tilde{u},\,v''_\varepsilon(t)+\xi\tilde{v},\,t,\varepsilon,\delta)\,d\xi.$$

Проделав с первым уравнением системы (3.8) те же самые преобразования, которые мы проделали в лемме 15 с первым уравнением системы (3.3), мы получим для $\tilde{u}$ уравнение второго порядка, аналогичное первому уравнению системы (3.6):

$$\ddot{\tilde{u}}+2\tilde{\alpha}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)\dot{\tilde{u}}-\tilde{K}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)\tilde{u}=0, \tag{3.9}$$

где $\tilde{\alpha}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)$ и $\tilde{K}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)$ выражаются через $\tilde{a}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)$, $\tilde{b}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)$, $\tilde{c}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)$ и $\tilde{d}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)$ по тем же формулам, по которым выражаются $\alpha(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ и $K(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ через $a(u,v,t,\varepsilon,\delta)$, $b(u,v,t,\varepsilon,\delta)$, $c(u,v,t,\varepsilon,\delta)$ и $d(u,v,t,\varepsilon,\delta)$. Из ограниченности при всех $t\geqslant t_0$ $u''_\varepsilon(t)$ и $v''_\varepsilon(t)$ по формулам (3.3) следует ограниченность $\dot{u}''_\varepsilon(t)$ и $\dot{v}''_\varepsilon(t)$ при всех $t\geqslant t_0$. Поэтому, используя явные формулы для $\tilde{\alpha}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)$ и $\tilde{K}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)$ нетрудно показать, что в ограниченной области $|\tilde{u}|\leqslant 2$, $|\tilde{v}|\leqslant 4$ $\tilde{\alpha}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)\to 0,$

а $\tilde{K}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)\to\lambda^2$ при $|\varepsilon|+|\delta|\to 0$ равномерно по t при $t\geq t_0$. Следовательно, найдутся $\varepsilon_0>0$ и $\delta_0>0$ такие, что при любых $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, $|\delta|<\delta_0$, $|\tilde{u}|\leq 2$, $|\tilde{v}|\leq Y$ и $t\geq t_0$ выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re}\tilde{K}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta)-(\operatorname{Im}\tilde{\alpha}(\tilde{u},\tilde{v},t,\varepsilon,\delta))^2\geq\frac{\lambda^2}{2}.$$

В этих условиях к уравнению (3.9) может быть применена лемма 7. Она утверждает, что решение $\tilde{u}_\varepsilon(t)$ уравнения (3.9), удовлетворяющее условиям: $\tilde{u}_\varepsilon(t_0)=0$, $|\tilde{u}_\varepsilon(t)|\to 0$ при $t\to\infty$, единственно, т.е. $\tilde{u}_\varepsilon(t)\equiv 0$. Лемма доказана.

Если теперь предположить, что $\varepsilon_0\leq\min(\varepsilon_0',\varepsilon_2)$, а $\delta_0\leq\min(\delta_0',\delta_2)$, где $\varepsilon_0'>0$, $\delta_0'>0$ удовлетворяют условиям леммы 15, а $\varepsilon_2>0$, $\delta_2>0$ удовлетворяют условиям леммы 14, то для таких ε_0 и δ_0 будут справедливы все пять лемм настоящего параграфа. Следовательно, теорема 3 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы об аналитической зависимости граничных траекторий от параметра ε

В настоящем параграфе будет доказано, что граничные траектории системы (1), построенные в § 3 (теорема 3), будут аналитическими функциями параметра ε при всех $t\geq t_0$, т.е. мы докажем, что существует $\tilde{\varepsilon}_0>0$ такое, что при $|\varepsilon|<\tilde{\varepsilon}_0$ граничные решения разлагаются в степенной ряд по ε, который сходится в круге радиуса $\tilde{\varepsilon}_0$ при всех $t\geq t_0$.

Наметим коротко план доказательства. Беря $\varepsilon=\mu+i\nu$ комплексным, мы покажем, что граничные траектории, построенные в §3, непрерывны по ε и обладают по μ и ν непрерывными производными, которые при всех $t\geq t_0$ удовлетворяют в круге $|\varepsilon|<\tilde{\varepsilon}_0$ условиям Коши-Римана. Как известно, это эквивалентно возможности разлагать граничные решения в ряд по степеням ε.

Лемма 17. Пусть решение $(X_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ системы (3.1) удовлетворяет следующим условиям: $X_\varepsilon(t) = X_0$, при всех $t \geqslant t_0$ $\frac{d}{dt}|X_\varepsilon(t)| < 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} X_\varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y_\varepsilon(t) = 0$, где $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $|X_0| < \delta_0$ / $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ таковы, что при них справедливы все леммы § 3/. Тогда $(X_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ зависит непрерывно от ε, т.е. при $\varepsilon' \to \varepsilon$ $X_{\varepsilon'}(t) \to X_\varepsilon(t)$, а $y_{\varepsilon'}(t) \to y_\varepsilon(t)$ равномерно на каждом конечном отрезке $[t_0, t_1]$.

Доказательство леммы 17 очень похоже на доказательство леммы 8 с той только разницей, что ограниченность множества $|y_{\varepsilon'}(t_0)|$ для ε' достаточно близких к ε здесь следует из леммы 12. Дальше доказательство почти дословно повторяет доказательство леммы 8, и поэтому опускается.

Лемма 18. Существуют $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ и $\tilde{\delta}_0 > 0$ такие, что для любых ε и X_0, удовлетворяющих условию $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}_0$, $|X_0| < \tilde{\delta}_0$, решение $(X_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$ системы (3.1), удовлетворяющее условиям $X_\varepsilon(t_0) = X_0$, при всех $t \geqslant t_0$ $\frac{d}{dt}|X_\varepsilon(t)| < 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} X_\varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y_\varepsilon(t) = 0$ обладает непрерывной производной по μ ($\mu = \mathrm{Re}\,\varepsilon$).

Доказательство.

При помощи замены $X = \delta u$, $y = \delta v$ перейдем от системы (3.1) к системе (3.2). Далее положим: $\Delta u = u_{\varepsilon+\Delta\mu}(t) - u_\varepsilon(t)$, $\Delta v = v_{\varepsilon+\Delta\mu}(t) - v_\varepsilon(t)$. Используя лемму Адамара (см. /12/, стр. 81-82), получим что при $\Delta\mu \neq 0$ $\left(\frac{\Delta u}{\Delta\mu}, \frac{\Delta v}{\Delta\mu}\right)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta u}{\Delta\mu} = \lambda\frac{\Delta v}{\Delta\mu} + a(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)\frac{\Delta u}{\Delta\mu} + b(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)\frac{\Delta v}{\Delta\mu} + h_1(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\Delta v}{\Delta\mu} = \lambda\frac{\Delta u}{\Delta\mu} + c(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)\frac{\Delta u}{\Delta\mu} + d(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)\frac{\Delta v}{\Delta\mu} + h_2(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu), \tag{4.1}$$

где

$$a(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu) = \int_0^1 \mathcal{H}'_u(u_\varepsilon(t)+\xi\Delta u, v_\varepsilon(t)+\xi\Delta v, t, \varepsilon+\xi\Delta\mu, \delta)\,d\xi,$$

$$b(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)=\int_0^1 A'_v(u_\varepsilon(t)+\xi\Delta u, v_\varepsilon(t)+\xi\Delta v, t, \varepsilon+\xi\Delta\mu, \delta)\,d\xi,$$

$$c(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)=\int_0^1 B'_u(u_\varepsilon(t)+\xi\Delta u, v_\varepsilon(t)+\xi\Delta v, t, \varepsilon+\xi\Delta\mu, \delta)\,d\xi,$$

$$d(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)=\int_0^1 B'_v(u_\varepsilon(t)+\xi\Delta u, v_\varepsilon(t)+\xi\Delta v, t, \varepsilon+\xi\Delta\mu, \delta)\,d\xi,$$

$$h_1(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)=\int_0^1 A'_\varepsilon(u_\varepsilon(t)+\xi\Delta u, v_\varepsilon(t)+\xi\Delta v, t, \varepsilon+\xi\Delta\mu, \delta)\,d\xi,$$

$$h_2(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)=\int_0^1 B'_\varepsilon(u_\varepsilon(t)+\xi\Delta u, v_\varepsilon(t)+\xi\Delta v, t, \varepsilon+\xi\Delta\mu, \delta)\,d\xi,$$

со следующими условиями: $\dfrac{\Delta u(t_0)}{\Delta\mu}=0$, $\dfrac{\Delta u(t)}{\Delta\mu}\to 0$ и $\dfrac{\Delta v(t)}{\Delta\mu}\to 0$ при $t\to\infty$. Методом, аналогичным тому, с помощью которого в § 3 мы заменили систему (3.3) на систему (3.6), мы заменим систему (4.1) на систему:

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\Delta u}{\Delta\mu}+2\alpha(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)\frac{d}{dt}\frac{\Delta u}{\Delta\mu}-\kappa(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)\frac{\Delta u}{\Delta\mu}=f_1(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\Delta v}{\Delta\mu}+2\beta(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)\frac{d}{dt}\frac{\Delta v}{\Delta\mu}-n(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)\frac{\Delta v}{\Delta\mu}=f_2(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu). \tag{4.2}$$

В силу леммы 17 функции $\alpha(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$, $\beta(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$, $\kappa(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$, $n(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$, $f_1(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$ и $f_2(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$ будут непрерывными функциями параметра $\Delta\mu$. Используя явные выражения этих функций, нетрудно убедиться, что при $|\Delta\mu|+|\varepsilon|+|\delta|\to 0$ $\alpha(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$ и $\beta(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$

стремятся к нулю, а $K(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$ и $n(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$ к λ^2 равномерно при всех $t \geqslant t_0$. Следовательно, найдутся такие $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ и $\tilde{\delta}_0 > 0$ ($\tilde{\varepsilon}_0$ нужно брать $\leqslant \varepsilon_0$ из леммы 17, а $\tilde{\delta}_0 \leqslant \delta_0$), что при всех $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}_0$, $|\varepsilon+\Delta\mu| < \tilde{\varepsilon}_0$, $|\delta| < \tilde{\delta}_0$ и всех $t \geqslant t_0$ выполнены неравенства:

$$\operatorname{Re} K(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu) - (\operatorname{Im}\alpha(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu))^2 \geqslant \frac{\lambda^2}{2}, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{Re} n(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu) - (\operatorname{Im}\beta(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu))^2 \geqslant \frac{\lambda^2}{2}.$$

Используя явные выражения для $f_1(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$ и $f_2(t,\varepsilon,\delta,\Delta\mu)$ нетрудно убедиться, что при малых $\Delta\mu$ (например, таких, что $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}_0$ и $|\varepsilon+\Delta\mu| < \tilde{\varepsilon}_0$) эти функции будут равномерно ограничены и будут стремиться к нулю при $t \to \infty$. Применив к первому уравнению системы (4.3), результаты § 2 (лемма 10) мы получим, что существуют пределы $\frac{\Delta u}{\Delta\mu}$ и $\frac{\Delta \dot{u}}{\Delta\mu}$ при $\Delta\mu \to 0$ при всех $t \geqslant t_0$. Отсюда, используя систему (4.1), мы получим, что существуют пределы $\frac{\Delta v}{\Delta\mu}$ и $\frac{\Delta \dot{v}}{\Delta\mu}$ при $\Delta\mu \to 0$ при всех $t \geqslant t_0$. Полученные пределы будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial\mu} = \lambda\frac{\partial v}{\partial\mu} + A'_u(u,v,t,\varepsilon,\delta)\frac{\partial u}{\partial\mu} + A'_v(u,v,t,\varepsilon,\delta)\frac{\partial v}{\partial\mu} + A'_\mu(u,v,t,\varepsilon,\delta), \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial v}{\partial\mu} = \lambda\frac{\partial u}{\partial\mu} + B'_u(u,v,t,\varepsilon,\delta)\frac{\partial u}{\partial\mu} + B'_v(u,v,t,\varepsilon,\delta)\frac{\partial v}{\partial\mu} + B'_\mu(u,v,t,\varepsilon,\delta)$$

со следующими условиями: $\frac{\partial u(t_0)}{\partial\mu} = 0$, $\left|\frac{\partial u(t)}{\partial\mu}\right| + \left|\frac{\partial v(t)}{\partial\mu}\right| \to 0$ при $t \to \infty$.

Путем аналогичных рассуждений нетрудно установить, что $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ и $\frac{\partial v}{\partial\nu}$ существуют и удовлетворяют системе:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial\nu} = \lambda\frac{\partial v}{\partial\nu} + A'_u(u,v,t,\varepsilon,\delta)\frac{\partial u}{\partial\nu} + A'_v(u,v,t,\varepsilon,\delta)\frac{\partial v}{\partial\nu} + A'_\nu(u,v,t,\varepsilon,\delta), \tag{4.5}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda\frac{\partial u}{\partial \nu} + B'_u(u,v,t,\varepsilon,\delta)\frac{\partial u}{\partial \nu} + B'_v(u,v,t,\varepsilon,\delta)\frac{\partial v}{\partial \nu} + B'_\nu(u,v,t,\varepsilon,\delta)$$

со следующими условиями: $\frac{\partial u(t_0)}{\partial \nu} = 0$, $\left|\frac{\partial u(t)}{\partial \nu}\right| + \left|\frac{\partial v(t)}{\partial \nu}\right| \to 0$ при $t \to \infty$.

Из условий Коши-Римана для аналитических функций следует, что

$$A'_\nu(u,v,t,\varepsilon,\delta) = i A'_\mu(u,v,t,\varepsilon,\delta),\ B'_\nu(u,v,t,\varepsilon,\delta) = i B'_\mu(u,v,t,\varepsilon,\delta)$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = i\frac{\partial u}{\partial \mu}$, $\frac{\partial v}{\partial \nu} = i\frac{\partial v}{\partial \mu}$ будет удовлетворять системе (4.5). В силу теоремы единственности (лемма 7) другого решения система (4.5) не имеет. Следовательно, для производных $\frac{\partial u}{\partial \mu}$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, $\frac{\partial v}{\partial \mu}$ и $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ выполнены условия Коши-Римана. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4.

Существуют $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ и $\tilde{\delta}_0 > 0$ такие, что для любых ε и X_0, удовлетворяющих условию $|\varepsilon| < \tilde{\varepsilon}_0$, $|X_0| < \tilde{\delta}_0$, решение $(x_\varepsilon(t),\ y_\varepsilon(t))$ системы (3.1), удовлетворяющее условиям $x_\varepsilon(t_0) = X_0$, при всех $t \geq t_0$ $\frac{d}{dt}|x_\varepsilon(t)| < 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x_\varepsilon(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y_\varepsilon(t) = 0$ при $t \geq t_0$ зависит аналитически от ε.

Доказанная теорема позволяет вычислять граничные траектории в малой окрестности исследуемого положения равновесия типа седло путем разложения их в ряд по степеням ε. Однако, пользуясь теоремой Пуанкаре (см. /8/, стр.153-160), мы сможем продолжить граничную траекторию для значений $t < t_0$. Такое продолжение позволит получить все интересующие нас сведения о расположении $\Gamma_\varepsilon(t_0)$. Это будет сделано во второй части работы.

Литература

1. Анри Пуанкаре. "О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями", Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1947г.

2. Н.А.Сахарников. "Качественная картина поведения траекторий вблизи границы области устойчивости, содержащей особую точку вида центр", ПММ,ХУ, вып. 3, 1951, 349-354.

3. G. Sansone, Sopra un'equazione che si presenta nella determinazione delle orbite in un sincrotrone, Rend. Acc. Naz. dei XL, Serie IV, Vol. VIII, 1957, 1-74.

4. C. Olech, Sur un problème de M.G. Sansone lié a la théorie du synchrotrone, Annali di Mat., Serie IV, vol. XLV, 1957, 317-329.

5. В.К.Мельников. "Определение области захвата для уравнения второго порядка, близкого к консервативному." Матем. сб. 49/91/, вып. 4, 1959, 353-380.

6. Ю.С.Саясов, В.К.Мельников. "Теория захвата частиц в синхронный режим ускорения с учетом неконсервативности уравнений движения". ЖТФ, XXX, вып. 6, 1960, 656-664.

7. Э.Гурса. "Курс математического анализа", том 1, часть вторая, Москва-Ленинград, ГТТИ, 1933.

8. В.В.Голубев. "Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений", Москва-Ленинград, Госиздат, 1960 г.

9. H. Weyl, Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Göttinger Nachr., (1909), 37-63.

10. A. Wintner, On almost free linear motions, Amer. Journ. Math., 71, (1949), 595-602.

11. Витольд Гуревич и Генри Волмен. Теория размерности, Москва. Госиздат иностранной литературы, 1948.

12. И.Г.Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1952г.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 января 1961 года.