ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДУАНЬ И - ШИ

ОБЩЕКОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ОБЩИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1957 г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДУАНЬ И - ШИ

ОБЩЕКОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ОБЩИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

I 9 5 7 г.

P-65

ОБЩЕКОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ОБЩИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Дана общековариантная установка теории элементарных частиц, изложено обобщение теоремы Нэтер, а также получен обобщенный закон сохранения в общей теории относительности; показано, что из этого общего закона при конкретных преобразованиях легко получить законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения, заряда и т.д.

I. Введение

В принципе теория элементарных частиц должна быть общековариантной, причем учет требования общековариантности равносилен рассмотрению влияния гравитационного поля на теорию элементарных частиц. Были получены статистические регулярные решения уравнений тяготения Эйнштейна совместно с уравнениями электромагнитного поля /1,2/, скалярного /3,4/ и псевдоскалярного /5/ мезонных полей для точечных источников. Эти решения показывают, что благодаря наличию гравитационного поля потенциалы взаимодействия между элементарными частицами вблизи источников сильно изменяются. Кроме того, в этих работах показано, что гравитационное поле играет значительную роль в трактовке массы элементарных частиц. При изучении структуры элементарных частиц уже нельзя пренебречь действием гравитационных эффектов.

В настоящей работе дается общековариантная формулировка теории элементарных частиц. Получается обобщение теоремы Нэтер в общей теории относительности. Доказывается, что в теории полей сохраняется обобщенный псевдотензор ранга, из которого при конкретных преобразованиях легко получить законы сохранения

P-65

ОБЩЕКОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ОБЩИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Дана общековариантная установка теории элементарных частиц, изложено обобщение теоремы Нэтер, а также получен обобщенный закон сохранения в общей теории относительности; показано, что из этого общего закона при конкретных преобразованиях легко получить законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения, заряда и т.д.

I. Введение

В принципе теория элементарных частиц должна быть общековариантной, причем учет требования общековариантности равносилен рассмотрению влияния гравитационного поля на теорию элементарных частиц. Были получены статистические регулярные решения уравнений тяготения Эйнштейна совместно с уравнениями электромагнитного поля [1,2], скалярного [3,4] и псевдоскалярного [5] мезонных полей для точечных источников. Эти решения показывают, что благодаря наличию гравитационного поля потенциалы взаимодействия между элементарными частицами вблизи источников сильно изменяются. Кроме того, в этих работах показано, что гравитационное поле играет значительную роль в трактовке массы элементарных частиц. При изучении структуры элементарных частиц уже нельзя пренебречь действием гравитационных эффектов.

В настоящей работе дается общековариантная формулировка теории элементарных частиц. Получается обобщение теоремы Нэтер в общей теории относительности. Доказывается, что в теории полей сохраняется обобщенный псевдотензор ранга, из которого при конкретных преобразованиях легко получить законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения, заряда и т.д.

2. Лагранжев формализм в общей теории относительности

Как известно, функция действия полей в общей теории относительности имеет вид:

$$S = \int L \sqrt{g}\,(dx) \qquad (1)$$

где L - функция Лагранжа, которая зависит от обобщенных функций полей $U^{(i)}$ и их первых производных $U^{(i)}_k = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x^k}$.

Общий принцип относительности требует инвариантности функции Лагранжа L по отношению к любым преобразованиям координат вида:

$$x'^i = x^i(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad (2)$$

Функция Лагранжа состоит из трех частей:

$$L = L(g) + \sum L(gm) + \sum L(mm') \qquad (3)$$

где $L(g)$ -относится к свободному гравитационному полю /6/ $L(gm)$ описывают взаимодействие между гравитационным и другими полями и $L(mm')$-взаимодействие между негравитационными полями.

Последние два члена выражения /3/ обозначим:

$$L_{(m)} = \sum L_{(gm)} + \sum L_{(mm')}$$

Варьируя функцию действия S по обобщенной функции полей $U^{(i)}$

$$\delta \int L \sqrt{g}\,(dx) = 0 \qquad (4)$$

получим систему общековариантных уравнений полей.

$$\left[L\sqrt{g}\right]_{U^{(i)}} \equiv \frac{\partial (L\sqrt{g})}{\partial U^{(i)}} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial (L\sqrt{g})}{\partial U^{(i)}_k} \qquad (5)$$

3. Общий закон сохранения и обобщенный тензор теории полей

В специальной теории относительности /т.е. в обычной теории поля/ сохранение тензора $\Theta^{ke\dots n}$ соответствует инвариантности действия полей S по отношению к некоторому преобразованию. Например[9] из требования инвариантности действия S по отношению к 4-трансляции, к лоренцовому поворотам и повороту фазового множителя могут быть получены интегралы движения; т.е. закон сохранения 4-векторов импульса, 6-тензоров и момента количества движения и заряда. Такой способ вывода законов сохранения является содержанием теоремы Нэтер[8], которая применялась ею в классической механике. В настоящее время эта теорема широко применяется в теории поля.

В этом параграфе теорема Нэтер обобщается на теории полей в общей теории относительности[9].

Рассмотрим преобразование

$$
\begin{aligned}
x'^{i} &= X^{i}(x^1, x^2, x^3, x^4; \alpha_{jk\dots n}\dots) \\
U'^{(k)} &= U'^{(k)}(X^1, X^2, X^3, X^4; \alpha_{jk\dots n}\dots) \\
&= Y^{(k)}(x^1, x^2, x^3, x^4; \alpha_{jk\dots n}\dots)
\end{aligned} \tag{11}
$$

зависящее от непрерывно изменяющихся обобщенных параметров $\alpha_{jk\dots n}$ нулевому значению которых соответствует тождественное преобразование, т.е. при $\alpha_{jk\dots n} = 0$.

$$
x^{i} = x'^{i}, \qquad U^{(k)} = U'^{(k)} \tag{12}
$$

Допустим, что при преобразовании /II/ действие

$$S = \int_G L(x^i, U^{(i)}, U_k^{(i)})\sqrt{g}\,(dx)$$

не изменяется, т.е. пусть для всякой области G имеет место равенство:

$$S' = \int_{G'} L(x'^i, U'^{(i)}, U_k'^{(i)})\sqrt{g'}\,(dx') = \int_G L\sqrt{g}\,(dx) \qquad (13)$$

где через G' обозначена область, пробегаемая точкой $/x'^1, x'^2, x'^3, x'^4/$, когда точка $/x^1, x^2, x^3, x^4/$ пробегает область G.

В силу /II/ имеем

$$S(\alpha_{jk\cdots n}) = \int_G L(x^i, U'^{(i)}, U_k'^{(i)})\sqrt{g'}\,J\,(dx)$$

где

$$J \equiv \frac{\partial(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)}{\partial(x^1, x^2, x^3, x^4)} \qquad (14)$$

Тогда из /I3/ очевидно

$$\delta S\big/_{\alpha_{jk\cdots n}=0} = 0$$

Отсюда следует

$$\left.\frac{\partial S(\alpha_{jk\cdots n})}{\partial \alpha_{jk\cdots n}}\right|_{\alpha_{j\cdots n}=0} = 0 \qquad (15)$$

Обозначая

$$F = L\sqrt{g}$$

то

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{jk\cdots n}} = \int\Big\{\Big[F_{x^i}\frac{\partial x'^i}{\partial \alpha_{j\cdots n}} + F_{V^{(i)}}\frac{\partial V^{(i)}}{\partial \alpha_{j\cdots n}} + F_{V_k^{(i)}}\frac{\partial V_k^{(i)}}{\partial \alpha_{j\cdots n}}\Big]J$$

$$+ F\frac{\partial J}{\partial \alpha_{j\cdots n}}\Big\}(dx) \qquad (16)$$

Но из /II/ и /I4/ имеем соотношение

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{j\ldots n}} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_{j\ldots n}} \qquad (17)$$

Подставляя /I7/ в /I6/ и принимая во внимание /I5/, получим

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_{j\ldots n}}\bigg|_{\alpha_{j\ldots n}=0} = \int_G \Big[F_{x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + F_{v^{(i)}} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} +$$

$$+ F_{v_k^{(i)}} \frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + F \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_{j\ldots n}} \Big]_{\alpha_{j\ldots n}=0} (dx) = 0 \qquad (18)$$

Так как уравнение /I8/ имеет место для любой области, то подинтегральное выражение этого уравнения должно тождественно обращаться в нуль, т.е.

$$\Big[F_{x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + F_{v^{(i)}} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + F_{v_k^{(i)}} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + F \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_{j\ldots n}} \Big]_{\alpha_{j\ldots n}=0} = 0 \qquad (19)$$

Обозначим

$$W^{(i)} = v'^{(i)}(x^1, x^2, x^3, x^4; \alpha_{j\ldots n} \ldots) \qquad (20)$$

то

$$\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} = \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + \frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + \frac{\partial w_k^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} \qquad (21)$$

$$\frac{\partial v_k^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} = \frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial x^e} \frac{\partial x^e}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + \frac{\partial w_k^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}}$$

Подставляя /2I/ в /I9/, получим окончательное выражение

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\Big[(L\sqrt{g}) \frac{\partial x^k}{\partial \alpha_{j\ldots n}} + L_{v_k^{(i)}} \sqrt{g} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}} \Big]_{\alpha_{j\ldots n}=0} +$$

$$+ [L\sqrt{g}]_{v^{(i)}} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial \alpha_{j\ldots n}}\bigg|_{\alpha_{j\ldots n}=0} = 0 \qquad (22)$$

где

$$\frac{\partial W^{(i)}}{\partial \alpha_{\gamma \ldots n}} = \frac{\partial V^{(i)}}{\partial \alpha_{\gamma \ldots n}} - \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x^e} \frac{\partial x^e}{\partial \alpha_{\gamma \ldots n}} \qquad (23)$$

Из /22/ вытекает важный вывод, который называется обобщенной теоремой Нэтер, что если

I. Действие полей S /4/ инвариантно по отношению к преобразованию /II/ и

2. $L\sqrt{g}$ удовлетворяет уравнениюЭйлер, т.е. удовлетворяет уравнению поля (5) $[L\sqrt{g}]_{U^{(i)}}=0$,

то существует обобщенный псевдотензор ранга n ‑

$$\Theta^{\overbrace{[i\gamma k \ldots e]m}^{n}} = L\frac{\partial x^m}{\partial \alpha_{i\gamma \ldots e}}\Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial V^{(P)}}{\partial \alpha_{i\gamma \ldots e}}\Big|_{\alpha=0} \frac{\partial L}{\partial U^{(P)}_k} -$$

$$- \frac{\partial L}{\partial U^{(P)}_m} U^{(P)}_g \frac{\partial x^g}{\partial \alpha_{i\gamma \ldots e}}\Big|_{\alpha=0} \qquad (24)$$

который удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left[\Theta^{[i\gamma k \ldots e]m}\sqrt{g}\right]=0 \qquad (25)$$

т.е. сохраняется псевдотензор $(n-1)$ ранга

$$\Theta^{[i\gamma \ldots e]} = \int \Theta^{[i\gamma \ldots e]m}\sqrt{g}\, dS_m = Const \qquad (26)$$

Полученный выше результат обобщает законы сохранения Нэтер, делая их применимыми в общей теории относительности. Выражение / 22 / показывает, что только при выполнении уравнений Эйлера $[L\sqrt{g}]_{U^{(i)}}=0$ имеет место законы сохранения.
Из этого общего закона сохранения легко получить законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения, заряда и т.д.

4. Законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения и заряда

Пусть действие S инвариантно по отношению к преобразованиям

$$x'^{i} = x^{i} + g^{ik}\alpha_{k}$$
$$V^{(k)} = U^{(k)} \qquad (27)$$

Подставляя /27/ в выражение обобщенного тензора /24/, получим тензор второго ранга

$$\theta^{ik} = g^{ik}L - g^{ij}U^{(p)}_{j}\frac{\partial L}{\partial U^{(p)}_{k}} \qquad (28)$$

Отсюда имеем:

$$\theta^{ik}_{can} = t^{ik}_{can} + T^{ik}_{can} \qquad (29)$$

где

$$t^{ik}_{can} = g^{ik}L_{(g)} - g^{ik}\frac{\partial g^{en}}{\partial x^{l}}\frac{\partial L_{(g)}}{\partial\left(\frac{\partial g^{en}}{\partial x^{k}}\right)}$$
$$T^{ik}_{can} = g^{ik}L_{(m)} - g^{ij}U^{(p)}_{j}\frac{\partial L_{(m)}}{\partial U^{(p)}_{k}} \qquad (30)$$

Из /25/ и /26/ следует:

$$\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left[\theta^{ik}_{can}\sqrt{g}\right] = 0 \qquad (31)$$

это значит, что имеет место закон сохранения 4-импульса

$$P^{i} = \frac{1}{c}\int\sqrt{g}\,(t^{ik}_{can} + T^{ik}_{can})\,dS_{k} \qquad (32)$$

В общем случае псевдотензоры t^{ik}_{can} и T^{ik}_{can} несимметричны, но к ним всегда можно, соответственно, прибавить величины вида:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(h^{j(ik)}\sqrt{g}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x^j}\left(f^{j[ik]}\right)$$

где $h^{j[ik]}$ и $f^{j[ik]}$ -антисимметричны по индексам, т.к. при такой замене получить новые симметричные тензоры

$$t^{ik} \equiv t^{ik}_{can} - \frac{\partial(h^{j[ik]}\sqrt{g})}{\partial x^j}$$

$$T^{ik} \equiv T^{ik}_{can} - \frac{\partial(f^{j[ik]}\sqrt{g})}{\partial x^j} \qquad (33)$$

$$\text{и} \quad \Theta^{ik} \equiv t^{ik} + T^{ik}. \qquad (34)$$

Обычно [6] называют t^{ik} псевдотензором энергии импульса гравитационного поля.

Легко видеть, что новый псевдотензор Θ^{ik} также будет удовлетворять закону сохранения /31/ и /32/.

Если действие полей S инвариантно по отношению к преобразованию

$$X^k = x^k + g^{km} x^e \alpha_{em}$$

$$V^{(p)} = U^{(p)} + \sum_{i<e} \Omega^{(p)e}_{m} g^{im} \alpha_{ie} \qquad (35)$$

где величина α_{ik} -антисимметрична, то подставляя /35/ в соотношение /24/ и учитывая /30/, получим тензор третьего ранга

$$J^{[ij]k} = \Theta^{jk}_{can} x^i - \Theta^{ik}_{can} x^j + \Omega^{(p)j}_{m} g^{im} \frac{\partial L}{\partial U^{(p)}_k} \qquad (36)$$

Этот тензор удовлетворяет уравнению /25/, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[J^{[ij]k}\sqrt{g}\right] = 0. \qquad (37)$$

Подставив /36/ в /37/, имеем

$$\Theta^{ji}_{can}\sqrt{g} - \Theta^{ij}_{can}\sqrt{g} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\Omega^{(P)j}_{m} g^{im} \frac{\partial L}{\partial U^{(P)}_k}\sqrt{g}\right] \tag{38}$$

учитывая /33/ и /34/, получим

$$\Omega^{(P)j}_{m} g^{im} \frac{\partial L}{\partial U^{(P)}_k} = \left[f^{j[ik]} - f^{i[jk]}\right] + \left[h^{j[ik]} - h^{i[jk]}\right] \tag{39}$$

Из /39/, /36/ и /29/ следует:

$$J^{[ij]k} = L_g^{[ij]k} + L_m^{[ij]k} + S_g^{[ij]k} + S_m^{[ij]k} \tag{40}$$

Где $J^{[ij]k}$ -тензор полного момента количества движения

$$L_m^{[ij]k} = T^{jk}_{can} x^i - T^{ik}_{can} x^j$$

-тензор орбитального момента количества движения материального поля, $L_g^{[ij]k} = t^{jk}_{can} x^i - t^{ik}_{can} x^j$

- тензор орбитального момента количества движения гравитационного поля

$$S_m^{[ij]k} = f^{j[ik]} - f^{i[jk]}$$

- тензор спина материальных полей

$$S_g^{[ij]k} = h^{j[ik]} - h^{i[jk]}$$

- тензор спина гравитационного поля.

Из /37/ вытекает закон сохранения момента количества движения [10]

$$J^{[ij]} = \int J^{[ij]k} dS_k = Const. \tag{41}$$

Если действие S инвариантно по отношению к преобразованию поворота фазового множителя

$$X^{i'} = x^i$$

$$V^{(P)} = u^{(P)} e^{i\alpha}, \quad V^{*(P)} = u^{*(P)} e^{-i\alpha} \tag{42}$$

то подставляя /42/ в /24/ палучим 4-вектор тока

$$j^{k}=e\Theta^{k}=ie\left[\frac{\partial L_1}{\partial U_k^{(p)}}U^{(p)}-U^{*(p)}\frac{\partial L_1}{\partial U_k^{*(p)}}\right] \qquad (43)$$

Очевидно, что для вещественного поля $j^{k}=0$

Из /25/ имеем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x^{k}}\left(j^{k}\sqrt{g}\right)=0$$

отсюда вытекает закон сохранения заряда

$$\int j^{k}\sqrt{g}\,dS_{k}=Const \qquad (44)$$

Отметим, что развитая нами обобщенная теорема Нэтер имеет более общее значение. Если в этих выражениях положить $g_{ik}=\delta_{ik}$, то сразу же можно получить соответствующие законы сохранения в специальной теории относительности.

В заключении выражаю благодарность М.Ф. Широкову и профессору Ху Нину за обсуждение результата настоящей работы.

Об"единенный Институт
ядерных исследований

Дуань И-ши.