

18
P-82

649



Н.Б. Рубин, О.И. Ярковой

P-649

ОСОБЕННОСТИ ЗАХВАТА ЧАСТИЦ
В СИНХРОФАЗОТРОННЫЙ РЕЖИМ УСКОРЕНИЯ

Д у б н а 1961

Н.Б. Рубин, О.И. Ярковой

P-649

ОСОБЕННОСТИ ЗАХВАТА ЧАСТИЦ
В СИНХРОФАЗОТРОННЫЙ РЕЖИМ УСКОРЕНИЯ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

О г л а в л е н и е

	Стр.
§ 1. Введение	3
§ 2. Условия минования инжектора	6
§ 3. Область начальных параметров, отвечающих минованию инжектора и бетатронной мишени	16
§ 4. Условия захвата частиц в режим ускорения	23
§ 5. Эффективность инжекции	29
§ 6. Условия наилучшего захвата при заданных ξ, η	35
§ 7. Выбор оптимального режима и захват реального пучка для синхрофазотрона ОИЯИ	45
§ 8. Бетатронный импульс	53
Л и т е р а т у р а	62

§ 1. В в е д е н и е

Как известно, процесс захвата частиц в синхрофазотронный режим ускорения происходит обычно в два этапа. На первом этапе ускоряющее электрическое поле еще не включено, и часть частиц, впускаемых в камеру ускорителя через инжекторные пластины (инжектор), захватывается на медленно сжимающуюся мгновенную орбиту. Сжатие орбиты происходит потому, что частицы имеют постоянную энергию, а магнитное поле растет. Вопрос здесь состоит в том, минует ли данная частица инжектор на первых оборотах или соударится с ним и выйдет из игры. Механизм "минования" прост: частица в пределах нескольких оборотов может обходить инжектор из-за свободных колебаний, хотя бы по амплитуде она и доставала до него. Одновременно происходит удаление частиц от инжектора из-за сжатия орбиты. Поэтому судьба частицы зависит от того, как скоро она будет иметь наименее благоприятную в смысле обхода инжектора фазу (что зависит, в частности, от частоты колебания частицы), какова ее амплитуда колебаний, какова скорость сжатия орбиты. Процесс захвата частиц на сжимающуюся орбиту в синхрофазотроне, напоминающий начальный этап ускорения частиц в бетатроне (хотя механизм сжатия орбиты в синхрофазотроне не связан, как в бетатроне, с увеличением энергии частиц), называют часто "квазибетатронным" или просто "бетатронным".

Концом "бетатронного" этапа и началом второго режима работы ускорителя является момент включения ускоряющего электрического поля^{х/}. При этом некоторая доля вращающегося в камере пучка захватывается в режим синхронного ускорения, а часть частиц выпадает на инжектор, мишени и стенки ускорительной камеры. Захват во второй режим зависит от момента включения ускоряющего напряжения, его амплитуды и характера пучка, определяемого условиями инжекции.

Теоретическое рассмотрение вопросов захвата частиц в синхрофазотронный режим ускорения проводилось М.С. Рабиновичем^[1] при проектировании синхрофазо-

^{х/} В данной работе мы считаем, что амплитуда ускоряющего электрического поля устанавливается мгновенно. Для синхрофазотрона ОИЯИ это практически так.

трона на 10 Бэв (теперь синхрофазотрон ОИЯИ). Впоследствии в [2] было сделано сравнение результатов этой теории с экспериментами на модели синхрофазотрона на 180 Мэв и внесены некоторые уточнения в теорию. В частности, расчеты, связанные с 1-м режимом, проводились в этой работе численным методом, поскольку приближенное аналитическое рассмотрение соответствующих вопросов в [1], полезное при проектировании ускорителя, недостаточно точно для сравнения экспериментов с теорией. Такого рода расчеты по захвату частиц тем более необходимы при окончательной доводке машины до оптимального режима.

Данная работа посвящена главным образом нахождению режима оптимального захвата при учете реальных условий инжекции, которые могут представиться на практике. При этом, в частности, учитывается специфика инжекции в синхрофазотрон ОИЯИ:

1) Длительность инжекции по техническим причинам ограничена в нем величиной $\tau = 300 - 330 \mu\text{сек}$.

2) Энергетический разброс частиц, инжектируемых в синхрофазотрон, в настоящее время сравнительно велик: $\Delta W = 2\% - 2,5\%$.

В этих условиях возникает проблема правильного выбора момента начала (а, следовательно, и конца) инжекции, а также момента включения ускоряющего напряжения.

В предыдущих работах это не было изучено, и вообще расчет захвата частиц в режим ускорения при значительном энергетическом разбросе давался в довольно грубом приближении.

Рассмотрение, проведенное в данной работе, показало, что следует четко разграничивать случаи "длинной" и "короткой" инжекции, а также "широкого" и "узкого" спектра (см. § 6). Полученные результаты даются в § 7. Там же приводятся соображения /см. также § 2/ о возможности повышения числа захваченных в режим ускорения частиц примерно в 2 раза (при неизменном токе инжекции), если уменьшить скорость нарастания магнитного поля и увеличить длительность инжекции^{х/}.

^{х/} Этот вопрос не тривиален, как кажется на первый взгляд. С уменьшением скорости нарастания магнитного поля \dot{H} ухудшаются условия минования инжектора, из-за этого в свое время предлагалось даже увеличить на время инжекции \dot{H} в 5 раз (так называемая форсировка).

Ряд специфических трудностей в исследовании условий оптимального режима нам удалось преодолеть благодаря изучению захвата частиц с фиксированным углом и координатой вылета из инжекторных пластин (но с заданным энергетическим разбросом). В частности, выбрав наиболее удобные переменные, мы довольно далеко продвинулись в этом вопросе, не прибегая к численному расчету и используя минимум свойств функции ξ , дающей вероятность захвата частиц в сепаратрису. Как выяснилось, инжектируемый пучок синхрофазотрона ОИЯИ для наших целей может считаться достаточно хорошо сфокусированным, что дает уверенность в правильности выбранного подхода.

В предыдущих работах рассматривались отдельно коэффициенты захвата в первый режим σ_1 и во второй режим σ_2 , а полный коэффициент захвата в режим ускорения представлялся как $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$. Мы предпочли отказаться от такого разделения и ввести единый коэффициент захвата σ , поскольку по отдельности ни σ_1 (при моноэнергетическом пучке в особенности), ни σ_2 не измеряются на опыте достаточно точно. Но главным образом мы это сделали в связи с тем, что σ_1 и σ_2 зависят от упомянутых выше "привязок" (момент начала инжекции и пр.), и значения наиболее выгодных привязок для σ_1 и σ_2 в общем случае не совпадают. Мы же, естественно, ориентировались на получение оптимального общего захвата, и поэтому удобнее было оперировать сразу с σ .

Кроме σ как характеристика эффективности инжекции используется также $\tau_{\text{эф.}} = \sigma \cdot \tau$. Общий захваченный в режим ускорения заряд получается при этом умножением $\tau_{\text{эф.}}$ на средний ток из инжектора (см. § 5). Величиной $\tau_{\text{эф.}}$ удобно пользоваться при сравнении числа захваченных частиц для различных длительностей инжекции. Коэффициент σ при этом неудобен, так как с увеличением τ он уменьшается, в то время как число захваченных частиц растет до тех пор, пока инжекция не станет "длинной", а затем остается постоянным. Выражения для σ и $\tau_{\text{эф.}}$ приводятся в данной работе для самого общего вида распределения инжектируемых частиц по углам, энергиям, координатам и во времени. Подчеркнем, что речь идет именно о параметрах инжектируемого пучка, а не пучка, вращающегося в камере в первом режиме. Поэтому, в частности, не было необходимости рассчитывать распределения частиц по амплитудам свободных колебаний в указанном режиме, или принимать какие-то огрубленные распределения.

Захват в первый режим оценивается по "бетатронному" импульсу (§ 8), что допускает самое непосредственное сравнение теории с экспериментом. Там же изучается возможность судить о правильности привязок по форме импульса.

Отметим еще, что в § 2 довольно большое внимание уделяется выбору наиболее выгодного для захвата n , а в § 3 указываются условия, при которых захват невозможен вообще.

Результаты работы сравниваются по возможности с экспериментом на синхротроне ОИЯИ.

Все численные расчеты приводятся для этого ускорителя.

§ 2. Условия минования инжектора

Здесь и в дальнейшем нами будут использоваться следующие величины (см. рис. 1):

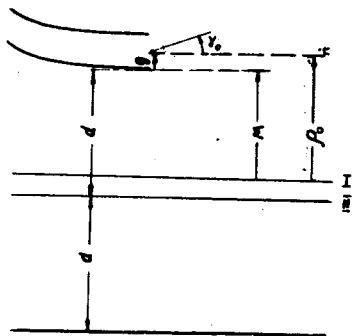


Рис. 1.

Схема инжекции. I - некоторая мгновенная орбита; II - орбита, проходящая через середину рабочей апертуры камеры ускорителя.

M - расстояние по радиусу от внутренней инжекторной пластины до мгновенной орбиты. Поскольку положение мгновенной орбиты зависит от поля и энергии частицы, то $M = M(t, W)$, где W - кинетическая энергия частицы.

ρ - отклонение частицы по радиусу от мгновенной орбиты.

γ - радиальный угол между скоростью частицы и мгновенной орбитой.

ρ_0, γ_0 - соответственно ρ и γ в момент вылета частицы из инжектора.

g - расстояние точки выхода частицы из инжекторных пластин до внутренней пластины (толщиной пластин мы пренебрегаем). Скорость смещения мгновенной орбиты

$$u = \frac{z_0 \dot{H}}{H(1-n)}. \quad (2.1)$$

Тогда

$$M(t, w) = M(t_1, w) + u(t - t_1) = M(t_1, W_0) - z_0 \frac{W - W_0}{2W_0(1-n)} + u(t - t_1) = M(t_1, W_0) - \chi + u(t - t_1),$$

где W_0 - центральная энергия спектра инжектируемых частиц ($W_1 \leq W_0 \leq W_2$, $\Delta W = W_2 - W_1$),

$$\chi = \frac{z_0(W - W_0)}{2W_0(1-n)} = \frac{W - W_0}{\Delta W} \Delta M_w \quad (2.3)$$

- отклонение мгновенной орбиты частицы с заданной энергией от мгновенной орбиты частиц центральной энергии,

$$\Delta M_w = z_0 \frac{\Delta W}{2W_0(1-n)} \quad (2.4)$$

- разброс мгновенных орбит в силу наличия спектра. Очевидно,

$$-\frac{\Delta M_w}{2} \leq \chi \leq \frac{\Delta M_w}{2} \quad (2.5)$$

Для $\rho_0^{(t)}(\chi, g)$ - величины ρ_0 частиц, вылетевших в момент t , согласно (2.2) имеем

$$\rho_0^{(t)}(\chi, g) = M(t, \chi) + g = M(t, 0) + g - \chi + u(t - t_1). \quad (2.6)$$

Пусть $\rho_k^{(t)}(\chi, g)$ - отклонение от мгновенной орбиты частицы, выпущенной в

момент t , на K -ом ее обороте на азимуте инжектора. Условие несоударения ее с инжектором на этом обороте есть

$$\rho_k^{(t)}(\chi, g) < M(t + kT, \chi) = M(t, \chi) + (\Delta M)_{\text{од}} \cdot K, \quad (2.7)$$

где T - период обращения частицы,

$$(\Delta M)_{\text{од}} = uT = u \cdot \frac{2\pi \Pi z_0}{\beta c} \quad (2.8)$$

- так называемая "промашка" - смещение мгновенной орбиты за оборот; $\beta = \frac{v}{c}$ - относительная (по отношению к скорости света c) скорость частицы, Π - см. ниже. Можно показать (см. [3]), что

$$\rho = \left[\rho_0^{(t)}(\chi, g) \frac{s}{\sin \mu} - \frac{z_0 \gamma_0^{(t)}(\chi, g) \cdot p \beta}{\sqrt{1-n}} \frac{1}{\sin \mu} \right] C_m + \frac{z_0 \gamma_0^{(t)}(\chi, g)}{\sqrt{1-n}} S_m, \quad (2.9)$$

где

$$s = \sin \sqrt{1-n} \frac{\pi}{2}, \quad c = \cos \sqrt{1-n} \frac{\pi}{2}, \quad p = \frac{\sqrt{1-n} L}{2z_0},$$

L - длина прямолинейного промежутка, $\Pi = 1 + \frac{4L}{2\pi z_0}$ (см. (2.8)),

C_m и S_m - эффективные "косинус" и "синус" для рейстрека (см. [3]). Полезно ввести такие обозначения

$$\frac{sp}{\sin \mu} = \text{tg } \nu, \quad \varepsilon = \psi(0) z_0 \gamma_0, \quad (2.10)$$

где $\psi(0)$ - квадрат модуля функции Флоке на азимуте инжектора (считаем $\theta_i = 0$). Используя выражения для C_m и S_m [3], из (2.9) нетрудно получить:

$$\rho_k^{(t)}(\chi, g) = \rho_0^{(t)}(\chi, g) \cos 4\mu k + \varepsilon_0^{(t)}(\chi, g) \sin 4\mu k, \quad (2.11)$$

где

$$\alpha_0 = \xi - \rho_0 \operatorname{tg} \nu = \frac{3+2\rho c}{\sqrt{1-n} \sin \mu} \left(\gamma_0^{(t)}(\chi, g) - \gamma_{\text{опт}}^{(t)}(\chi, g) \right) z_0, \quad (2.12)$$

$$\gamma_{\text{опт}}^{(t)}(\chi, g) = \frac{\rho_0^{(t)}(\chi, g) \cdot 3 \cdot \rho \sqrt{1-n}}{z_0 \cdot 3+2\rho c}$$

Выражение $\gamma_{\text{опт}}$ дается для начала сектора. Подставляя (2.11) в (2.7) и опуская у ρ_0 и α_0 индексы t, χ, g , получим окончательно условие несоударения с инжектором частицы на K -м обороте:

$$\rho_0 (1 - \cos 4\mu k) + (\Delta M)_{\text{об}} \cdot k - g > \alpha_0 \sin 4\mu k. \quad (2.13)$$

Как видно, (13) не зависит явным образом от t и χ , но зависит от g . Частицы, миновавшие инжектор в течение i оборотов, должны иметь ρ_0 и α_0 , удовлетворяющие (2.13) при всех $K = 1, 2, \dots, i$. На рис. 2 а, б, в, г, д на плоскости (ρ_0, α_0) показаны области минования инжектора, границы которых выделены жирными линиями $\Gamma(\rho_0, \alpha_0)$, рассчитанные для различных $n, g, (\Delta M)_{\text{об}}$ применительно к синхрофазотрону ОИЯИ. Как видно, эти области открыты в сторону больших ρ_0 и ограничены по ρ_0 снизу. На одном из этих рисунков пунктиром показаны границы по α_0 , занимаемые пучком, инжектируемым в синхрофазотрон [4]. При расчетах взяты рабочие параметры $H = 150$ эрст, $\dot{H} = 3,56 \cdot 10^3 \frac{\text{эрст}}{\text{сек}}$, $T = 5 \cdot 10^{-6}$ сек, $W_0 = 9$ Мэв.

Обсудим характер этих областей. Просты случаи резонанса $\mu = \frac{\pi}{4} \ell$, $\ell = 1, 2$. Пусть $\ell = 2$. Тогда (2.13) примет вид

$$(\Delta M)_{\text{об}} \cdot k - g > 0,$$

то есть минуют инжектор лишь частицы с $g < (\Delta M)_{\text{об}}$ независимо от ρ_0 и α_0 . Это связано с тем обстоятельством, что период колебаний в точности равен здесь одному обороту, и частица приходит к инжектору всегда в одной и той же фазе.

х) В действительности нет нужды рассматривать все такие K . (2.13) можно переписать в виде

$$\sqrt{\rho_0^2 + \alpha_0^2} \cos(4\mu k - a \operatorname{ctg} \nu \frac{\alpha_0}{\rho_0}) < \rho_0 - g + (\Delta M)_{\text{об}} \cdot k = M(t + kT, \chi).$$

Очевидно, это неравенство выполняется независимо от K , если $K \geq K_{\text{max}}$, такого, что $K_{\text{max}} - 1 \leq \frac{\sqrt{\rho_0^2 + \alpha_0^2} - \rho_0 + g}{(\Delta M)_{\text{об}}} \leq K_{\text{max}}$. Смысл этого условия ясен: оно означает, что M возросло уже настолько, что амплитуда не достаёт до инжектора.

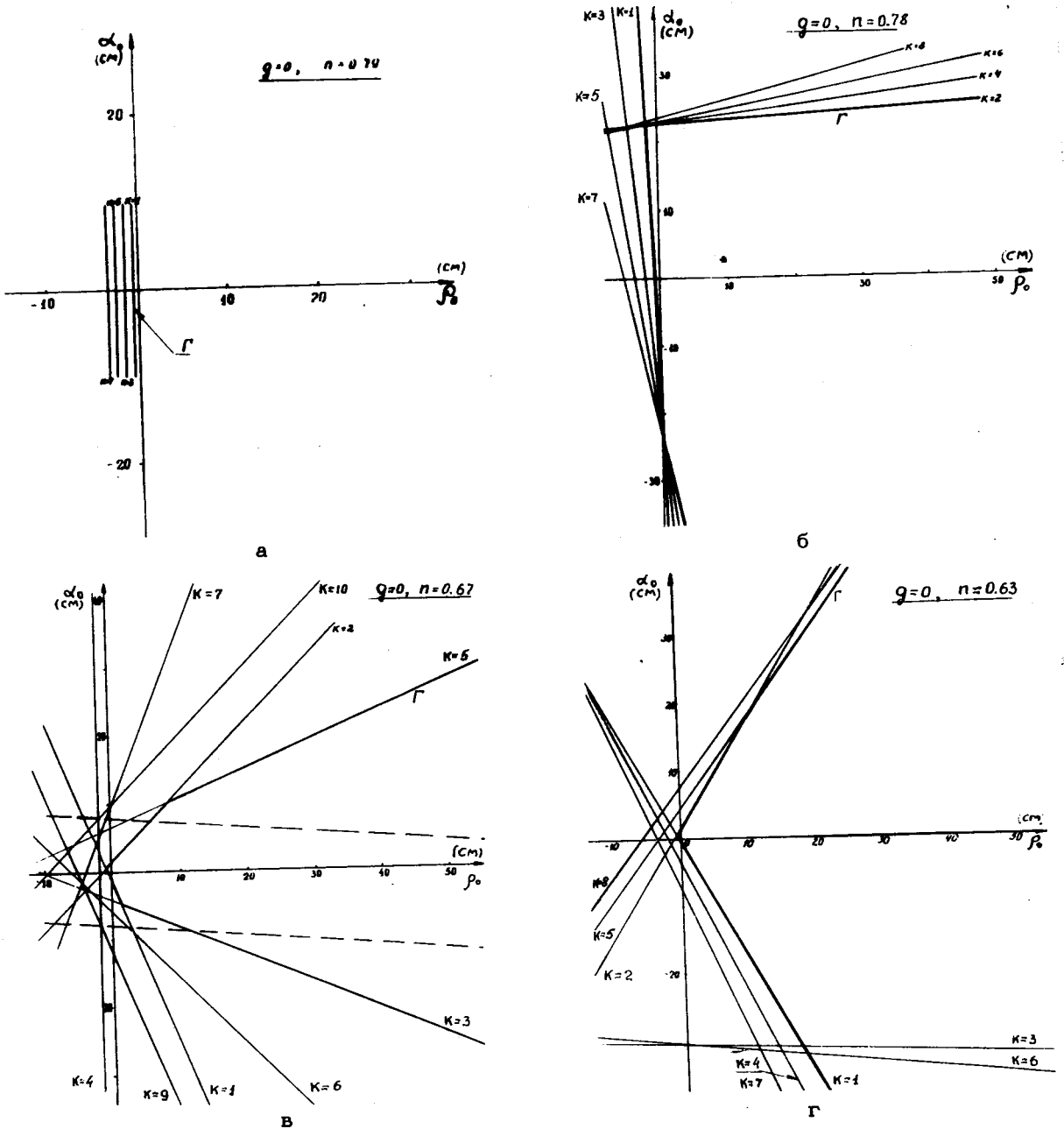


Рис. 2 а, б, в, г.

Области начальных параметров частиц, минующих инжектор. Как видно, границы областей составляются из отрезков прямых линий, разграничивающих плоскость (ρ_0, α_0) на соответствующих оборотах (определенных номеров k) на две части, одна из которых отвечает несударению частиц с инжектором, а другая — соударению. Случаи, показанные на рисунках а, б, в, г, отличаются значениями n . $N = 3,58 \cdot 10^3$ (рабочее) и $g = 0$ везде.

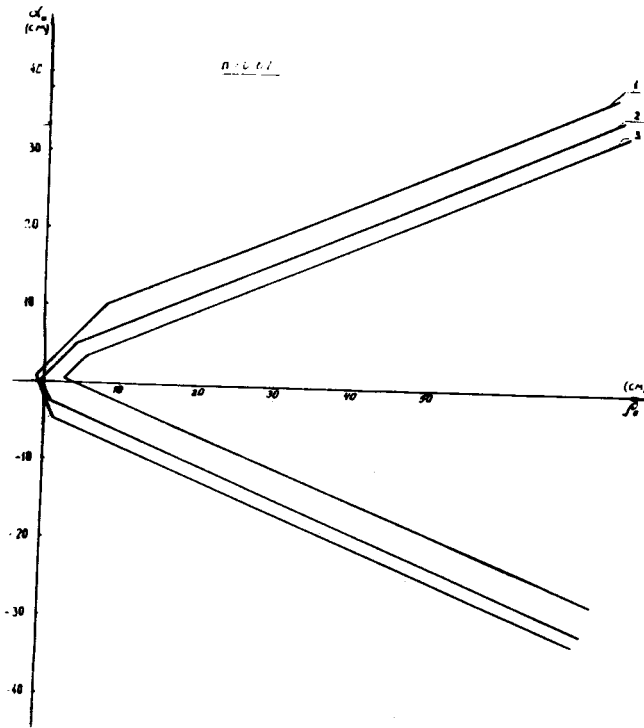


Рис. 2 д.

Области начальных параметров частиц, минующих инжектор, для $n = 0,67$ и

- 1) $g = 0, (\Delta M)_{об} = 1 \text{ см}$ ($\dot{N} = 3,56 \cdot 10^3 \frac{\text{эрт}}{\text{сек}}$ - рабочее);
- 2) $g = 0, (\Delta M)_{об} = 0,5 \text{ см};$ 3) $g = 4 \text{ см}, (\Delta M)_{об} = 1 \text{ см}.$

Для практики этот случай не пригоден, в частности, потому, что при этом $n = 0,16$ слишком мало для вертикальной фокусировки.

При $l = 1$ /см. рис. 2а/ /2.13/ переходит в

$$[1 - (-1)^k] \rho_0 + (\Delta M)_{0\delta} \cdot k - g > 0 ,$$

которое сводится к двум условиям

$$2\rho_0 + (\Delta M)_{0\delta} \cdot k - g > 0 , \quad /2.15а/$$

$$2(\Delta M)_{0\delta} - g > 0 . \quad /2.15б/$$

В этом случае период колебаний равен двум оборотам, и частица на первом обороте приходит в противофазе к исходному положению, а на втором - в фазе. Последнее и приводит к ограничению по g . Ограничение по α_0 здесь вообще отсутствует. Вариант $\mu = \frac{\pi}{4}$ мог бы быть рекомендован при малом Δg в инжектируемом пучке: $\Delta g < 2(\Delta M)_{0\delta} \approx 3$ см при $n = 0,78$ для синхрофазотрона ОИЯИ. Однако даже и при выполнении этого условия следует опасаться здесь дополнительных осложнений, связанных с хорошо известной раскачкой колебаний при резонансе.

При отступлении от резонанса область допустимых g может быть расширена. Рассмотрим случай, близкий к резонансу. Пусть за оборот фаза частицы изменяется на величину

$$4\mu = \pi + \psi , \quad \text{где } \psi - \text{мало.}$$

Тогда вместо /15а,б/ будем иметь:

$$(2 - \psi^2) \rho_0 + (\Delta M)_{0\delta} - g > -\alpha_0 \psi , \quad /2.16а/$$

$$\frac{4\psi^2}{2} \rho_0 + 2(\Delta M)_{0\delta} - g > \alpha_0 \psi . \quad /2.16б/$$

По сравнению с /2.15б/ неравенство /2.16б/ при $\rho_0 > 0$ допускает большие g . При $\alpha_0 = 0$ это очевидно. Если $\alpha_0 \neq 0$, то при $2\alpha_0 \psi < 0$ мы имеем по g большую свободу, чем при $\alpha_0 = 0$, а в случае $2\alpha_0 \psi > 0$ интервал допустимых g сокращается. В результате для примерно симметричного углового разброса относительно $\alpha_0 = 0$ мы будем иметь тот же выигрыш по g , что и при пучке с одним углом $\alpha_0 = 0$. Если сделать пучок не-

симметричным по углам, то в среднем можно еще несколько выиграть по g .

При возрастании абсолютной величины ψ все большую роль начинает играть неравенство /2.16а/ и соответствующие неравенства для $K = 3$ и т.д., приводящие к ограничению по ρ_0 , α_0 .

На рис. 26 представлен случай, достаточно близкий к резонансу / $n = 4,74$ /

Здесь при разумных значениях K величина $\sin 4\mu k$ нигде не равна 0 /хотя при малых K и близка к этому значению/. Поэтому область допустимых ρ_0 и α_0 определяется здесь следующими двумя группами неравенств

$$\alpha_0 < \frac{1}{\sin 4\mu k_1} [\rho_0 (1 - \cos 4\mu k) + (\Delta M)_{об} \cdot K_1 - g], \quad /2.17/$$

при $\sin 4\mu k_1 > 0$,

$$\alpha_0 > \frac{1}{\sin 4\mu k} [\rho_0 (1 - \cos 4\mu k_2) + (\Delta M)_{об} \cdot K_2 - g] \quad /2.18/$$

при $\sin 4\mu k_2 < 0$.

Из рисунка 26 для $g = 0$ видно, что здесь уже появились "потенциальные" потери по α_0 и обусловлены они четными оборотами, когда фаза частицы $4\mu k$ близка к числу, кратному 2π /см.рис. 3/. Потери при $4\mu k$, близких к нечетному числу π /пунктирные линии на рис.3/, когда частица находится в противофазе к исходному колебанию, возможны лишь при отрицательных ρ_0 .

Характерно, что ограничения по α_0 означают здесь одновременное ослабление требований к малости g для небольших α_0 . Однако при столь малой расстройке резонанса / $n - n_{рез.} = 0,01$ / ограничение по g еще очень сильное, так как при изменении g на Δg верхние границы области опускаются на величину $\frac{\Delta g}{\sin 4\mu k_1}$, а нижние - поднимаются на $\frac{\Delta g}{|\sin 4\mu k_2|}$, причем сдвиги границ ввиду малости $\sin 4\mu k$ большие. Зависимость "области минования" от величины / ΔM /_{об.} и, соответственно, от U здесь также сильная. Так, уменьшение этой величины $(\Delta M)_{об}$ на $h > 0$ ухудшает область следующим образом: верхние границы опускаются на $\frac{h \cdot K_1}{\sin 4\mu k}$, а нижние - поднимаются на $\frac{h \cdot K_2}{|\sin 4\mu k_2|}$.

При более сильном отступлении от резонанса зависимость от g и h ослабевает, как это и следует из /2.17/ и /2.18/. На рис. 2в показана "область

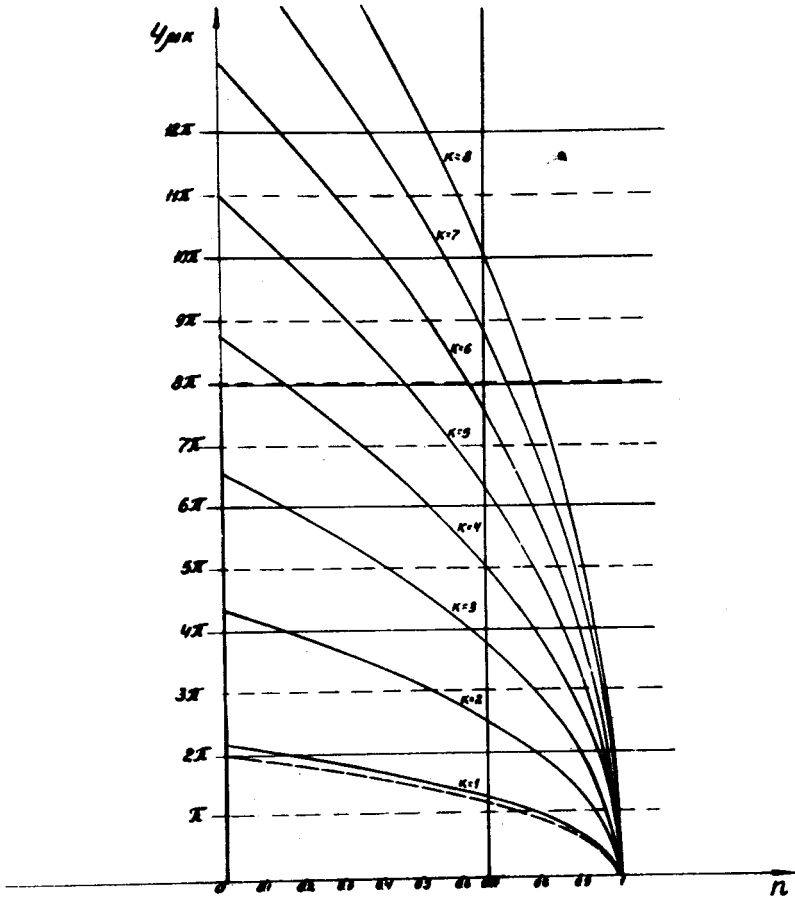


Рис. 3.

Изменение фазы радиальных свободных колебаний за K оборотов в зависимости от n . Для сравнения при $K = 1$ пунктирной линией показано соответствующее изменение фазы для круговой машины.

минования" для рабочего $n = 0,67$ в синхрофазотроне ОИЯИ. Как видно, потери определяются здесь в основном 3-м и 5-м оборотами, когда фаза частицы $4 \mu\text{к}$ близка соответственно к 4π и 6π . На рис 2 g показаны соответствующие области для этого же n и измененных g и $|\Delta M|_{\text{об}}$. Как видно, за счет увеличения g до 4 см и уменьшения $|\Delta M|_{\text{об}}$ в два раза область уменьшается незначительно. Как будет ясно из дальнейшего, малые $|\Delta M|_{\text{об}}$ выгодны для хорошего захвата частиц в режим ускорения, поэтому важно, что уменьшение $|\Delta M|_{\text{об}}$ несильно ухудшает условия минования инжектора.

Рис. 2 g представляет довольно широкую область при $n = 0,63$. Однако, здесь, как и в резонансе, имеется серьезное ограничение по g : частицы уже на 3-м обороте имеют исходную фазу, в то время как при $n = 0,67$ это осуществляется на 8-м обороте /см. рис. 3/.

До сих пор область минования инжектора мы представляли в терминах ρ_0 и α_0 . Поскольку амплитуда колебаний частиц на азимуте инжектора $\alpha_0 = \sqrt{\rho_0^2 + \xi_0^2}$ на исследуемой плоскости есть полярный радиус, то, используя ту же плоскость, нетрудно представить себе "область минования" в терминах ρ_0 и ξ_0 , где $\text{tg } \xi_0 = \frac{\alpha_0}{\rho_0}$. Наименьшая "минаящая" амплитуда равна 0, если линия Γ охватывает начало координат, или $\rho_{\Gamma \min}(g)$ - наименьшее ρ_0 на линии Γ - в противном случае. Траектория ρ_0, ξ_0 будет использована при расчетах захвата реального пучка в режим ускорения.

В дальнейшем мы будем исследовать также захват при фиксированном ξ . На плоскости ρ_0, α_0 таким частицам, миновавшим инжектор, отвечает луч

$$\alpha_0 = \xi - \rho_0 \text{tg } \nu, \quad \rho_0 > \rho_r(\xi, g), \quad /2.10/$$

где ρ_r - абсцисса точки пересечения прямой, соответствующей данному лучу, и линии Γ . Наименьшее "минаящее" ρ_0 для пучка с реальным угловым разбросом /обозначим его $\rho_{\Gamma \min}(g)$ / есть, очевидно, $\min \rho_r(\xi, g)$; соответственно, минимальное расстояние M , с которого начинается минование инжектора, есть $M_{\Gamma \min}(g) = \rho_{\Gamma \min}(g) - g$, так как любое M , в том числе и $M_r(\xi, g) = \rho_r(\xi, g) - g$.

Амплитуда α_0 для фиксированного ξ равна:

$$a_0(\rho_0, \xi) = \sqrt{\rho_0^2 + \alpha_0^2} = \sqrt{\frac{(\rho_0 - \xi \sin \nu \cdot \cos \nu)^2}{\cos^2 \nu} + a_{\min}^2(\xi)}, \quad /2.20/$$

где $a_{\min}(\xi) = |\xi| \cos \nu$ - наименьшая амплитуда при фиксированном ξ , то есть расстояние от начала координат до прямой /2.19/. Соответственно,

$$\rho_0 = \xi \sin \nu \cdot \cos \nu \pm \cos \nu \sqrt{a_0^2 - a_{\min}^2}. \quad /2.21/$$

ρ_0 - однозначная функция a_0 , если $\rho_0 > \xi \sin \nu \cdot \cos \nu$. Если же $\rho_0 < \xi \sin \nu \cdot \cos \nu$, то при изменении ρ_0 амплитуда проходит отрезок $(a_{\min}, a_r(\rho_0, \xi))$ дважды (по ξ_0 наложения нет./ Однако, как видно из рис. 2, величина ρ_0 , как правило, больше $\xi \sin \nu \cdot \cos \nu$. Если при некоторых малых ξ , g это и не так, то все равно превышение $\xi \sin \nu \cdot \cos \nu$ над ρ_0 столь мало, что при аналитическом рассмотрении захвата мы будем полагать в этих случаях $\rho_0 = \xi \sin \nu \cdot \cos \nu$.

§ 3. Область начальных параметров,

отвечающих минованию инжектора и бетатронной

мишени

Займемся теперь вопросом о тех ограничениях, которые накладывает на движение частиц в 1-м режиме второе препятствие - так называемая „бетатронная мишень“. Пусть она расположена на азимуте θ_β и отстоит по радиусу от инжектора на расстоянии $2d$. Будем считать, что частица садится на мишень, если ее амплитуда свободных колебаний на соответствующем азимуте, равная $a_\beta = \sqrt{\frac{\psi_\beta}{\psi_0}}$ ($\psi_0 \equiv \psi(0)$, $\psi_\beta = (\theta_\beta)$), „достает“ до мишени. Неточность, которую мы допускаем при таком рассмотрении, заключается в том, что на самом деле частицы могут в пределах нескольких оборотов обходить препятствие, хотя бы их амплитуда и превышала расстояние от орбиты до этого препятствия. Однако такое уточнение привело бы к излишней громоздкости расчета и не изменило бы результата, так как в рассматриваемой проблеме нас интересует

в сущности не момент, в который частица попадает на мишень, а лишь сам факт выбывания ее из пучка.

Ограничения по ρ_0 , α_0 , a_0 , ξ_0 и т.д., накладываемые бетатронной мишенью, зависят от момента времени, в который мы интересуемся параметрами частиц, вращающихся в камере. Это связано с тем, что мгновенные орбиты, сжимаясь, приближаются к мишени. Пусть в момент t мгновенная орбита занимает положение $M(t, \chi)$, то есть при продолжающейся инжекции в этот момент впускаются частицы с $\rho_0^{(t)} = M(t, \chi) + g$. При этом ввиду зависимости $\rho_0^{(t)}$ от χ и g одному и тому же моменту времени в общем случае соответствует некоторый набор $\rho_0^{(t)}$.

Согласно нашим предположениям, к моменту t в пучке остаются те частицы данного χ и g , у которых

$$a_0 = \sqrt{\rho_0^2 + \alpha_0^2} < \sqrt{\frac{\psi_0}{\psi_\beta}} [2d - M(t, \chi)] = \sqrt{\frac{\psi_0}{\psi_\beta}} [2d + g - \rho_0^{(t)}(\chi, g)] \equiv \mathcal{R}(\rho_0^{(t)}(\chi, g), g). \quad /3.1/$$

Вопрос об условиях свободного вращения частиц в камере исследуем сначала применительно к фиксированным ξ , g . В соответствии с /3.1/ и /2.20/ получим, что граничные ρ_0 частиц, не сталкивающихся при каждом $\rho_0^{(t)}$ с мишенью, лежат на одной из ветвей гиперболы:

$$\rho_0 = \xi \sin \nu \cos \nu \pm \sqrt{(2d + g - \rho_0^{(t)})^2 - \frac{\psi_\beta}{\psi_0} a_{\min}^2(\xi)} \cdot \sqrt{\frac{\psi_0}{\psi_\beta}} \cos \nu. \quad /3.2/$$

Эта ветвь для $\xi = 8 \text{ см}$, $d = 65 \text{ см}$, $g = 0$ показана на рис. 4 /кривая \mathcal{R} /.

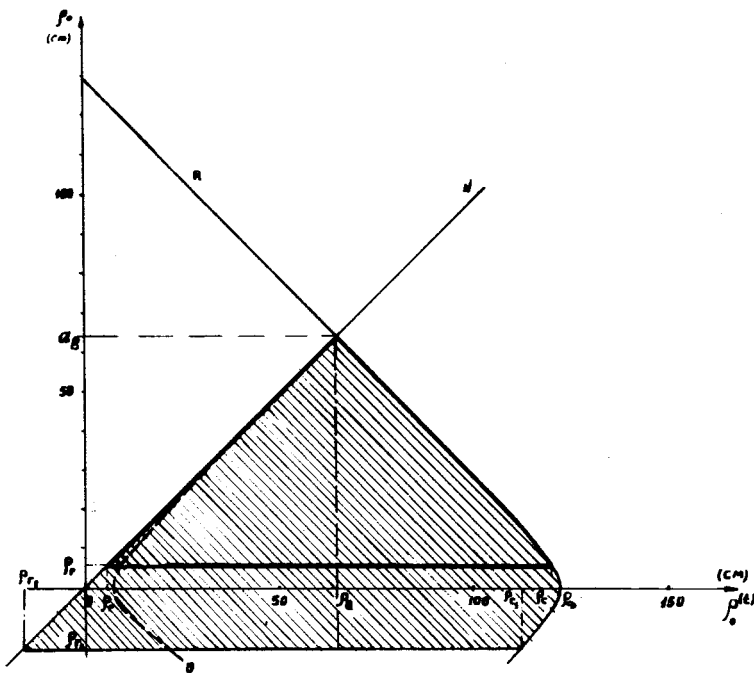


Рис. 4

Область начальных параметров, отвечающих минованию инжектора и бетатронной мишени /плоскость $(\rho_0, \rho_0^{(t)})$. Граница области показана жирной линией; $n = 0,67$; $g = 0$; $\xi = 8$ см; $(\Delta M)_{об} = 1$ см. Для случая, когда в состав границы области входит $\rho_0 = \rho_{r1} < \xi \sin \nu \cdot \cos \nu$ ради наглядности взяты резко отличающиеся параметры: $n = 0,79$; $g = 0$; $(\Delta M)_{об} = 15$ см.

При каждом $\rho_0^{(t)}$ область ρ_0 , отвечающая минованию мишени, представляется на указанном рисунке отрезком прямой $\rho_0 = \text{const}$, ограниченным крыльями гиперболы.

Если учесть, что с инжектором соударяются частицы, имеющие $\rho_0 < \rho_r(\xi, g)$, то, отбрасывая значения ρ_0 , лежащие ниже горизонтальной прямой $\rho_0 = \rho_r$ (на рисунке показаны два значения ρ_r применительно к различным μ и $(\Delta M)_{об}$), получим область минования обоих препятствий. Нанесем на плоскость $(\rho_0, \rho_0^{(t)})$ еще прямую $\rho_0 = \rho_0^{(t)}$ /на рис. 4 - прямая N' . Для любого фиксированного момента t , то есть для соответствующего набора $\rho_0^{(t)}$, в камере могут присутствовать частицы, ρ_0 которых лежат ниже этой прямой. Последнее связано с тем, что при каждом $\rho_0^{(t)}(\chi, g)$ частицы с данными χ и g и большими ρ_0 еще не выпущены из инжектора.

Рассмотрим для некоторого χ как изменяется интересующая нас область в зависимости от времени, или от $\rho_0^{(t)}(\chi, g)$, если ускоряющее напряжение не включается. Как видно, начиная со значения $\rho_0^{(t)} = \rho_r$ и кончая значением $\rho_0^{(t)} = \rho_B$, область нарастает, причем линейно с $\rho_0^{(t)}$. После ρ_B все вновь поступающие частицы /если таковые есть/ сразу садятся на мишень, и в то же время здесь начинается уменьшение исследуемой области, т.е. потеря частиц данного χ , поступивших в камеру в предшествующие моменты времени. Отсюда, в частности, следует, что, если $\rho_B < \rho_r$, то минование одновременно обоих препятствий невозможно. Для изучения дальнейшего процесса следует различать два случая.

$$1/ \rho_r(\xi, g) \geq \xi \sin \nu \cdot \cos \nu.$$

Тогда к моменту ρ_c область минования становится равной нулю, и все частицы, вращавшиеся в камере, будут уже поглощены мишенью.

$$2/ \rho_r(\xi, g) \leq \xi \sin \nu \cdot \cos \nu \quad /на рис.4 такое значение$$

ρ_r обозначено ρ_1 /. Здесь в точке ρ_c вместе с продолжающимся процессом поглощения частиц, выпущенных во все более ранние моменты времени, и тех, которые поступают вновь, начинается обратный процесс - высадка на мишень частиц, попавших в пучок раньше всего (с $\rho_0 = \rho_r$) и следующих за ними. В точке ρ_D пучка уже нет.

На рис. 5 представлена та же картина, что и на рис.4, но преобразо-

ванная к координатам $a_o, \rho_o^{(t)}$. Аналогичные кривые обозначены теми же индексами. В частности, прямая N "нарастающих" в пучке ρ_o преобразуется в гиперболу N - кривую возникновения амплитуд a_o в зависимости от $\rho_o^{(t)}$.

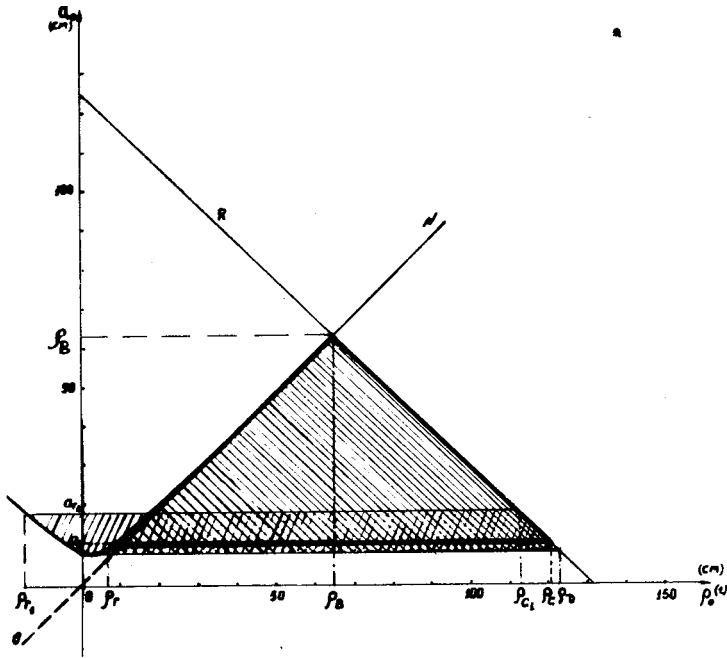


Рис. 5.

То же, что и на рис. 4, но для плоскости $(a_o, \rho_o^{(t)})$.

При переходе использована формула /2.20/ с заменой в ней $\rho_o \rightarrow \rho_o^{(t)}$.

Рис. 5 не требует особых пояснений, если учесть то, что сказано в подписи к рис. 4 и отмеченный в § 2 факт, что при $\rho_r < \xi \sin \psi \cos \psi$ интервал $(a_{\min}(\xi), a_r(\xi, g))$ проходится дважды /на рис. 5 соответствующая область отмечена двойной штриховкой/.

Легко показать, что

$$\rho_b(\xi, g) = 2d + g - \sqrt{\frac{\psi_B}{\psi_o}} a_B(\xi, g), \quad /3.3a/$$

$$\rho_c(\xi, g) = 2d + g - \sqrt{\frac{\psi_B}{\psi_o}} a_r(\xi, g), \quad /3.3b/$$

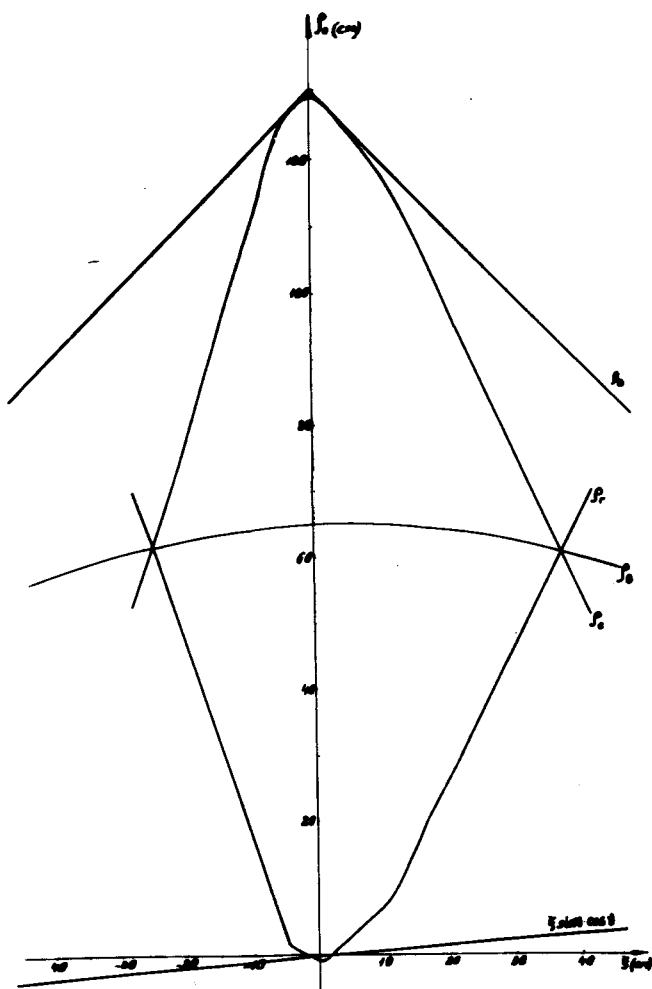


Рис. 6.

Параметры, заданные уравнениями /3.3/, а также ρ_r (для $n=0,67$; $(\Delta M)_{0\delta} \approx 1 \text{ см}$) и $\xi \sin \nu \cos \nu$ в зависимости от ξ .

$$\rho_D(\xi, g) = 2d + g - \sqrt{\frac{\psi_D}{\psi_0}} a_{\min}(\xi), \quad /3.3в/$$

причем

$$a_B = \frac{(2d+g)^2 + \xi^2 \cos^2 \nu - 2(2d+g)\xi \sin \nu \cdot \cos \nu}{\cos \nu \sqrt{(2d+g)^2 - 2(2d+g)\xi \sin \nu \cdot \cos \nu + \cos^2 \nu \cdot (1 - \frac{\psi_D}{\psi_0}) \xi^2} + \sqrt{\frac{\psi_D}{\psi_0}} (2d+g) - \sqrt{\frac{\psi_D}{\psi_0}} \xi \sin \nu \cdot \cos \nu}. \quad /3.4/$$

Для круговой машины, где $\cos \nu = 1$, $\frac{\psi_D}{\psi_0} = 1$, эта формула существенно упрощается:

$$a_B(\xi, g) = \frac{2d+g}{2} + \frac{\xi^2}{2(2d+g)}; \quad \rho_B(\xi, g) = \frac{2d+g}{2} - \frac{\xi^2}{2(2d-g)}. \quad /3.4а/$$

Физический смысл ρ_B и a_B следующий: при $\rho_0^{(t)}(\chi, g) = \rho_B(\xi)$ амплитуда частиц с данным ξ , т.е. a_B , такова, что будучи преобразованной к азимуту бетатронной мишени, она равна расстоянию от орбиты до этой мишени. Величины ρ_C и ρ_D пояснений не требуют. На рис. 6 показаны кривые /3.3/ и $\rho_B(\xi, g)$ в зависимости от ξ для $g = 0$, $d = 65$ см, $\psi_D = \psi_0$, $\cos \nu = 0,997$, $n = 0,87$ и других параметров синхрофазотрона ОИЯИ. Как видно, вращение частиц в первом режиме возможно лишь при ξ , лежащих в пределах -25 см $< \xi < 37$ см, соответственно, $-17' < \gamma_0 < 25'$, когда $\rho_B > \rho_C$.

Зафиксируем теперь χ и g и перейдем к плоскости / ρ_0 , α_0 / , соответственно / a_0 , ξ_0 /. На этой плоскости область минования обоих препятствий ограничена линией Γ со стороны малых ρ_0 , а со стороны больших ρ_0 - либо окружностью радиуса /3.1/, либо прямой $\rho_0^{(t)}(\chi, g)$, либо смешанной границей, составленной из двух последних. Здесь также, как и выше, можно проследить все этапы видоизменения области во времени. В частности, все вновь поступающие частицы будут сразу гибнуть на мишени, начиная со значения $\rho_0^{(t)} = \rho_{B \max}(g) = \max \rho_B(\xi, g)$, $M_{B \max}(g) = \rho_{B \max}(g) - g$, когда до мишени как раз достает частица, вылетевшая из инжектора под оптимальным углом: $\xi_{\text{опт}}(\rho_{B \max}) = \rho_{B \max} \cdot \text{tg } \nu$. Обозначая соответствующую амплитуду: $a_{B \min}(g) = \min a_B(\xi, g)$, будем иметь:

$$a_{Bmin}(g) = \rho_{Bmax}(g) = \frac{2d+g}{1+\sqrt{\psi_p/\psi_0}} \quad /3.5/$$

Заметим, кстати, что разложение /3.4/ по $\xi - \xi_{onm}(\rho_{Bmax})$ / дает:

$$a_B = a_{Bmax}(g) + \frac{[\xi - \xi_{onm}(\rho_{Bmax})]^2}{2(2d+g)},$$

$$\rho_B = \rho_{Bmax}(g) - \frac{\sqrt{\frac{\psi_p}{\psi_0}} [\xi - \xi_{onm}(\rho_{Bmax})]^2}{2(2d+g)} \quad /3.6/$$

§ 4. Условия захвата частиц в режим ускорения

Первый режим заканчивается к моменту включения ускоряющего напряжения. Считая, что заданная амплитуда V_0 этого напряжения устанавливается мгновенно, проанализируем условия захвата частиц в режим ускорения. При этом будем иметь в виду, что на данном этапе теряются те частицы, которые 1/не удовлетворяют условиям устойчивости радиально-фазового движения, то есть не попадают в сепаратрису, 2/ хотя и попадают в сепаратрису, но их суммарная амплитуда свободных и радиально-фазовых колебаний превосходит расстояние до одного из препятствий /инжектора или бетатронной мишени/.

Если обозначить через h отклонение мгновенной орбиты частицы данной энергии от равновесной орбиты, то первый интеграл фазового уравнения /см., например, [1] / может быть записан в виде:

$$\frac{h^2}{b_{max}^2} - \frac{h_0^2}{b_{max}^2} = \frac{(\sin \Phi - \Phi \cos \Phi_3) - (\sin \Phi_0 - \Phi_0 \cos \Phi_3)}{2(\sin \Phi_3 - \Phi_3 \cos \Phi_3)}, \quad /4.1/$$

где b_{max} - максимально возможная амплитуда радиально-фазовых колебаний, определяемая границей сепаратрисы, Φ - фаза, Φ_3 - равновесная фаза, Φ_0 , h_0 - соответственно h и Φ в некоторый начальный

момент /будем считать его моментом включения ускоряющего напряжения/.

Фаза Φ_s находится в области $0 < \Phi_s < \frac{\pi}{2}$, а Φ_0 - в пределах $-\Phi_s < \Phi_0 < 2\pi - \Phi_s$.

Полагая в /4.1/ $\Phi = \Phi_s$ и считая, что Φ_0 и h_0 находятся внутри сепаратрисы: $-\Phi_s < \Phi_0 < \Phi_{2max}$ (Φ_{2max} - правая граница сепаратрисы), $-b_{max} < h_0 < b_{max}$, из /4.1/ получим следующее выражение, связывающее амплитуду радиально-фазовых колебаний $b = |h_{\Phi=\Phi_s}|$ с Φ_0 и h_0 .

$$\frac{b^2}{b_{max}^2} - \frac{h_0^2}{b_{max}^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sin \Phi_0 - \Phi_0 \cos \Phi_0}{2(\sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s)}. \quad /4.2/$$

С другой стороны, если задать действительное h_0 , удовлетворяющее неравенству $|h_0| \leq b_{max}$ и b из области $|h_0| \leq b \leq b_{max}$, то уравнение /4.2/ определяет два значения начальной фазы $\Phi_0 = \begin{cases} \Phi_1(|h_0|, b) \\ \Phi_2(|h_0|, b) \end{cases}$, дающих данную амплитуду b при сформулированных условиях.

Нетрудно видеть, что частица с некоторым $|h_0| \leq b$, имеющая Φ_0 в пределах $\Phi_1 < \Phi_0 < \Phi_2$, попадает в сепаратрису и ее амплитуда радиально-фазовых колебаний не будет превосходить b . Отсюда ясно, что функция

$$\xi\left(\frac{b^2 - h_0^2}{b_{max}^2}\right) = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2\pi}, \quad b_{max}^2 \geq b^2 \geq h_0^2 \quad /4.3/$$

есть вероятность того, что частица с заданным h_0 находится в сепаратрисе и имеет при этом амплитуду радиально-фазовых колебаний не более b , если считать все фазы для частицы равновероятными.

Отметим некоторые свойства $\xi(z)$ на отрезке /0.1/ /см. также рис. 7/.

$$\begin{aligned} 1/ \quad \xi(0) &= 0, \\ \xi(1) &= \frac{\Phi_{2max} + \Phi_s}{2\pi} \end{aligned} \quad /4.4/$$

- максимальный размер сепаратрисы по азимуту.

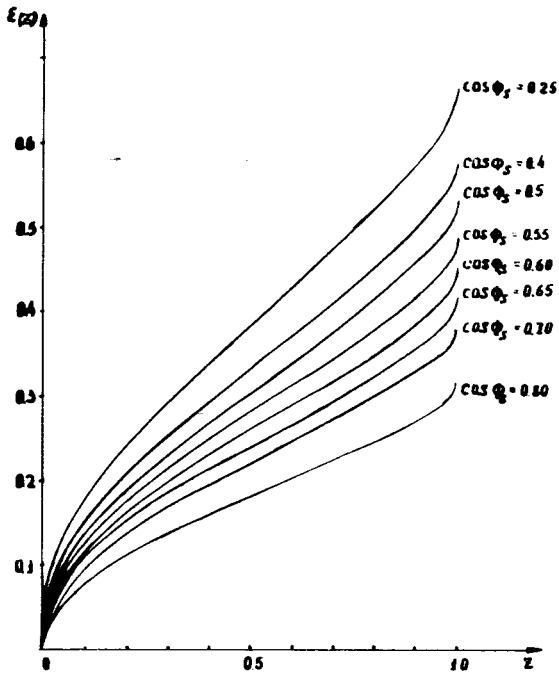


Рис. 7.

Функция, описывающая вероятность захвата частиц в сепаратрису.

2/ $\mathcal{E}(z)$ - монотонно возрастает на отрезке /0.1/. Действительно, в силу /4.3/ и /4.2/ и учитывая, что $\Phi_1 \leq \Phi_s \leq \Phi_2$, получим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\Phi_2}{dz} - \frac{d\Phi_1}{dz} \right) = \frac{\sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s}{2\pi} \left(\frac{1}{\sin \frac{\Phi_2 - \Phi_s}{2} \sin \frac{\Phi_2 + \Phi_s}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\Phi_s - \Phi_1}{2} \sin \frac{\Phi_s + \Phi_1}{2}} \right) > 0 \quad /4.5/$$

Как видно, /4.5/ имеет особенности при $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3$ / $z = 0$ / и при $\Phi_1 = -\Phi_3$ ($z = 1$). Из /4.2/ легко выяснить характер этих особенностей. При $z \ll 1$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s}{\sin \Phi_s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + f_1(z), \quad /4.6/$$

где $f_1(z)$ - неособенная функция.

При $1-z \ll 1$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s}{\sin \Phi_s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} + f_2(z), \quad /4.7/$$

$f_2(z)$ - неособенная ^{x/}.

Пусть ускоряющее напряжение включается в момент t_f ($\rho_0^{(t_f)} \equiv \rho_0^{(f)}$), и равновесная орбита отстоит от инжектора на $d-\delta$. Тогда для частицы с энергией χ

$$\eta_0 = (d-\delta) - M(t_f, \chi) = d - \delta + g - \rho_0^{(f)}(\chi, g) = \chi + \nu, \quad /4.8/$$

где

$$\nu = (d-\delta) - M(t_f, 0) = d - \delta + g - \rho_0^{(f)}(0, g) \quad /4.8a/$$

- отклонение мгновенной орбиты центральной энергии в момент t_f от равновесной орбиты.

В предположении отсутствия связи между свободными и радиально-фазовыми колебаниями на основе предыдущего получим, что вероятность того, что частица с энергией χ и амплитудой свободных колебаний α_0 попадет в ускоряющий режим, есть

x/ М.С. Рабинович использует функцию $\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}(z)$, $\chi = \sqrt{z}$.
 Производная $\frac{d\mathcal{E}_0}{dx}$ при $x = 0$ не имеет особенности и равна $\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s}{\sin \Phi_s}}$, но при $x = 1$ особенность остается:
 $\frac{d\mathcal{E}_0}{dx} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s}{\sin \Phi_s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} + f_0(x), \quad /4.7a/$

где $f_0(x)$ - неособенная функция.

$$\mathcal{E} \left(\frac{b^2(a_0) - \eta_0^2(x, \psi)}{b_{\max}^2} \right), \quad /4.9/$$

где

$$0 \leq b(a_0) = \min \begin{cases} d - \delta - a_0 \\ d + \delta - \sqrt{\frac{\psi_B}{\psi_0}} a_0 \end{cases} \quad /4.9a/$$

определяется условиями несовпадения частиц с препятствиями на данном этапе захвата^{x/}. При этом \mathcal{E} считается здесь доопределенной таким образом, что $\mathcal{E}(z) = 0$ при $z < 0$, и если $b(a_0)$ из /4.9a/ больше b_{\max} , то в /4.9/ вместо первой подставляется эта последняя величина.

Как видно, функция \mathcal{E} в /4.9/ зависит от параметров частицы a_0, χ , от геометрии / d / и характеристик ускоряющего поля: момента его включения / ψ / , положения равновесной орбиты / δ / , $b_{\max}(V_0)$.

Очевидно, в режим ускорения захватываются только те частицы, для которых $\mathcal{E} \neq 0$. Сравним область параметров частицы, отвечающих минованию препятствий / § 2, § 3/ и область, где $\mathcal{E} \neq 0$. Требование $z \geq 0$ /см. выше/ при

$b(a_0) \leq b_{\max}$ дает для $\psi_B = \psi_0$:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\leq \rho_0^{(f)}(x, g) - g && \text{при } \rho_0^{(f)}(x, g) - g \leq d - \delta, \\ a_0 &\leq 2d - (\rho_0^{(f)}(x, g) - g) - 2\delta && \text{при } \rho_0^{(f)}(x, g) - g \geq d - \delta. \end{aligned} \right\} \delta \geq 0 \quad /4.10a/$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &\leq \rho_0^{(f)}(x, g) - g - 2|\delta| && \text{при } \rho_0^{(f)}(x, g) - g \leq d + |\delta| \\ a_0 &\leq 2d - (\rho_0^{(f)}(x, g) - g) && \text{при } \rho_0^{(f)}(x, g) - g \geq d + |\delta| \end{aligned} \right\} \delta \leq 0 \quad /4.10b/$$

x/ Естественно, захватываться могут лишь те амплитуды a_0 , для которых / 4.9a/ непротиворечиво. В противном случае, как легко видеть, частица садится на одно из препятствий.

Условия /4.10а/ "отсекают" частицы, которые на первом фазовом колебании попадут на ближайшее для этого случая / $\delta > 0$ / препятствие-инжектор. При $\delta \leq 0$ частицы отсекаются мишенью - /4.10б/. Легко понять, что при $\delta \geq 0$ 1-е неравенство /4.10а/ соответствует потере небольшого числа частиц на инжекторе, которая в принципе произошла бы и в том случае, если ускоряющее напряжение не включать, а просто в момент t_f прекратить рост поля, то есть остановить движение орбит. Соответствующая "остановочная" граница на рисунках 4 и 5 / $\rho_o^{(t)}$ отождествляем с $\rho_o^{(f)}$ / показана пунктиром /линия 0/. Характерно, что вне зависимости от ξ, g эта граница проходит так, что она уменьшает "область минования" препятствий в 1-м режиме: линии \mathcal{N} она не пересекает, а может лишь касаться ее при $g = 0$. Линия \mathcal{R} с линией 0 пересекается в точке $\rho_o^{(f)} = \rho_A = d + g$, и ρ_A всегда больше ρ_B . Второе условие /4.10а/ отражает соударение частиц с инжектором после половины колебания. Если $\delta = 0$, то потерь здесь нет, поскольку получаемая из этого неравенства граница совпадает с \mathcal{R} , и интересующие нас частицы уже потерялись на бетатронной мишени в 1-м режиме. При $\delta > 0$ рассматриваемое условие приводит к уменьшению нашей области. Если $\delta < 0$, то потери частиц^{x/} во 2-ом режиме возможны лишь на бетатронной мишени - после 1/2 фазового колебания. Этому отвечает 1-е условие /4.10б/, а второе указанное условие дает опять границу \mathcal{R} . Наибольшее захватываемое a_o равно, таким образом, d и ему соответствует $\rho_o = \rho_d$, определяемое для каждого ξ из уравнения /2.21/, если выбрать в нем знак плюс и положить $a_o = d$. Если $b(a_o)$ в /4.9/ равно b_{max} /при $b(a_o)$ из /4.9а/, большем или равном b_{max} /, то $\xi \neq 0$ будет означать

$$-b_{max} < \eta_o < b_{max}, \quad -b_{max} < d - \delta + g - \rho_o^{(f)}(x, g) < b_{max}, \quad /4.11/$$

что на рис. 4 и 5 дает вертикальные границы /там они не показаны/, симметрично расположенные относительно вертикали $\rho_o^{(f)} = \rho_A - \delta$, отвечающей в общем случае $\delta \neq 0$ см. 2-е неравенство /4.10а/ и 1-е неравенство /4.10б// наибольшей захватываемой амплитуде $a_o = d - \delta$ и, соответственно, $\rho_o = \rho_{d-\delta}$, получаемому из /2.21/ при $a_o = d - \delta$.

^{x/}Мы говорим здесь о потерях частиц, захваченных в сепаратрису, или точнее, о возможной потере для них из-за фазового движения некоторой части области минований препятствий, имеющейся в 1-м режиме, поскольку условия инжекции, т.е. заполненность этой области пока неопределенны.

Итак, можно сделать вывод, что при любых δ и ν область в четырехмерном пространстве ρ_0, ξ, g, χ или α_0, ξ, g, χ , где $\xi \neq 0$, дополненная условием $\rho_0 > \rho_r(\xi, g)$

$$\text{или } \alpha_0 > \begin{cases} \alpha_r(\xi, g) & \text{при } \rho_r(\xi, g) > \xi \sin \nu \cos \nu \\ \alpha_{\min}(\xi) & \text{при } \rho_r(\xi, g) < \xi \sin \nu \cos \nu, \end{cases}$$

содержится внутри соответствующей области минования препятствий в 1-м режиме. Это утверждение основано, очевидно, на сравнении сечений указанных областей плоскостями $g = \text{const}$, $\xi = \text{const}$, проведенном выше.

Ранее рассматривались также сечения "области 1-го режима" плоскостями $g = \text{const}$ и $\chi = \text{const}$. Аналогично предыдущему можно показать, что при учете линии $\Gamma(g)$ четырехмерная область $\rho_0, \alpha_0, g, \chi$ или α_0, ξ_0, g, χ , где $\xi \neq 0$, содержится внутри соответствующей области минования препятствий в первом режиме.

Любую из рассмотренных или эквивалентных им областей, где $\xi \neq 0$, дополненных указанными выше способами, обозначим Σ .

§ 5. Эффективность инъекции

В конечном счете нас интересует число частиц Q_ξ , захваченных в режим ускорения.

Моменту начала инъекции t_1 отвечает $\rho_0^{(1)}(\chi, g)$, концу инъекции $t_2 = t_1 + \tau$ - величина $\rho_0^{(2)}(\chi, g) = \rho_0^{(1)}(\chi, g) + u\tau$ и моменту включения ускоряющего напряжения $t_f > t_1$, соответственно, $\rho_0^{(f)}(\chi, g) > \rho_0^{(1)}(\chi, g)$.

Пусть полный ток инжектируемых частиц есть $\mathcal{J}(t)$. Число частиц Q , впущенных в камеру за все время инъекции τ , есть

$$Q = \frac{1}{e} \int_{t_1}^{t_1 + \tau} \mathcal{J}(t) dt \quad (5.1)$$

χ , ν и δ в совокупности определяют ρ_0 ; и χ, ν, δ, g определяют $\rho_0^{(f)}(\chi, g)$.

где e - заряд частицы. Введем коэффициент захвата частиц в режим ускорения $\sigma = \frac{Q_E}{Q} \leq 1$. Такой коэффициент удобен тем, что в отсутствие взаимодействия между частицами /малая плотность пучка/ он зависит не от величины тока, а лишь от распределения инжектируемых частиц по углам, энергиям, g и во времени /см. ниже/. Тогда

$$Q_E = \sigma Q = \frac{\sigma}{e} \int_{t_1}^{t_1+\tau} J(t) dt = \frac{\tau_{эф}}{e} \cdot \frac{1}{e} \int_{t_1}^{t_1+\tau} J(t) dt = \frac{\bar{J} \tau_{эф}}{e}, \quad /5.2/$$

где \bar{J} - средний ток в интервале $[t_1, t_1+\tau]$, $\tau_{эф} = \sigma \tau$ - то время, на которое надо умножить средний ток из инжектора, чтобы получить захваченный в режим ускорения заряд $e Q_E$.

При заданном токе из инжектора \bar{J} и заданной длительности инъекции τ оба параметра, как σ , так и $\tau_{эф}$, являются удобными характеристиками захвата частиц. Однако если имеется возможность варьировать τ , то σ оказывается неподходящей характеристикой, так как с увеличением τ σ уменьшается, но $\tau_{эф}$ и, соответственно, Q_E , во всяком случае, не убывает /см. §§ 6,7/.

Для нахождения σ и $\tau_{эф}$ необходимо, очевидно, знать не только ток из инжектора $J(t)$, но и то, с какими углами, энергиями и при каком g вылетели различные частицы в каждый данный момент времени.

Пусть начальные параметры ограничены так:

$\gamma_{01} \leq \gamma_0 \leq \gamma_{02}$ ($\gamma_{02} - \gamma_{01} = \Delta \gamma_0$), $g_1 \leq g \leq g_2$ ($g_2 - g_1 = \Delta g$), W - как в § 2, а время инъекции - как введено выше. Пусть также плотность тока в пространстве γ_0, W, g есть $j \Lambda(t, \gamma_0, W, g)$, где $j = const$, и Λ нормирована согласно

$$\int_{t_1}^{t_1+\tau} \int_{\gamma_{01}}^{\gamma_{02}} \int_{W_1}^{W_2} \int_{g_1}^{g_2} \Lambda(t, \gamma_0, W, g) dt d\gamma_0 dW dg = \tau \cdot \Delta \gamma_0 \cdot \Delta W \cdot \Delta g. \quad /5.3/$$

Тогда

$$J(t) = j \int_{r_{01}}^{r_{02}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{g_1}^{g_2} \Lambda(t, r_0, W, g) dr_0 dW dg, \quad \bar{J} = j \Delta r_0 \Delta W \Delta g, \quad /5.4/$$

$$Q = \frac{1}{\bar{t}} j \bar{t} \cdot \Delta r_0 \cdot \Delta W \cdot \Delta g.$$

Отсюда, в частности, ясно, что j есть усредненная по времени плотность тока в пространстве r_0 , W , g , и нормировка Λ выбрана так, что единичная плотность тока есть $\bar{\Lambda}$ — величина, полученная из Λ путем усреднения по t , r_0 , W , g .

Вероятность для частицы оказаться в заданном объеме равна:

$$\frac{1}{\bar{t} \cdot \Delta r_0 \cdot \Delta W \cdot \Delta g} \int \Lambda(t, r_0, W, g) dt dr_0 dW dg. \quad /5.5/$$

Перейдем от переменных t , r_0 , W , g к переменным ρ_0 , ξ , η_0 , g . Согласно /2.2/, /2.6/, /2.10/, /2.3/ и /4.8/

$$t = \frac{\rho_0 - \rho_0^{(1)}(\eta_0 - \nu, g)}{u} + t_1 = t_\nu(\rho_0, \eta_0, g), \quad /5.6a3/$$

$$r_0 = \frac{1}{\psi_0 z_0} \cdot \xi, \quad /5.66/$$

$$W = \Delta W \frac{(\eta_0 - \nu)}{\Delta M_w} + W_0 = W_\nu(\eta_0), \quad /5.6r/$$

$$g = g. \quad /5.6д/$$

Преобразование элемента объема к координатам /5.6/ дается формулой:

$$dt dr_0 dW dg = \frac{\partial(t, r_0, W, g)}{\partial(\rho_0, \xi, \eta_0, g)} d\rho_0 d\xi d\eta_0 dg, \quad /5.7/$$

где

$$\frac{\partial (t, \gamma_0, W, g)}{\partial (\rho_0, \xi, \eta_0, g)} = \frac{\Delta W}{\psi_0 z_0 u \cdot \Delta M_w} \dots \quad /5.7a/$$

- якобиан перехода.

Согласно /5.5/, вероятность нахождения частицы в объеме $d\rho_0 d\xi d\eta_0 dg$ есть

$$\frac{1}{\Delta g \cdot \Delta M_w \cdot \Delta \xi \cdot u \tau} \Lambda(t, \rho_0, \eta_0, g, \gamma_0(\xi), W, \eta_0, g) d\rho_0 d\xi d\eta_0 dg, \quad /5.8/$$

где $\Delta \xi = \psi_0 z_0 \cdot \Delta \gamma_0$.

Для координат $a_0 \cdot \xi_0 \cdot \eta_0 \cdot g$ соответствующая вероятность ввиду соотношения $d\rho_0 da_0 = d\rho_0 d\xi = a_0 da_0 d\xi_0$ равна

$$\frac{1}{\Delta g \cdot \Delta M_w \cdot \Delta \xi \cdot u \tau} \cdot a_0 \Lambda(t, \rho_0(a_0, \xi_0), \eta_0, g, \gamma_0(\xi(a_0, \xi_0)), W, \eta_0, g) da_0 d\xi_0 d\eta_0 dg \quad /5.9/$$

Если принять, что вне границ пучка по $t \cdot \gamma_0 \cdot W \cdot g$, где Λ - неопределенна, $\Lambda = 0$, а также считать, что в течение времени, равного периоду обращения частиц в синхрофазотроне, ток из инжектора, усредненный по высокочастотному периоду последнего, меняется мало или совсем не меняется, то можно написать

$$\sigma = \frac{1}{\Delta g \cdot \Delta M_w \cdot \Delta \xi \cdot u \tau} \int_{\Sigma} \xi \left(\frac{(d - |\delta| - a_0)^2 - k_0^2}{\xi_{max}^2} \right) \Lambda \cdot a_0 \cdot da_0 d\xi_0 d\eta_0 dg. \quad /5.9/$$

Здесь $d - |\delta| - a_0$ есть $b(a_0)$ из /4.9/ применительно к рассматриваемому случаю, когда $\psi_p = \psi_0$. Нас будет интересовать также захват при фиксированных ξ и g . При этом удобно пользоваться координатами $\rho_0 \cdot \xi \cdot \eta_0 \cdot g$ и применять функцию Π , определенную следующим образом:

$$\Pi(f_1(x, y, \dots, z) \leq f(x, y, \dots, z) \leq f_2(x, y, \dots, z)) = \begin{cases} 1 & \text{при } f_1(x, y, \dots, z) \leq f(x, y, \dots, z) \leq f_2(x, y, \dots, z), \\ 0 & \text{при } f(x, y, \dots, z) < f_1(x, y, \dots, z) \text{ или } f(x, y, \dots, z) > f_2(x, y, \dots, z), \end{cases} /5.10/$$

где f_1, f, f_2 - некоторые функции x, y, \dots, z .

Отметим два свойства функции Π

$$\Pi(f_1 \leq f \leq f_2) = \Pi(f_1 + f_0 \leq f + f_0 \leq f_2 + f_0),$$

$$\Pi(f_1 \leq f \leq f_2) = \Pi(f_0 f_1 \leq f_0 f \leq f_0 f_2), \quad /5.10a/$$

где $f_0 = f_0(x, y, \dots, z)$ - произвольная функция /в последнем случае $f_0 \neq 0$ /.

Согласно /5.10a/, а также /5.6a/ и /4.8/

$$\Pi(t_1 \leq t \leq t_1 + \tau) = \Pi(\rho_0^{(1)}(x, g) \leq \rho_0 \leq \rho_0^{(1)}(x, g) + u\tau) \equiv \Pi_1 \quad /5.11/a/$$

$$\Pi(-\frac{\Delta M_w}{2} \leq \chi \leq \frac{\Delta M_w}{2}) = \Pi(-\frac{\Delta M_w}{2} + \nu \leq \eta_0 \leq \frac{\Delta M_w}{2} + \nu) \equiv \Pi_2 \quad /5.11б/$$

В интересующем нас случае $\Lambda = \Lambda \Pi_1 \Pi_2$, и эта функция отлична от нуля внутри параллелограмма $PQUV$, показанного на рис. 8. Ясно, что здесь

$$\Lambda = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \Lambda = \Pi(\underline{\eta}_0 \leq \eta_0 \leq \bar{\eta}_0) \Lambda, \quad /5.12/$$

где

$$\underline{\eta}_0 = \max \left\{ \begin{array}{l} \rho_0^{(1)}(0, g) - \rho_0 + \nu \\ -\frac{\Delta M_w}{2} + \nu \end{array} \right\}, \quad \bar{\eta}_0 = \min \left\{ \begin{array}{l} \rho_0^{(1)}(0, g) - \rho_0 + \nu + u\tau \\ \frac{\Delta M_w}{2} + \nu \end{array} \right\}$$

/5.12a/

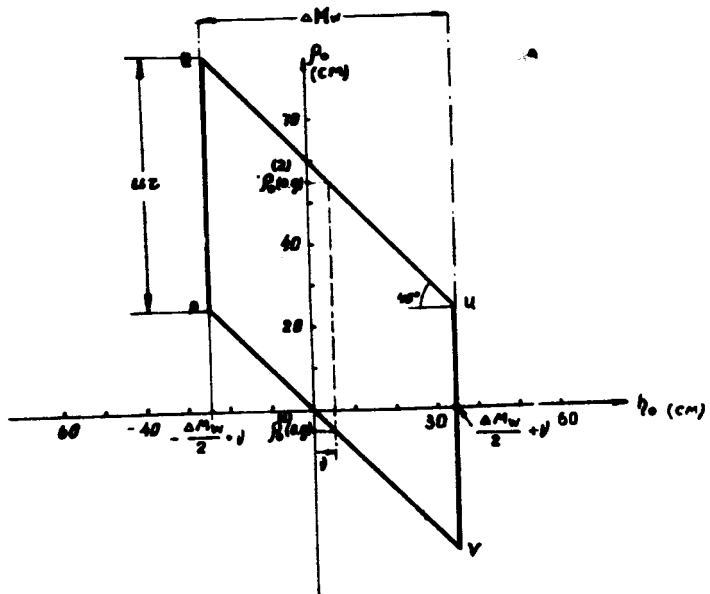


Рис. 8.

Область начальных параметров инжектируемого пучка на плоскости (ρ_0, η_0) при некоторых $\nu, \rho_0^{(i)}(0, g), u\tau$ и ΔM_w .

Следовательно, для фиксированных ξ и g можно записать

$$\sigma = \frac{1}{\Delta M_w \cdot u \mathcal{T}} \int_{\substack{\xi = \text{const}, \\ g = \text{const}}} \Lambda \Pi(h_0 \leq h_0 \leq \bar{h}_0) \varepsilon \left(\frac{(\alpha - |\delta| - a_0)^2 - h_0^2}{b_{\max}^2} \right) d\rho_0 dh_0, \quad /5.13/$$

где границы инжектируемого пучка учитываются функцией Π , $a_0 = a_0(\rho_0, \xi)$ дается формулой /2.20/. Отметим, что функция Λ , стоящая в /5.13/, считается независимой от ξ и g , поскольку мы предполагаем, что у всех частиц эти параметры одни и те же. Такая Λ будет уже нормирована просто на $\mathcal{T} \cdot \Delta W$, а не на $\mathcal{T} \cdot \Delta \gamma_0 \cdot \Delta W \Delta g$, как в /5.3/. Соответственно видоизменяются и выражения /5.4/.

§ 6. Условия наилучшего захвата при заданных ξ, g

Эффективность инжекции при некотором фиксированном \mathcal{T} , вообще говоря, существенно зависит от момента начала инжекции t_1 , момента включения ускоряющего напряжения t_f и положения равновесной орбиты в этот момент.

Рассмотрим вопрос о максимуме коэффициента захвата при произвольном фиксированном \mathcal{T} для простейшего случая: $g = \text{const}$, $\xi = \text{const}$ и в предположении однородности пучка во времени /в пределах \mathcal{T} / и по энергиям /в пределах ΔW /, то есть при $\Lambda = 1$. Такое рассмотрение дает нам определенную ориентировку при выборе соответствующих параметров для реального пучка. Более того, иногда результат вообще не зависит от ξ и g .

В указанных предположениях нетрудно установить, что вне зависимости от ξ и g наиболее выгодное δ есть $\delta = 0$. Действительно, как мы видели в § 4, уменьшение $|\delta|$ расширяет область Σ , а подынтегральное выражение в /5.13/ при $\Lambda = \text{const}$ во всяком случае не убывает, поскольку $|\delta|$ входит лишь в функции ε и в такой связи, что уменьшение $|\delta|$ увеличивает $b(a_0)$ и согласно свойствам упомянутой функции

может лишь увеличить ее значения^{x/}. При $\delta = 0$ интересующее нас выражение σ может быть записано в виде:

$$\sigma = \frac{1}{\Delta M_W \cdot u^2} \int_{-y}^y a \eta_0 \int_{\rho_r}^{\rho_d} \Pi(\eta_0 \leq \eta_0 \leq \bar{\eta}_0) \varepsilon \left(\frac{(d - a_0(\rho_0, \xi))^2 - \eta_0^2}{b_{max}^2} \right) d\rho_0 d\eta \equiv \frac{1}{\Delta M_W \cdot u^2} I(\xi, g) \quad /6.1/$$

$$y = \min \left\{ \frac{d - a_r(\xi, g)}{b_{max}} \right\} \quad /6.1a/$$

Для отыскания максимума σ по другим параметрам / t_i, t_f / удобно пользоваться рис. 9, на котором показана область интегрирования

Σ / граница ее выделена жирными линиями / , а также параллелограмм $PQUV$, где функция Π отлична от нуля, т.е. область инжектируемых частиц. Граница Σ / для сокращения записи индексы $\xi = \cos nt$, $g = \text{const}$ при Σ опускаем / , согласно определению / см. § 4 / , составляется из

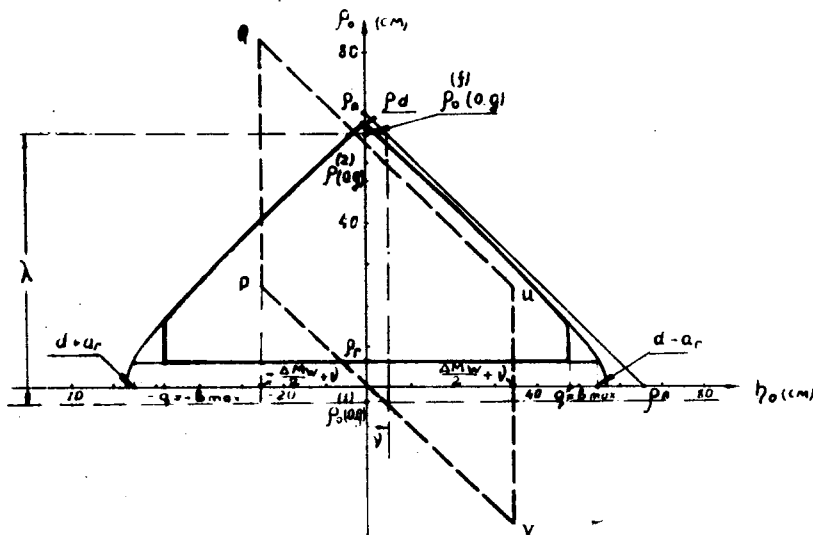


Рис. 9.

Область захвата частиц в режим ускорения / $n = 0,67$; $g = 0$; $\xi = 8 \text{ см}$; граница области выделена жирной линией / и область начальных параметров инжектируемого пучка, при некоторых $v, \lambda, u, \Delta M_W$.

x/ В случае $\psi_\beta \neq \psi_0$ аналогичным рассмотрением можно установить, что наилучшее δ лежит в области $|\delta| \leq \left| 1 - \frac{\psi_\beta}{\psi_0} \right| \cdot d$.

$$|\eta_0| = f_{\xi}(\rho_0) = \min \left\{ \frac{d-a_0(\rho_0, \xi)}{b_{\max}} \right\} \text{ при } \rho_r \leq \rho_0 \leq \rho_d \quad /8.2/$$

и отрезка прямой $\rho_0 = \rho_r(\xi, g)$ между точками $\eta_0 = 0$ и $|\eta_0| = g$.
Если ввести f_{ξ}^{-1} - функцию, обратную f_{ξ} , то вместо /8.2/ получим:

$$\rho_0 = f_{\xi}^{-1}(|\eta_0|) = \begin{cases} \rho_0(d-|\eta_0|, \xi) & \text{при } |\eta_0| \leq g \\ \text{все значения } \rho_0 \text{ между } \rho_r \text{ и } \rho_0(d-|\eta_0|, \xi) & \text{при } |\eta_0| = g. \end{cases} \quad /8.3/$$

Отметим, что функцию $f_{\xi}^{-1}(|\eta_0|)$ мы будем считать однозначной при $|\eta_0| < g$, что, в частности, всегда выполняется, если $\rho_r(\xi, g) \geq \xi \sin \nu \cos \nu$ /см. § 2/. Задача состоит в наивыгоднейшем совмещении области Σ и параллелограмма $PQUV$ при учете того, что "ценность" точек Σ определяется функцией \mathcal{E} , стоящей под интегралом в /8.1/.

Положение параллелограмма можно фиксировать следующими двумя параметрами: ν /см. § 4 / и λ , где

$$\lambda = \rho_0^{(2)}(0, g) - \rho_0^{(1)}(0, g) \quad /8.4/$$

характеризует момент начала инжекции относительно момента включения ускоряющего напряжения. При изменении только λ параллелограмм перемещается вдоль оси ρ_0 , имея фиксированные границы по η_0 . При изменении только ν параллелограмм скользит вдоль прямых $\eta_0 = \rho_A - \rho_0 - \lambda(QU)$ где $\rho_A = d + g$, и $\eta_0 = \rho_A - \rho_0 - \lambda + u\tau(PV)$. Как видно, параметры ν и λ не зависят от ρ_0, ξ, η_0 и g и однозначно определяют t_1, t_f . С использованием λ и ν уравнение /5.12a/ при учете /4.8a/ /для $\delta = 0$ / перепишется в виде:

$$\bar{h}_0 = \max \left\{ \begin{array}{l} \rho_A - \rho_0 - \lambda \\ -\frac{\Delta M_w}{2} + \nu \end{array} \right\}, \quad \bar{h}_0 = \min \left\{ \begin{array}{l} \rho_A - \rho_0 - \lambda + u\tau \\ \frac{\Delta M_w}{2} + \nu \end{array} \right\}. \quad /6.5/$$

Необходимое условие максимума состоит в обращении в нуль частных производных в точке или в некоторой области, или, если производные разрывны, в изменении их знака в точке разрыва /при рассмотрении задачи о максимуме σ мы будем следить, конечно, и за выполнением условий достаточности/.

Используя очевидные соотношения

$$\frac{\partial \Pi(f_1 \leq f \leq f_2)}{\partial f_1} = -\delta(f-f_1), \quad \frac{\partial \Pi(f_1 \leq f \leq f_2)}{\partial f_2} = \delta(f-f_2), \quad /6.6/$$

получим, что σ будет максимальным, если

$$\frac{\partial I}{\partial \nu} = \int_{\rho_r}^{\rho_d} \varepsilon \left(\frac{(d-a_0)^2 - \bar{h}_0^2}{b^2_{\max}} \right) \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \nu} d\rho_0 - \int_{\rho_r}^{\rho_d} \varepsilon \left(\frac{(d-a_0)^2 - h_0^2}{b^2_{\max}} \right) \frac{\partial h_0}{\partial \nu} d\rho_0 = 0, \quad /6.7a/$$

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \int_{\rho_r}^{\rho_d} \varepsilon \left(\frac{(d-a_0)^2 - \bar{h}_0^2}{b^2_{\max}} \right) \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \lambda} d\rho_0 - \int_{\rho_r}^{\rho_d} \varepsilon \left(\frac{(d-a_0)^2 - h_0^2}{b^2_{\max}} \right) \frac{\partial h_0}{\partial \lambda} d\rho_0 = 0. \quad /6.7b/$$

Подынтегральные функции, входящие в /6.7a/, могут быть отличными от нуля, соответственно, лишь на отрезках VU и PQ , поскольку согласно /6.5/

$$\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \nu} = \begin{cases} 1 & \text{на } VU \\ 0 & \text{вне } VU \end{cases}, \quad \frac{\partial h_0}{\partial \nu} = \begin{cases} 1 & \text{на } PQ \\ 0 & \text{вне } PQ \end{cases}. \quad /6.7b/$$

Аналогично

$$\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \lambda} = \begin{cases} -1 & \text{на } QU \\ 0 & \text{вне } QU \end{cases}, \quad \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial \lambda} = \begin{cases} -1 & \text{на } PV \\ 0 & \text{вне } PV \end{cases} \quad /6.7г/$$

и подынтегральная функция в первом интеграле /6.7б/ может быть не равна нулю лишь на отрезке QU , а во втором - на отрезке PV .

Таким образом захват частиц в режим ускорения будет наибольшим тогда, когда захват на PQ будет равен захвату на VU , а захват на QU будет равен захвату на PV . Ясно, что выполнение этих условий возможно в двух случаях: а/ оба интеграла, входящие в каждое из уравнений /6.7/, равны нулю; б/ оба интеграла отличны от нуля. В связи с этим разумно ввести следующие понятия.

1/ Будем говорить, что для данного ΔM_W инжекция является "длинной", если в условиях максимального захвата при рассматриваемом \mathcal{C} линии QU и PV лежат целиком вне Σ . В противном случае инжекция - "короткая".

2/ Назовем спектр ΔM_W "широким" для данного \mathcal{C} , если ΔM_W таково, что при максимуме захвата линии UV и PQ лежат целиком вне Σ .

Введение таких понятий оправдано тем, что дальнейшее увеличение времени инжекции или уширение спектра^{x/} не увеличивает количество захваченных частиц.

Естественно, эти понятия зависят от области Σ , т.е. от ξ , g . Аналогично можно ввести понятие длинной инжекции /соответственно, широкого спектра/ для данного интервала ξ и g , понимая под областью захвата минимальную область, включающую в себя все $\Sigma(\xi, g)$ из заданного интервала ξ, g .

x/ Речь идет об уширении спектра за счет добавочного тока инжекции на новых энергиях, а не об уширении спектра при фиксированном общем токе.

Рассмотрим представляющиеся нам в этом смысле возможности.

1. Длинная инжекция.

Получим сначала необходимые условия для осуществления этого случая. Запишем уравнение прямой линии с тем же наклоном, что и QU и имеющей при $h_0 \geq 0$ одну общую точку $h_0 = h_\Sigma$ с границей f_ξ^{-1} / см. /6.3/ выпуклой области Σ :

$$\rho_0 = C(\xi) - h_0 \quad /6.8/$$

$$C(\xi) = \begin{cases} \rho_d & \text{при } d - \frac{a_{\min}}{3 \sin \nu} < 0, \quad h_\Sigma = 0, \quad /6.8a/ \\ d + \xi \sin \nu \cos \nu (\xi - |\xi|) & \text{при } 0 < d - \frac{a_{\min}}{3 \sin \nu} < q, \quad h_\Sigma = d - \frac{a_{\min}}{3 \sin \nu}, \quad /6.8б/ \\ q + \xi \sin \nu \cos \nu + \sqrt{(d-q)^2 - a_{\min}^2} \cos \nu & \text{при } q < d - \frac{a_{\min}}{3 \sin \nu}, \quad h_\Sigma = q. \quad /6.8в/ \end{cases}$$

Если отрезок прямой QU проходит выше этой линии, то можно гарантировать, что при любых ΔM_W и ν он не пересечет области Σ .

Соответственно отрезок PV ни при каких условиях не пересечет области Σ , если он лежит ниже прямой

$$\rho_0 = -(q - \rho_r) - h_0, \quad /6.9/$$

имеющей тот же наклон, что и PV , и проходящей через точку $\rho_0 = \rho_r$,

$$h_0 = -q.$$

Таким образом, достаточные условия длинной инжекции есть

$$u\tau \geq u\tau = C(\xi) + q(\xi, g, b_{\max}) - \rho_r(\xi, g). \quad /6.10/$$

Например, для синхрофазотрона ОИЯИ при $\xi = 0$, $g = 0$, $b_{\max} = 48$ см /см. § 7/ получается $\tau = 580 \mu\text{sec}$. Необходимые условия зависят от ширины спектра.

А. Широкий спектр

Спектр будет, очевидно, широким для длинной инжекции, если возможно такое расположение параллелограмма, что QR и UV будут лежать вне Σ . Это значит, что $\frac{\Delta M_W}{2} \geq q$. Поскольку при оптимальном захвате параллелограмм должен перекрывать всю область Σ , то необходимые условия длинной инжекции превращаются в этом случае в достаточные. Исходя из сказанного, получим, что для длинной инжекции при широком спектре

$$|v_{opt}| \leq \frac{\Delta M_W}{2} - q, \quad \rho_A + q - \rho_r \leq \lambda_{opt} \leq u\tau + \rho_A - C(\xi). \quad /6.11/$$

Таким образом, для данных ξ , q , v_{max} и определенных выше условиях, накладываемых на ΔM_W и τ , мы нашли требуемые для оптимума значения v , λ . Если $\frac{\Delta M_W}{2} = q$, то $v_{opt} = 0$, т.е. ускоряющее напряжение нужно включать в момент, когда орбита центральной энергии находится в середине рабочей апертуры камеры. При $\frac{\Delta M_W}{2} > q$ имеется некоторая свобода в выборе v_{opt} , так как весь спектр все равно не "усваивается". Легко показать также, что /6.11/ эквивалентно неравенству $\lambda \leq \lambda_{opt} \leq \lambda + u(\tau - \tau_0)$, где $\lambda = \rho_A + q - \rho_r$, τ_0 - правая часть /6.10/. При $\tau > \tau_0$ величина λ_{opt} может несколько варьироваться за счет "бесполезного" превышения длительности инжекции над τ_0 . Для указанного выше примера условие широкого спектра есть $\Delta M_W \geq 96 \text{ см} / \Delta W \geq 2,3\%$,

$$\lambda = 113 \text{ см.}$$

Б. Узкий спектр

При узком спектре $\frac{\Delta M_W}{2} \leq q$. Так как определение длинной инжекции включает требование оптимального захвата, посмотрим, что в данном случае это означает. Выполнение одного из условий оптимума - равенство интегралов, входящих в /6.7б/, обеспечивается как и выше таким расположением QU и PV , что они находятся вне Σ . Но другое условие оптимума /6.7а/ не сводится при этом к такому же тривиальному равенству $0 = 0$. Учитывая, что в опти-

муме захвата хотя бы один из отрезков PQ и UV должен пересекать область Σ , а точки P , Q , U , V - находиться вне ее, из /8.7а/ /8.7в/ и /8.5/ получим

$$\frac{\partial I}{\partial v} = \int_{\rho_r}^{\rho_d} \left[\xi \left(\frac{(d-a_0)^2 - (v + \frac{\Delta M_w}{2})^2}{b_{\max}^2} \right) - \xi \left(\frac{(d-a_0)^2 - (v - \frac{\Delta M_w}{2})^2}{b_{\max}^2} \right) \right] d\rho_0. \quad /8.12/$$

В силу монотонности ξ по аргументу находим $\dot{v} = 0$. Следовательно, линии PQ и VU должны располагаться симметрично относительно

$\eta_0 = 0$. Тогда для спектра, удовлетворяющего неравенству $\eta_{\Sigma} \leq \frac{\Delta M_w}{2} \leq q$ / $\eta_{\Sigma} < q$ всегда/ инжекция будет длинной, если QU лежит выше прямой /8.8/, а PV - ниже прямой $\rho_0 = -(\frac{\Delta M_w}{2} - \rho_r) - \eta_0$, проходящей через точку $\rho_0 = \rho_r$, $\eta_0 = -\frac{\Delta M_w}{2}$. Следовательно,

$$v_{\text{опт}} = 0; \quad u\tau \geq u\tau_{\Sigma} = C(\xi) + \frac{\Delta M_w}{2} - \rho_r; \quad \rho_A + \frac{\Delta M_w}{2} - \rho_r \leq \lambda_{\text{опт}} \leq u\tau + \rho_A - C. /8.13/$$

От предыдущего этот случай отличается тем, что в выражении τ и λ величина q заменена на меньшую величину $\frac{\Delta M_w}{2}$.

Если $0 \leq \frac{\Delta M_w}{2} \leq \eta_{\Sigma}$, то вместо /8.8/ верхней граничной прямой будет

$\rho_0 = f_{\xi}^{-1}(\frac{\Delta M_w}{2}) + \frac{\Delta M_w}{2} - \eta_0$, проходящая через точку $\rho_0 = f_{\xi}^{-1}(\frac{\Delta M_w}{2})$, $\eta_0 = \frac{\Delta M_w}{2}$.
В результате для этого случая

$$v_{\text{опт}} = 0; \quad u\tau \geq u\tau_{\Sigma} = f_{\xi}^{-1}(\frac{\Delta M_w}{2}) + \Delta M_w - \rho_r; \quad /8.14/ \\ \rho_A - \rho_r + \frac{\Delta M_w}{2} \leq \lambda_{\text{опт}} \leq u\tau + \rho_A - \frac{\Delta M_w}{2} - f_{\xi}^{-1}(\frac{\Delta M_w}{2}).$$

Для моноэнергетического пучка $\Delta M_w = 0$, $f_{\xi}^{-1}(0) = \rho_d$ и $u\tau_{\Sigma} = \rho_d - \rho_r$, $\lambda = \rho_A - \rho_r$.
Следовательно, при $\xi = 0$, $g = 0$ имеем здесь $\tau \approx \frac{d}{u} \approx 330 \mu\text{с}$.
 $\lambda = 65 \text{ см}$.

2. Короткая инжекция

Если длительность инжекции $\tau < \tau(\Delta M_w)$, то для данного спектра инжекция будет короткой.

А. Широкий спектр

Так как определение широкого спектра включает требование оптимального захвата, посмотрим каково это требование для короткой инжекции. 1-е условие оптимума удовлетворяется при расположении PQ и UV вне Σ . Это возможно в силу исходного предположения о спектре. Далее, при короткой инжекции захват возможен лишь в случае, когда хотя бы один из отрезков QU , PV пересекает область Σ . Тогда из /6.76/ и /6.77/ получим следующее условие оптимума для рассматриваемого случая:

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \int_{\rho_r}^{\rho_d} \left[\mathcal{E} \left(\frac{(d-a_0)^2 - (\rho_A - \lambda + u\tau - \rho_0)^2}{b_{max}^2} \right) - \mathcal{E} \left(\frac{(d-a_0)^2 - (\rho_A - \lambda - \rho_0)^2}{b_{max}^2} \right) \right] d\rho_0 \quad /6.15/$$

Решение этого уравнения $\lambda = \lambda(\tau)$ не зависит от ν и ΔM_w . Из /6.15/ при учете монотонности функции \mathcal{E} вытекает, что линия PV должна пересекать следующие две границы области Σ : границу $f_{\xi}^{-1}(\eta_0)$ при $\eta_0 < 0$ / обозначим ρ_0 в этой точке пересечения ρ_P / и границу $\rho_0 = \rho_r$ при некотором η_0 , большем предыдущего.

Очевидно, ρ_P есть решение уравнения

$$|\rho_A - \lambda - \rho_P| = \rho_P - \rho_A + \lambda = f_{\xi}(\rho_P). \quad /6.16/$$

Полученные из /6.15/ следствия не дают аналитического выражения для λ , но позволяют выделить два типа возможных в принципе значений этого параметра и для соответствующих двух случаев выразить через него необходимую ширину спектра и интервал оптимальных ν .

Именно, если

$$\lambda \leq u\tau + \rho_A - q - \rho_r, \quad /6.17/$$

когда границей области Σ , пересекаемой линией QU справа /здесь, кстати, обязательно $\eta_0 \geq 0$ /, является $f_{\xi}^{-1}(|\eta_0|)$, то

$$\Delta M_w \geq \underline{\Delta M_w} = q + \lambda + \rho_P - \rho_A; \quad q - \frac{\Delta M_w}{2} \leq \nu_{opt} \leq \rho_A + \frac{\Delta M_w}{2} - \lambda - \rho_P, \quad /6.18/$$

причем верхняя и нижняя границы ν_{opt} становятся одинаковыми при $\Delta M_W = \underline{\Delta M}_W$, и здесь $\nu_{opt} = q - \frac{\Delta M_W}{2}$.

Если же

$$\lambda \geq u\tau + \rho_A - q - \rho_r, \quad /6.18/$$

когда правая точка пересечения линии qu с границей Σ имеет $\rho_o = \rho_r$, то

$$\Delta M_W \geq \underline{\Delta M}_W = u\tau + \rho_p - \rho_r; \quad \rho_A + u\tau - \lambda - \rho_r - \frac{\Delta M_W}{2} \leq \nu_{opt} \leq \rho_A + \frac{\Delta M_W}{2} - \rho_p - \lambda, \quad /6.20/$$

и при $\Delta M_W = \underline{\Delta M}_W$ получаем $\nu_{opt} = \rho_A + u\tau - \lambda - \rho_r - \frac{\Delta M_W}{2}$.

Б. Узкий спектр

Если для короткой инжекции не выполняются условия /6.20/ и /6.18/, наложенные на ширину энергетического разброса, то мы будем иметь узкий спектр при указанной инжекции. Этот случай требует совместного решения уравнений /6.7а/ и /6.7б/, и, если не пользоваться какими-либо грубыми аппроксимациями, то любые сведения об оптимальном режиме могут быть получены лишь на основе численных расчетов.

Впрочем имеется один случай короткой инжекции, именно, когда пучок моноэнергетический, который рассматривается аналитически до конца.

Запишем условия оптимума захвата для моноэнергетического пучка при любой длительности инжекции /для длинной инжекции используем формулы /6.14//:

$$\begin{aligned} \nu_{opt} &= 0; \quad \underline{\tau} = \frac{\rho_A - \rho_r}{u}; \\ \rho_A - \rho_r &\leq \lambda_{opt} \leq \rho_A - \rho_r + u(\tau - \underline{\tau}) \quad \text{при } \tau \geq \underline{\tau}, \\ \rho_A - \rho_r &= \lambda_{opt} \quad \text{при } \tau \leq \underline{\tau}. \end{aligned} \quad /6.20./$$

Соответственно, коэффициент захвата для такого пучка в оптимальных условиях примет следующий простой вид $\sigma_{opt} = \frac{1}{u} \int_{\rho_r}^{\rho_r + u\tau} \xi \left(\frac{(d - a_o(\rho_o, \xi))^2}{\delta_{max}^2} \right) d\rho_o$. /6.21/

§ 7. Выбор оптимального режима и захват реального пучка для синхрофазотрона ОИЯИ

Конструкция ускорителя и экспериментальные данные инжектируемого пучка считаются заданными. Выбор при этих условиях может быть сделан для величины ускоряющего напряжения в начале ускорения V_0 , момента его включения и положения равновесной орбиты в этот момент, а также для момента начала инъекции. Что касается положения равновесной орбиты, то, как это следует из предыдущего параграфа, при $\frac{V_p}{V_0} = 1$ она должна проходить через геометрический центр камеры. Так мы и будем считать в дальнейшем.

Согласно [1] V_0 , равновесная фаза ϕ_s и максимальная амплитуда радиально-фазовых колебаний δ_{max} связаны между собой следующим образом /см. рис. 10 и 11/:

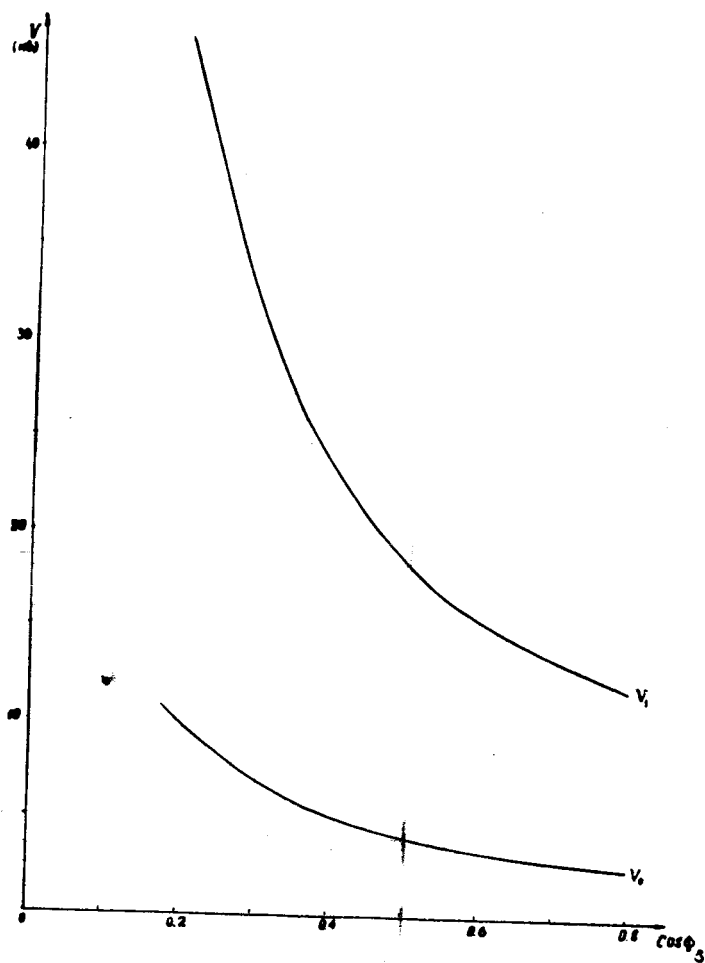


Рис. 10.

Зависимость от $\cos \phi_s$ "действующей" амплитуды ускоряющего напряжения V_0 ($\Delta E_{0\delta} = eV_0 \cos \phi_s$) и суммарной амплитуды напряжения на ускоряющих промежутках V_1 в синхрофазотроне ОИЯИ.

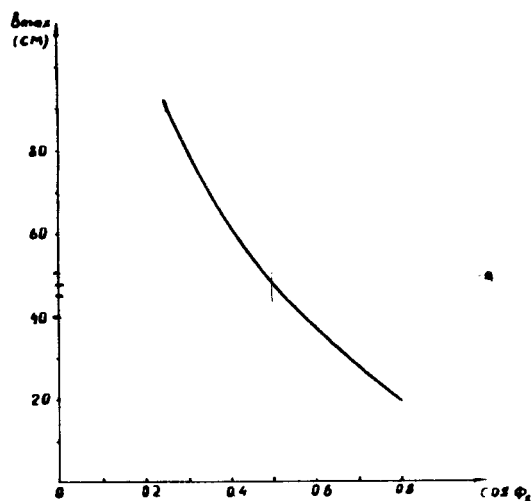


Рис. 11

Зависимость максимальной амплитуды фазовых колебаний от $\cos \Phi_s$.

$$eV_0 \cos \Phi_s = \frac{(2\pi z_0 + 4L) e z_0 \dot{\eta}}{c} ; \quad /7.1/$$

$$\beta_{max}^2 = \frac{2z_0^2 eV_0}{\pi K_{\text{эф}} E \beta^4 (1-n)^2} (\sin \Phi_s - \Phi_s \cos \Phi_s) , \quad /7.2/$$

$$K_{\text{эф}} = 1 + \frac{n-\Gamma}{1-n} \cdot \frac{1}{\beta^2} , \quad \Gamma = \frac{4L}{2\pi z_0 + 4L} ,$$

где L - длина прямолинейного промежутка,

E - энергия инжектируемых частиц.

Остальные величины введены ранее. С увеличением Φ_s /то есть V_0 / увеличивается азимутальный размер сепаратрисы и, соответственно, число частиц, попадающих в нее. Однако в то же время растет и радиальный размер сепаратрисы и, когда он перерастает ширину камеры, частицы даже в отсутствие свободных колебаний частично начинают садиться на стенки. Рассмотрение этого вопроса показывает /см. [1] /, что существует некое оптимальное $\Phi_s = \Phi_{\text{опт}}$, при котором захват оказывается наилучшим, причем, естественно, с уменьшением α /полуширина рабочей апертуры камеры/ $\Phi_{\text{опт}}$

уменьшается. Наличие свободных колебаний качественно равносильно уменьшению ширины камеры. Понятно, что чем больше относительное содержание больших амплитуд свободных колебаний, тем меньше такая эффективная ширина камеры, т.е. тем меньше $\Phi_{S_{\text{онм}}}$ /или тем больше $\cos \Phi_{S_{\text{онм}}}$ /.

На рис. 12 приведены кривые захвата моноэнергетического пучка в зависимости от $\cos \Phi_s$ для длинной инжекции и различных ξ .

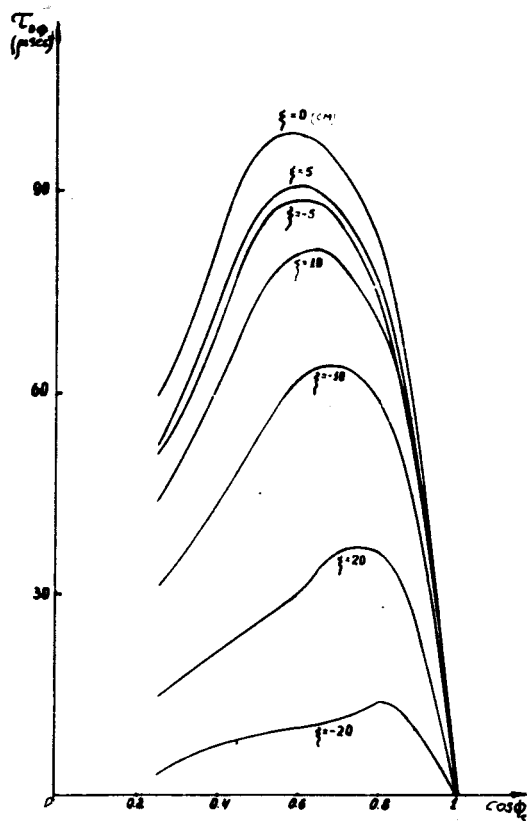


Рис. 12а

Захват моноэнергетического пучка в режим ускорения в зависимости от ξ и $\cos \Phi_s$ при $g = 0$ и "длинной" инжекции для синхрофазотрона ОИЯИ.

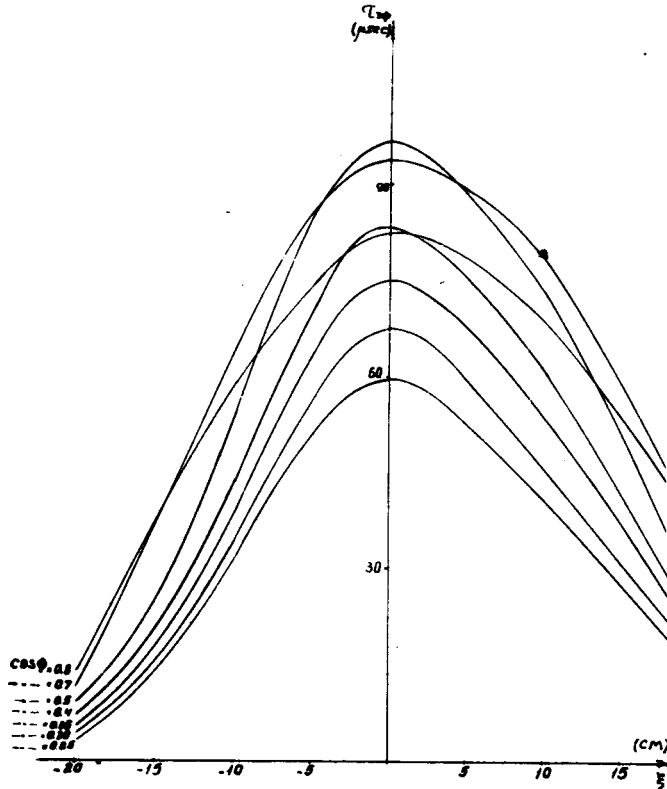


Рис. 126

То же, что и на рис. 12а.

Как видно, с увеличением $|\xi|$ максимум захвата смещается вправо. Это как раз соответствует нашим качественным соображениям, если учесть, что повышение $|\xi|$ увеличивает относительное содержание больших амплитуд. Аналогичную роль играет увеличение g , что видно из рис. 13, где дается захват частиц при $\xi = 0$, но для различных g и при наличии энергетического разброса. Энергетический разброс считается "столообразным" с шириной $\Delta W = 2\%$ / $\Delta M_w = 85$ см при $n = 0,67$, и им мы приближенно аппроксимируем реальный спектр инжектируемых в нашу машину частиц^[4]; инжекция - длинная. Присутствие частиц с отличными от равновесной энергиями требует, чтобы сепаратриса включала в себя желательный больший интервал фаз на соответствующих расстояниях от равновесной орбиты, что отвечает

большим v_{max} в оптимуме захвата по сравнению с аналогичным случаем моноэнергетического пучка. Именно такую картину мы наблюдаем, сравнивая рис. 13 с рис. 12 при $\xi = 0$, $g = 0$.

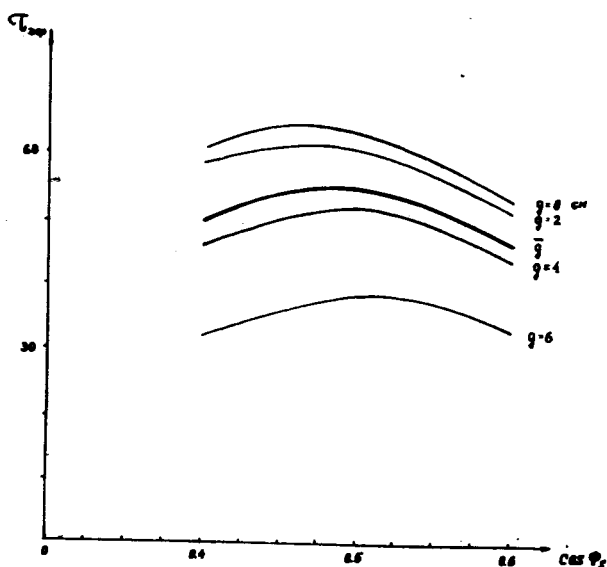


Рис. 13

Захват пучка с энергетическим разбросом / $\Delta W = 2\%$ / в режим ускорения в зависимости от $\cos \Phi_s$ и g при $\xi = 0$ и "длинной" инъекции для синхрофазотрона ОИЯИ. Кривая, отмеченная индексом \bar{g} , описывает захват при столбовом распределении инжектируемого пучка по g в интервале от $g = 0$ до $g = 8$ см.

Из этих данных в качестве компромиссного решения предлагается взять

$$\cos \Phi_{s_{опт}} = 0,5; \quad v_{max} = 48 \text{ см.}$$

Перейдем к выбору момента начала инъекции и момента включения ускоряющего напряжения. Имея в виду, что инжектируемый в синхрофазотрон пучок имеет $\Delta \xi = 18 \text{ см} / \Delta \gamma_0 = 11' /$, $\Delta g = 8 \text{ см}$, $\tau = 308 \text{ мсек}$, $u\tau = 80 \text{ см}^2 / \text{сек}$, причем центральный угол $\gamma_0 = 0$,

х/ В работе, на которую дается ссылка, угловой разброс не приводится, а даются лишь условия эксперимента по его определению. Отбрасывая наилучший и наихудший возможный в этих условиях угловой разброс, мы принимаем некоторый средний случай.

нетрудно установить, что во всем интервале интересующих нас ξ и g двух-процентный энергетический разброс и указанное выше τ отвечают случаю /по классификации § 6/ широкого спектра при короткой инжекции.

На рис. 14 показана зависимость λ - решения уравнения /6.15/ от g и ξ . Для реального пучка предлагается взять $\lambda = 72$ см.

ν выбирается из неравенства /6.18/; причем для взятого λ оно должно выполняться при любых интересующих нас ξ и g . В нашем случае получаем $5,5 \text{ см} \leq \nu \leq 6,5 \text{ см}$. Отсюда, выбирая $\nu = 6 \text{ см}$, имеем $M(t_1, 0) = \lambda + \nu - d = -13 \text{ см}$.

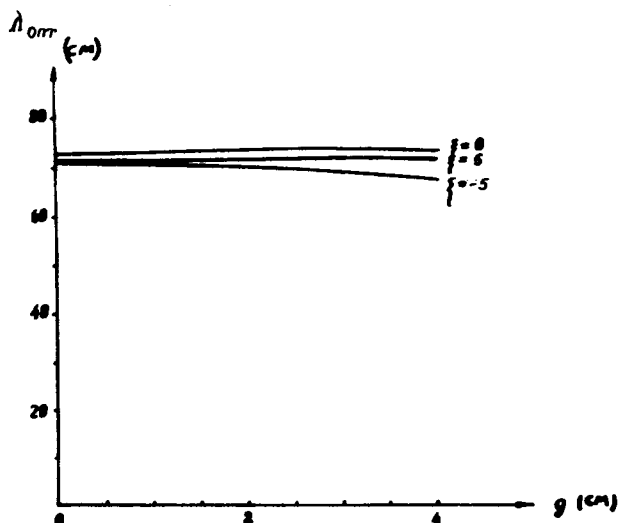


Рис. 14

Оптимальное λ /см. /6.4// при $\tau = 308 \mu\text{sec}$ и $\Delta W = 2\%$ для синхротрона ОИЯИ.

Окончательные результаты для различных значений энергетического и углового разброса приведены в табл. 1 и 2 в функции от g /при $\Delta W = 0$ инжекция с $\tau = 308 \mu\text{sec}$ очень близка к длинной/.

Т а б л и ц а 1.

Захват частиц при $\Delta \xi = 16$ см /распределение столообразное, центральный угол $\xi = 0$, $n = 0,87$, $\Delta M_{0\delta} = 1$ см.

$\frac{\Delta W}{W} = 2\%$; $\Delta M_w = 85$ см					$\Delta W = 0$	
$\tau = 308 \mu\text{sec}$ /короткая инжекция/			$\tau = 565 \mu\text{sec}$ /длинная инжекция/		$\tau = 308 \mu\text{sec}$	
$q(\text{см})$	$\tau_{\text{эф}}(\mu\text{sec})$	$\sigma(\%)$	$\tau_{\text{эф}}(\mu\text{sec})$	$\sigma(\%)$	$\tau_{\text{эф}}(\mu\text{sec})$	$\sigma(\%)$
0	47,1	15,3	60,8	10,8	93,6	30,4
2	42,2	13,7	52,5	9,3	83,6	27,1
4	36,7	11,9	44,5	7,9	67,5	21,9
6	24,6	8,0	29,4	5,2	51,4	16,7

Т а б л и ц а 2.

Захват частиц при $\Delta \xi = 0$, $n = 0,67$, $\Delta M_w = 1$ см.

$\frac{\Delta W}{W} = 2\%$; $\Delta M_w = 85$ см					$\Delta W = 0$	
/ короткая инжекция/ $\tau = 308 \mu\text{sec}$			/ длинная инжекция / $\tau = 565 \mu\text{sec}$		$\tau = 308 \mu\text{sec}$	
$q(\text{см})$	$\tau_{\text{эф}}(\mu\text{sec})$	$\sigma(\%)$	$\tau_{\text{эф}}(\mu\text{sec})$	$\sigma(\%)$	$\tau_{\text{эф}}(\mu\text{sec})$	$\sigma(\%)$
0	50,2	16,3	64,5	11,4	98,56	32,0%
2	50,2	16,3	62,1	11,0	98,56	32,0%
4	39,7	12,9	52,9	9,4	79,46	25,8%
6	30,5	9,9	38,5	6,8	63,14	20,5%

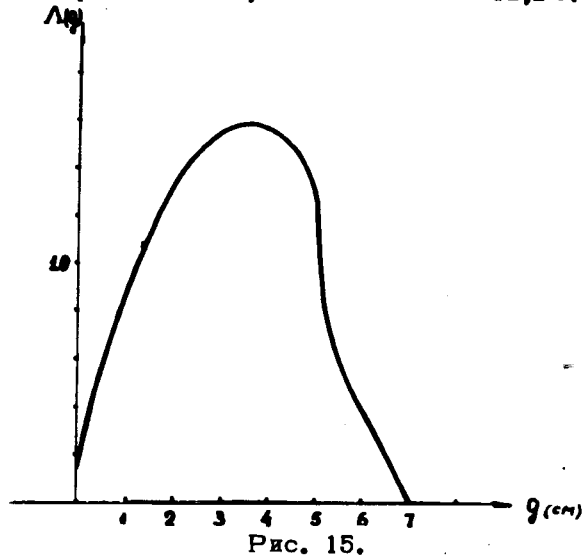
Как видно, реальный угловой разброс для синхрофазотрона ОИЯИ незначительно уменьшает число захваченных частиц и может считаться достаточно малым. Напротив, реальный энергетический разброс ухудшает захват почти в

в 2 раза. Выигрыш от доведения инжекции до длинной при теперешней скорости сжатия орбиты $(\Delta M)_{0\delta} = 1$ см, по-видимому, не оправдывает необходимых для этого усилий.

Полный коэффициент захвата, полученный с учетом реального распределения по q [4] /см. рис. 15/, равен 12%. Возможный сдвиг этого распределения с целью поисков оптимального его положения не дает ощутимой добавки. Экспериментальный коэффициент захвата несколько меньше /до 6-7%/. Это, в частности, может быть связано с небольшим общим углом инжектируемого пучка; кроме того, известно, что структура этого пучка сложнее, чем мы полагали, но она недостаточно изучена. Имеются, по-видимому, и некоторые неточности при создании ускоряющего напряжения и пр.

В заключение рассмотрим вопрос об оптимальном выборе скорости сжатия орбит u . Производную $\frac{\partial \tau_{эф}}{\partial u}$ можно приближенно оценить, считая, что захватываются лишь частицы, амплитуда колебаний которых не превосходит некоторой $q_{зр}$ с вероятностью 0,5 /число близкое к $E(1)$ при $\cos \phi_0 = 0,5$ /.

$q_{зр}$ определяется требованием равенства получаемого таким путем $\tau_{эф}$ с рассчитанным точно. Такая оценка показала, что $\frac{\partial \tau_{эф}}{\partial u} |_{(\Delta M)_{0\delta} = 1 \text{ см}} < 0$, т.е. имеет смысл уменьшить u . Расчет, проведенный для $(\Delta M)_{0\delta} = 0,5$ см, $\tau = 308 \mu\text{с}$, дал для реального пучка $\sigma = 12,2\%$.



Экспериментальное [4] распределение частиц по q в синхрофазотроне ОИЯИ.

Как видно, это почти то же, что и для $(\Delta M)_{об} = 1$ см /кстати, это говорит о том, что оптимальное значение $(\Delta M)_{об}$ для $\tau = 308 \mu\text{sec}$ лежит между 0,5 см и 1 см/. Однако, если при $(\Delta M)_{об} = 0,5$ см довести инъекцию до длинной /теперь для этого уже требуется не $565 \mu\text{sec}$, а $1130 \mu\text{sec}$ /, то это повысит $\tau_{эф}$ не на 25%, как это было для $(\Delta M)_{об} = 1$ см, а примерно в 2 раза.

§ 8. Бетатронный импульс

Найдем бетатронный импульс в 1-м режиме, т.е. в предположении, что ускоряющее электрическое поле не включается. Сделаем это сначала для случая фиксированных ξ , g . На рис. 16 на фоне "области минования препятствий" в 1-м режиме /см. также рис. 4/ показана область инжектируемого пучка для нескольких последовательных моментов времени. В начальный момент / t_1 / эта область есть отрезок VP параллелограмма $VUQP$,

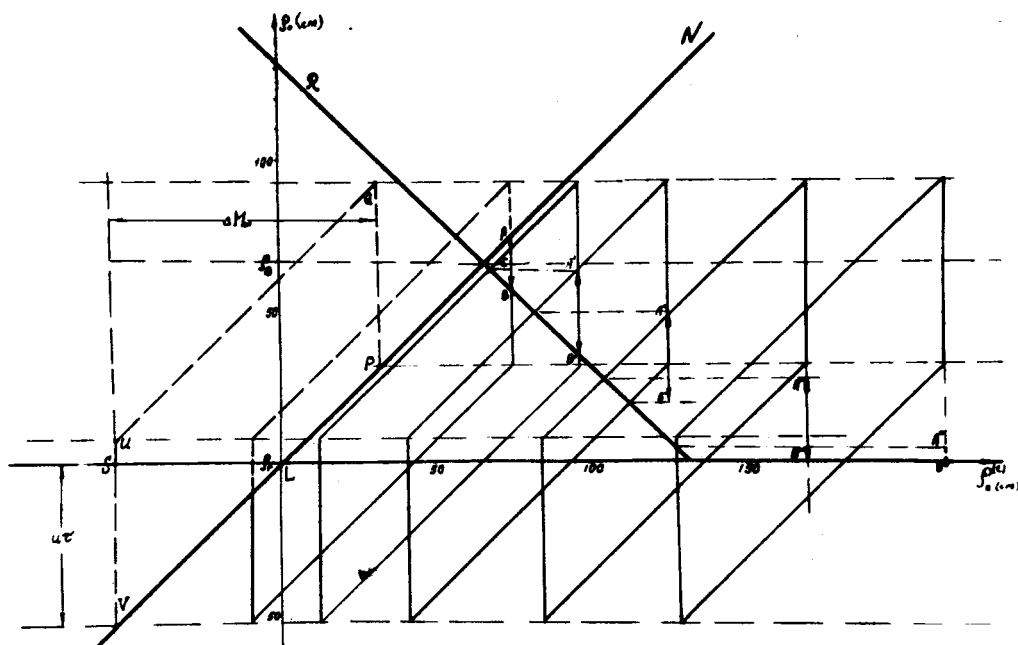


Рис. 16

Динамика захвата частиц в
 $g = 2$ см, $\xi = 0$,

1-м режиме на бетатронную мишень для
 $\rho_r = 0$ и $u\tau = 60$ см, $\Delta M_w = 85$ см.

расположенного таким образом, что VP лежит на линии N . В дальнейшем параллелограмм передвигается вдоль оси $\rho_0^{(t)}$ и интересующая нас область будет той частью ограниченной им площади, которая лежит ниже линии N . Наконец, после момента $t_2 = t_1 + \tau$, когда инжекция заканчивается, области инжектируемого пучка покрывает всю площадь параллелограмма и вместе с ним "перемещается" вдоль $\rho_0^{(t)}$. Поскольку линия \mathcal{R} отсекает частицы, попавшие на бетатронную мишень, то общему числу частиц $Q_\beta(t)$, севших на нее к любому данному моменту времени, отвечает та часть описанной области, которая в этот момент лежит выше \mathcal{R} . Используя координаты ρ_0 и χ (координата χ "привязана" к параллелограмму и отсчитывается от его осевой линии в сторону, противоположную $\rho_0^{(t)}$ - см. /2.8/) и обозначая соответствующую область частиц, севших на мишень, через $X(t)$, получим

$$Q_\beta(t) = \frac{q}{\Delta m_w \cdot u c} \int_{X(t)} d\chi d\rho_0. \quad /8.1/$$

Согласно рис. 18 область $X(t)$ занимает по ρ_0 интервал между $\underline{\rho}_0$ и $\bar{\rho}_0$, где

$$\underline{\rho}_0 = \max \begin{cases} \rho_R(\rho_0^{(t)}(\chi, g)) = \rho_R(\rho_0^{(t)}(0, g) - \chi) \\ \rho_r(\xi, g) \\ \rho_0^{(1)}(\chi, g) = \rho_0^{(1)}(0, g) - \chi. \end{cases} \quad /8.2/$$

/через $\rho_R(\rho_0^{(t)}(\chi, g))$ мы обозначили $\rho_0(\rho_0^{(t)}(\chi, g))$ на линии \mathcal{R} /,

$$\bar{\rho}_0 = \min \begin{cases} \rho_0^{(t)}(\chi, g) = \rho_0^{(t)}(0, g) - \chi \\ \rho_0^{(1)}(\chi, g) + u\tau = \rho_0^{(1)}(0, g) - \chi + u\tau, \end{cases} \quad /8.3/$$

х / Следует оговорить, что часть области параллелограмма, лежащая ниже ρ_r , не учитывается, так как соответствующие частицы попадают на инжектор. Вообще говоря, при большом угловом разбросе некоторые частицы, не удовлетворяющие условию минования инжектора, могут попасть на мишень раньше, чем им пришлось бы сесть на инжектор, но таких "прямых" частиц очень мало, и мы ими пренебрегаем.

а по χ эта область простирается от $-\frac{\Delta M_w}{2}$ до $\bar{\chi}$;
 $\bar{\chi}$ - решение уравнения

$$\bar{\rho}_o(\chi) - \underline{\rho}_o(\chi), \quad /8.4/$$

если это решение меньше $\frac{\Delta M_w}{2}$, и $\bar{\chi} = \frac{\Delta M_w}{2}$ - в противном случае. Так как $\frac{Q_\beta}{Q}$ - существенно положительная величина, то при $\bar{\rho}_o < \underline{\rho}_o$ естественно предполагается $Q_\beta = 0$. В частности, при любом t это будет так, если привязка выбрана столь неудачно, что к концу инъекции орбита частиц наименьшей энергии занимает положение, при котором еще невозможно минование инжектора: $\rho_o^{(1)}(-\frac{\Delta M_w}{2}, g) + u\tau < \rho_r$.

Используя /8.2/ и /8.3/, проинтегрируем /8.1/ один раз:

$$Q_\beta = \frac{Q}{\Delta M_w \cdot u\tau} \int_{-\frac{\Delta M_w}{2}}^{\bar{\chi}} (\bar{\rho}_o - \underline{\rho}_o) dx. \quad /8.5/$$

Легко видеть, что общий коэффициент захвата частиц на бетатронную мишень

$$\beta_\beta = \frac{Q_\beta|_{t=\infty}}{Q} \quad \text{есть /на рис. 16/ отношение площади фигуры } SUQPL$$

к площади параллелограмма $VUQR$. Продифференцируем /8.5/ по времени, учитывая при этом /8.2/, /8.3/ и /8.4/. В результате ток частиц

$J_\beta(t)$ на бетатронную мишень выразится в виде:

$$J_\beta = e \frac{dQ}{dt} = \frac{eQ}{\Delta M_w \cdot \tau} \int_{-\frac{\Delta M_w}{2}}^{\bar{\chi}} \left(\frac{\partial \bar{\rho}_o}{\partial \rho_o^{(t)}} - \frac{\partial \underline{\rho}_o}{\partial \rho_o^{(t)}} \right) dx. \quad /8.6/$$

В тех случаях, когда $\frac{\partial \bar{\rho}_o}{\partial \rho_o^{(t)}}$ и $\frac{\partial \underline{\rho}_o}{\partial \rho_o^{(t)}}$ не равны нулю, справедливы соотношения $\frac{\partial \bar{\rho}_o}{\partial \rho_o^{(t)}} = -\frac{\partial \bar{\rho}_o}{\partial \chi}$ и $\frac{\partial \underline{\rho}_o}{\partial \rho_o^{(t)}} = -\frac{\partial \underline{\rho}_o}{\partial \chi}$. /8.2/, 38.3//. Используя \textcircled{H} - функцию, определенную как

$$\textcircled{H}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq 0 \\ 0 & \text{при } z < 0, \end{cases} \quad /8.7/$$

и вводя $\underline{\chi}$ - решение уравнения

$$\rho_R(\rho_o^{(t)}(\chi, g)) = \max \left\{ \rho_r, \rho_o^{(t)}(\chi, g) \right\}, \quad /8.8/$$

если это решение больше $-\frac{\Delta M_w}{2}$, и $\chi = -\frac{\Delta M_w}{2}$ - в противном случае / χ разграничивает те значения χ , при которых $\rho_o = \rho_R(\rho_o^{(t)}(\chi, g))$ и, соответственно, $\rho_o = \max \left\{ \rho_r, \rho_o^{(t)}(\chi, g) \right\}$ /, вместо /8.6/ запишем

$$J = \frac{eQ}{\Delta M_w \tau} \left[\int_{-\frac{\Delta M_w}{2}}^{\bar{\chi}} (\rho_o^{(t)}(0, g) + u\tau - \rho_o^{(t)}(0, g)) d\chi + \int_{\bar{\chi}}^{\bar{\chi}} \frac{\partial \rho_R(\rho_o^{(t)}(0, g) - \chi)}{\partial \chi} d\chi \right] = \frac{eQ}{\Delta M_w \tau} \left\{ \left[\left(\bar{\chi} + \frac{\Delta M_w}{2} \right) (\rho_o^{(t)}(0, g) + u\tau - \rho_o^{(t)}(0, g)) + \left[\rho_R(\rho_o^{(t)}(0, g) - \bar{\chi}) - \rho_o^{(t)}(0, g) \right] \right] \right\} \quad /8.9/$$

Нетрудно понять, что величина, стоящая в фигурных скобках /8.9/, представляет для моментов времени, показанных на рис. 16, длины соответствующих отрезков АВ, А'В' и т.д. При этом первая квадратная скобка в /8.9/ /отрезок АС/ дает "незапаздывающие ложнобетатронные" частицы, то есть те, которые по выходе из инжектора сразу садятся на бетатронную мишень. После конца инжекции таких частиц не будет. Если несколько изменить "привязку" или уменьшить τ так, чтобы ρ_o в точке q было меньше ρ_R , то "незапаздывающие ложнобетатронные" частицы будут отсутствовать вообще. В составе бетатронного импульса имеются и другие "негодные" частицы - те, которые садятся на мишень раньше момента t_f , в который должно включаться ускоряющее напряжение. Назовем их также "ложнобетатронными". Коэффициент захвата частиц на бетатронную мишень, уменьшенный за счет указанных выше "ложнобетатронных" частиц обоого типа, есть σ_1 - эффективность первого режима /см. § 1/. Экспериментально, однако, затруднительно выделить из бетатронного импульса "ложнобетатронные" частицы /второго типа/ и, главное, это и не нужно, поскольку оптимальные условия захвата в режим ускорения, подбираемые при включенном ускоряющем напряжении, в общем не отвечают оптимуму σ_1 .

Рассчитаем бетатронный импульс и его зависимость от времени начала инжекции для простейшего случая $\xi = 0$ /кстати именно этот случай пока-

зан на рис. 16/. Тогда $\rho_{\lambda}(\rho_0^{(1)}) = \cos \nu (2d + g - \rho_0^{(1)})$. Получим формулы, пригодные для условий инжекции в синхрофазотрон ОИЯИ при оптимальных "привязках". Будем считать выполненными следующие условия:

$$\rho_{\Gamma} \leq \rho_0^{(1)} \left(-\frac{\Delta M_W}{2}, g \right) \leq \rho_B, \quad /8.10a/$$

$$\frac{u\tau}{1+\cos\nu} + \rho_0^{(1)} \left(-\frac{\Delta M_W}{2}, g \right) - \rho_{\Gamma} \leq \Delta M_W \leq u\tau + \rho_0^{(1)} \left(-\frac{\Delta M_W}{2}, g \right) - \rho_{\Gamma}, \quad /8.10б/$$

$$\rho_B - \rho_0^{(1)} \left(-\frac{\Delta M_W}{2}, g \right) \leq u\tau \leq (2d + g) - \frac{1+\cos\nu}{\cos\nu} \left(-\frac{\Delta M_W}{2}, g \right). \quad /8.10в/$$

Можно убедиться, что оптимальная привязка в нашем случае удовлетворяет этим условиям. Тогда бетатронный импульс составит из пяти отрезков прямых линий:

$$1) \text{ При } \rho_B - g - \frac{\Delta M_W}{2} \leq M(t, 0) \leq M(t_2, 0) = M(t_1, 0) + u\tau \quad /8.11a/$$

$$J_{\beta} = \frac{eQ}{\Delta M_W \tau} \left[(1 + \cos \nu) M(t, 0) - 2d \cos \nu + (1 + \cos \nu) \frac{\Delta M_W}{2} + g \right].$$

$$2) \text{ При } M(t_2, 0) \leq M(t, 0) \leq \frac{-M(t_1, 0) + 2d \cos \nu - (1 + \cos \nu) \frac{\Delta M_W}{2} - g}{\cos \nu}$$

/8.11б/

$$J_{\beta} = \frac{eQ}{\Delta M_W \tau} \cdot \frac{\cos \nu}{1 + \cos \nu} \left[\cos \nu \cdot M(t, 0) - 2d \cos \nu + M(t_2, 0) + (1 + \cos \nu) \frac{\Delta M_W}{2} + g \right].$$

$$3) \text{ При } \frac{-M(t_1, 0) + 2d \cos \nu - (1 + \cos \nu) \frac{\Delta M_w}{2} - g}{\cos \nu} \leq M(t, 0) \leq \frac{\cos M(t_1, 0) + 2d \cos \nu - (1 + \cos \nu) p_r + g \cos \nu}{\cos \nu}$$

$$\gamma_p = \frac{e Q}{\Delta M_w \tau} \cdot \frac{\cos \nu}{1 + \cos \nu} \cdot u \tau.$$

/8.11B/

$$4) \text{ При } \frac{\cos M(t_1, 0) + 2d \cos \nu - (1 + \cos \nu) p_r + g \cos \nu}{\cos \nu} \leq M(t, 0) \leq \frac{-M(t_2, 0) + 2d \cos \nu + (1 + \cos \nu) \frac{\Delta M_w}{2} - g}{\cos \nu}$$

$$\gamma_p = \frac{e Q}{\Delta M_w \tau} \cdot \frac{-\cos M(t, 0) + [M(t_2, 0) + 2d + g] \cos \nu - (1 + \cos \nu) p_r}{1 + \cos \nu}$$

/8.11Г/

$$5) \text{ При } \frac{-M(t_2, 0) + 2d \cos \nu + (1 + \cos \nu) \frac{\Delta M_w}{2} - g}{\cos \nu} \leq M(t, 0) \leq \frac{(2d + \frac{\Delta M_w}{2}) \cos \nu - p_r}{\cos \nu}$$

$$\gamma_p = \frac{e Q}{\Delta M_w \tau} \left[-\cos \nu M(t, 0) + (2d + \frac{\Delta M_w}{2}) \cos \nu - p_r \right].$$

/8.11Д/

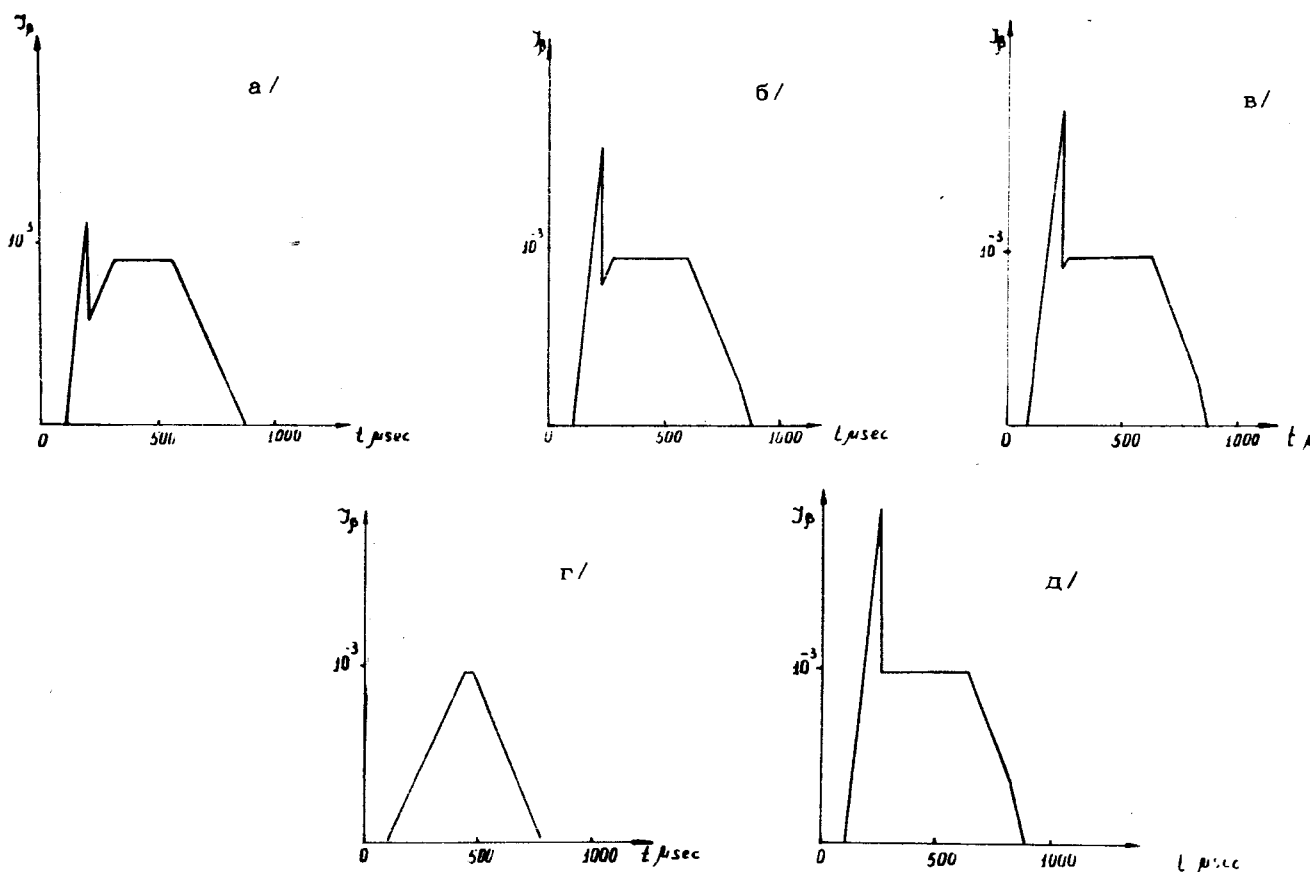


Рис. 17

Бетатронные импульсы при $\xi_1 = 0$, $q = 2$ см и различных "привязках": а/ $M(t_1, 0) = -20$ см; б/ $M(t_2, 0) = -13$ см /оптимальный случай/; в/ $M(t_3, 0) = -9$ см. Импульсы на остальных двух рисунках имеют "привязки", сильно отличающиеся от оптимальной: г/ $M(t_4, 0) = -39$ см; д/ $M(t_5, 0) = -8$ см. Импульс дан в условных единицах, таких, что $\int_0^{\infty} J_p dt$ есть коэффициент захвата на бетатронную мишень.

На рис. 17 а, б, в/ показаны импульсы для различных "привязок", рассчитанные по формулам /8.11/ при $q = 2$ см. Как видно, ток на мишень вначале резко растет и имеет характерный пик, образованный в основном "незапаздывающими ложнобетатронными" частицами, далее имеется некий провал,

бетатронный максимум и окончательный спад.

На рис. 18 даются: импульс при $\xi = 0$, $g = 2$ см и импульс для реального пучка. Как видно, первый от второго отличается мало - в основном в конце. Это и понятно, поскольку последними на мишень захватываются частицы с малыми ρ_0 , а при ξ , отличных от нуля, таких частиц в пучке, доходящем до мишени, будет меньше, так как с увеличением ξ возрастает вероятность соударения с инжектором. Общий коэффициент захвата частиц на бетатронную мишень σ_B для реального пучка и оптимальных условиях второго режима получается равным 0,6.

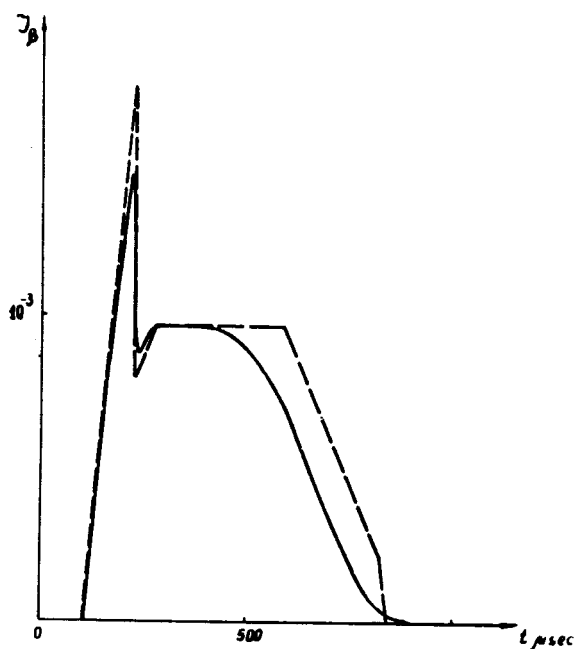


Рис. 18.

Бетатронный импульс для а/ $\xi = 0$, $g = 2$ см и б/реального пучка. Единицы те же, что и на рис. 17.

Экспериментальное σ_B меньше /до 0,4/. Здесь можно привести те же объяснения, что и в § 7 по поводу общего коэффициента захвата в режим ускорения. Форма экспериментального бетатронного импульса [5] также несколько от-

личается от нашей, но основные особенности - начальный пик, провал и главный максимум с последующим спадом - явно выражены и в экспериментальном импульсе. Кроме того, длительность обоих импульсов^{х/} одинакова - $500 \div 650 \mu\text{sec}$

Отличие формы состоит, главным образом, в том, что экспериментальный импульс перекошен: главный максимум сдвинут ближе к концу импульса, и что начальный пик в нем шире и менее резко выражен, чем в полученном нами импульсе. Это нетрудно понять. При расчетах мы предполагали, что частица попадает на мишень в тот момент, когда ее амплитуда достает до мишени, в то время как в действительности это может происходить позже из-за обходов частицами мишени благодаря свободным колебаниям. Поэтому часть частиц в теоретическом импульсе следует отнести к более поздним моментам времени, что и даст соответствующий перекош. Большая размытость формы экспериментального импульса объясняется тем, что энергетическая и угловая структура инжектируемого пучка на самом деле отличается от столообразной, которой мы пользовались при расчетах.

Обсудим возможность использования бетатронного импульса /в наших условиях широкого спектра/ как индикатора правильности привязки начала инжекции. Как видно из рис. 17 а,б,в для разумных пределов $M(t_1, 0)$ и высота бетатронного максимума, и длительность импульса практически не зависят от $M(t_1, 0)$. Наилучшим индикатором могла бы быть высота начального пика, но, как уже говорилось, в эксперименте он в значительной степени замазан. Сильное отличие формы импульса от оптимальной /отсутствие начального ложнобетатронного пика или провала/ наблюдается лишь при значительных отклонениях привязок от наивыгоднейшей /см. рис. 17г,д/, т.е. для таких привязок, которые мы при выводе выражения для импульса /8.11а/ - /8.11д/ не считали разумными. Из сказанного следует, что бетатронный импульс может быть лишь грубым индикатором настройки.

Авторы благодарны А.Б. Кузнецову, Л.П. Зиновьеву, К.П. Мызникову за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

Авторы признательны также коллективу расчетного бюро ЛВЭ, проделавшему большую счетную и оформительскую работу.

^{х/}Имеется в виду длительность части импульса, начинающейся с момента t_2 /конец инжекции/, т.е. на рис.17,18 после "срыва" начального пика.

Л и т е р а т у р а

1. М.С.Рабинович. Диссертация. Труды ФИАН т.Х, 1958 г.
2. И.С.Данилкин и М.С.Рабинович. ЖЭТФ, т.ХХУШ в.2, 1958г.
3. В.И.Котов, и Н.Б.Рубин. ЖЭТФ, т.ХХУШ в.2, 1958г.
4. С.К.Есин, Л.П.Зиновьев, К.П.Мызников, В.П.Саранцев. Препринт ОИЯИ /Р-555/, 1960г.
5. С.К.Есин, Л.П.Зиновьев, К.П.Мызников, В.П.Саранцев. Препринт ОИЯИ /Р-558/, 1960 г.

Рукопись поступила в издательский отдел

5 января 1961г.