636

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Т.Вишки, И.М.Граменицкий, М.И.Подгорецкий

Р-636

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОШИБОК ПРИ НАЛИЧИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОПРАВОК

Дубна 1960 год

Т.Вишки, И.М.Граменицкий, М.И.Подгорецкий

Р-636

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ОШИБОК ПРИ НАЛИЧИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОПРАВОК

Настоящая статья представляет собой сокращенную обработку лекций, прочитанных в Лаборатории высоких энергий Объединенного института ядерных исследований осенью 1960 года, посвященных рассмотрению некоторых специальных статистических вопросов, связанных с опытами по физике частиц высоких энергий. Для пояснения постановки задачи рассмотрим в качестве примера эксперименты по изучению характеристик вторичных заряженных частиц, возникающих в фотоэмульсии. В этом случае, как правило, измерения энергии, ионизации и т.д. возможны только тогда, когда угол вылета частицы с плоскостью эмульсии не превосходит некоторого значения $\beta_{пред.}$. Поэтому существует определенная вероятность w того, что характеристики частицы будут измерены, зависящая от пространственного угла вылета частицы θ. В этой и аналогичных задачах возникает вопрос о нахождении средних значений различных величин (например, числа частиц, импульсов, поперечных импульсов и т.д.) и их дисперсий.

Рассмотрим сначала простейший случай. Пусть имеется N частиц; w -вероятность того, что частица попадет в область, в которой возможны измерения. Введем вес K, равный $K=\frac{1}{w}$. Если измерено n частиц, то случайная величина $x=Kn$ имеет среднее значение $\bar{x}=K\bar{n}=KNw=N$. Дисперсия x равна $D_x=K^2D_n$, где $D_n=Nw(1-w)$ - дисперсия величины n, распределенной по биномиальному закону. Окончательное выражение для D_x может быть записано в следующем виде:

$$D_x=K^2Nw(1-w). \tag{1}$$

Рассмотренный пример легко обобщить на случай, когда из полного числа N частиц нас интересуют только частицы определенного типа.

Пусть вероятность того, что некоторая частица принадлежит к данному типу равна p. Тогда среднее значение величины $x=Kn$ будет

$$\bar{x}=K\bar{n}=KNpw=Np \tag{2}$$

и дисперсия величины x

$$D_x=K^2Npw(1-pw). \tag{3}$$

На практике обычно встречается случай, когда величины w и p зависят от какого-либо параметра, например, от угла вылета по отношению к первичной частице.

Пусть w_i, p_i, n_i - величины, определенные выше при i - том значении параметра. Найдем среднее значение величины $x = \sum K_i n_i$

$$\bar{x} = \sum K_i \bar{n}_i = N \sum K_i p_i w_i = N \sum p_i = NP, \tag{4}$$

где $P = \sum p_i$.

Вычислим дисперсию величины x :

$$D_x = \sum_i \sum_\ell K_i K_\ell \left(\overline{n_i n_\ell} - \bar{n}_i \bar{n}_\ell \right). \tag{5}$$

Выражение, заключенное в скобках, может быть, как известно, представлено в виде:

$$\overline{n_i n_\ell} - \bar{n}_i \bar{n}_\ell = \begin{cases} -N p_i w_i p_\ell w_\ell & \text{при} \quad i \neq \ell \\ N p_i w_i (1 - p_i w_i) & \text{при} \quad i = \ell . \end{cases} \tag{6}$$

Откуда

$$D_x = -N \sum_i \sum_\ell p_i p_\ell w_i w_\ell K_i K_\ell + N \sum p_i w_i K_i^2 = -NP^2 + N \sum p_i K_i . \tag{7}$$

Величина P может быть определена экспериментально с помощью равенства (4). Далее целесообразно ввести величину $y = \sum_i n_i K_i^2$.

Среднее значение этой величины равно

$$\bar{y} = \sum K_i^2 \bar{n}_i = N \sum K_i^2 p_i w_i = N \sum p_i K_i . \tag{8}$$

Поэтому дисперсия x может быть записана окончательно в виде[x)] :

$$D_x = -NP^2 + \bar{y} . \tag{9}$$

[x)] При выводе (9) предполагалось, что все измеренные частицы между собой статистически независимы.

В том случае, когда все N частиц одного типа (выполнено условие $\sum p_i = 1$), среднее значение и дисперсия x даются выражениями

$$\bar{x} = N \tag{4a}$$

$$D_x = -N + \bar{y} . \tag{9a}$$

Пример.

При изучении взаимодействий нуклон-нуклон методом фотоэмульсий было отобрано 250 случаев p-p-взаимодействий. Полное число лучей при этом равно 854. Как указывалось выше, измерения проводились на частицах, имеющих угол погружения $\beta \leq \beta_{пред} = 5^{\circ}$. Поэтому необходимо вычислить веса K_i, связанные с геометрическими условиями наблюдения. Зависимость K_i от угла вылета θ_i может быть легко получена при предположении об азимутальной симметрии вылета частиц:

$$K_i = \begin{cases} 1 & \text{при } \theta_i \leq \theta_{пред} \\ \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{\arcsin \dfrac{\sin \theta_{пред}}{\sin \theta_i}} & \text{при } \theta_i > \theta_{пред} , \end{cases}$$

где

$$\theta_{пред} = \beta_{пред} .$$

Если предположение об азимутальной симметрии справедливо, то величина $x = \sum_i K_i n_i$ должна быть равна полному числу частиц в пределах статистических ошибок. Поскольку нас интересует полное число частиц, независимо от типа, то выполнено условие $\sum p_i = 1$. Поэтому вычисление дисперсии проводится по формуле (9a)[x]. Вычисленная величина x, равная 856 ± 64, совпадает с фактическим числом вторичных частиц, что подтверждает гипотезу об азимутальной симметрии.

---

[x] Если вероятности w_i достаточно малы, то в каждой звезде имеется не более одной частицы, подлежащей измерению. В этих условиях различные измеренные частицы статистически независимы, что предполагается при выводе (9a).

Используя полученные выражения (4) и (9), можно вычислить среднее значение и дисперсии для разности в числе частиц вылетающих в двух неперекрывающихся телесных углах. Пусть

$$x = \sum_i n_i K_i - \sum_j m_j \ell_j . \qquad (11)$$

Обозначим $\sum_i n_i K_i = x_1$ и $\sum m_j \ell_j = x_2$.

Тогда

$$\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = N(P-Q), \qquad (12)$$

где $P = \sum p_i$ и $Q = \sum q_j$

и

$$D_x = D_{x_1} + D_{x_2} - 2(\overline{x_1 x_2} - \bar{x}_1 \bar{x}_2), \qquad (13)$$

где

$$D_{x_1} = -NP^2 + N \sum p_i K_i$$

$$D_{x_2} = -NQ^2 + N \sum q_i \ell_i .$$

Рассмотрим третий член в выражении (13)

$$\overline{x_1 x_2} - \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \sum\sum (\overline{n_i m_j} - \bar{n}_i \bar{m}_j) K_i \ell_j =$$

$$= -N \sum\sum p_i w_i q_j v_j K_i \ell_j = -N \sum\sum p_i q_j = -NPQ .$$

Окончательно

$$D_x = -N(P-Q)^2 + N(\sum p_i K_i - \sum q_j \ell_j) . \qquad (14)$$

Аналогично (8) введем $y_1 = \sum n_i K_i^2$ и $y_2 = \sum m_j \ell_j^2$ и перепишем выражение (14) в виде

$$D_x = -N(P-Q)^2 + N(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) . \qquad (14a)$$

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении среднего значения таких величин как импульс, поперечный импульс и т.д. При измерении мы имеем несколько значений некоторой величины z. Величина z является случайной; закон ее распределения может, вообще говоря, зависеть от того же параметра, от которого зависит w.

Рассмотрим сначала более простой случай. Пусть нас интересует величина $\bar{z}$, относящаяся ко всем частицам. При i -том значении параметра может быть измерено n_i частиц, имеющих различные значения z. Введем величину x следующим образом:

$$x = \frac{1}{N} \sum_i K_i \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}, \tag{15}$$

где N – полное число частиц. Найдем среднее значение и дисперсию величины x. Введем обозначение $x_i = K_i \sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}$. При усреднении величины x_i, относящейся к i –тому значению параметра, предполагая, что n_i – постоянно, получим

$$\overline{(x_i)}_{n_i} = K_i n_i \overline{z}_i . \tag{16}$$

Поскольку n_i – случайная величина, то усредняя по n_i, получим

$$\overline{x_i} = K_i \overline{n}_i \overline{z}_i . \tag{17}$$

Отсюда

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum \overline{x}_i = \frac{1}{N} \sum K_i \overline{n}_i \overline{z}_i = \frac{1}{N} \sum N p_i w_i K_i \overline{z}_i = \sum p_i \overline{z}_i . \tag{18}$$

Дисперсия x может быть представлена в виде

$$D_x = \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_l (\overline{x_i x_l} - \overline{x}_i \overline{x}_l). \tag{19}$$

Рассмотрим отдельно члены суммы (19) при $i = l$ и при $i \neq l$. Для удобства расчета введем величину Δz_i, удовлетворяющую следующему условию

$$x_i = K_i n_i (\overline{z}_i + \Delta z_i). \tag{20}$$

Отсюда видно, что

$$\Delta z_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} z_{ij}}{n_i} - \overline{z}_i . \tag{21}$$

Из (16) и (20) можно получить, что $\overline{\Delta z_i} = 0$. Из полученного равенства и выражения (21) легко вывести соотношение между $\overline{\Delta z_i^2}$ и дисперсией величины z_i:

$$\overline{\Delta z_i^2} = \frac{D z_i}{n_i} . \tag{22}$$

Отсюда

$$\overline{x_i^2} = \overline{K_i^2 n_i^2 (\overline{z}_i + \Delta z_i)^2} = K_i^2 \overline{n_i^2}\, \overline{z}_i^{\,2} + K_i^2 \overline{n}_i D_{z_i} .$$

Дисперсия величины x_i x)

$$D_{x_i} = \overline{x_i^2} - \overline{x_i}^2 = K_i^2 \overline{n_i^2}\, \overline{z_i}^2 + K_i^2 \overline{n_i} D_{z_i} - K_i^2 \overline{n_i}^2 \overline{z}_i^2 = K_i^2 \overline{n_i} D_{z_i} + K_i^2 \overline{z}_i^2 D_{n_i} . \tag{23}$$

В том случае, когда $i \neq \ell$, легко видеть, что

$$\overline{x_i x_\ell} - \overline{x}_i \overline{x}_\ell = K_i K_\ell \overline{z}_i \overline{z}_\ell (\overline{n_i n_\ell} - \overline{n}_i \overline{n}_\ell). \tag{24}$$

Подставляя выражения (23) и (24) в (19), получаем

$$D_x = \frac{1}{N^2} \left\{ \left[\sum_i \sum_\ell K_i K_\ell \overline{z}_i \overline{z}_\ell (\overline{n_i n_\ell} - \overline{n}_i \overline{n}_\ell) \right]_{i \neq \ell} + \sum_i K_i^2 \overline{z}_i^2 D_{n_i} + \sum_i K_i^2 \overline{n}_i D_{z_i} \right\} =$$

$$= \frac{1}{N^2} \left\{ \left[\sum_i \sum_\ell K_i K_\ell \overline{z}_i \overline{z}_\ell (\overline{n_i n_\ell} - \overline{n}_i \overline{n}_\ell) \right] + \sum_i K_i^2 \overline{n}_i D_{z_i} \right\}. \tag{25}$$

В последней строчке выражения (25) суммирование проводится по всем возможным значениям i и ℓ. Проводя простейшие преобразования, получаем

$$D_x = \frac{1}{N^2} \left\{ - N \left(\sum p_i \overline{z}_i \right)^2 + N \sum K_i p_i \overline{z_i^2} \right\}. \tag{26}$$

Введем величину $y = \sum K_i^2 z_i^2$, среднее значение этой величины равно:

$$\overline{y} = \sum K_i^2 \overline{z_i^2}\, \overline{n}_i = N \sum K_i^2 \overline{z_i^2} p_i w_i = N \sum K_i p_i \overline{z_i^2} . \tag{27}$$

Подставив (27) в (26) и принимая во внимание, что $\sum p_i \overline{z}_i = \overline{x}$, получим окончательное выражение для дисперсии x :

$$D_x = \frac{1}{N^2} \left(- N \overline{x}^2 + \overline{y} \right) \tag{28}$$

---

x) При выводе выражения для дисперсии предполагается, что величины z_{ij} статистически независимы. По этому поводу см. примечание на стр. 5.

Гораздо больший интерес представляет вопрос о вычислении $\overline{x}$ и D_x в том случае, когда интересующая нас величина относится не ко всем частицам, а к определенному типу частиц. Тогда выражение (15) может быть записано в следующем виде:

$$x = \frac{\sum_i K_i \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}}{\sum K_i n_i} . \qquad (15a)$$

В выражении (15а) знаменатель, так же как и числитель, является флюктуирующей величиной.

Введем обозначения: $u = \sum_i K_i \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}$ и $v = \sum K_i n_i$.

Выражение (15а) можно представить так:

$$x = \frac{u}{v} = \frac{\overline{u} + (u - \overline{u})}{\overline{v} + (v - \overline{v})} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}} \frac{1 + \frac{u-\overline{u}}{\overline{u}}}{1 + \frac{v - \overline{v}}{\overline{v}}} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}} \frac{1+\alpha}{1+\beta} , \qquad (29)$$

где $\alpha = \frac{u - \overline{u}}{\overline{u}}$ и $\beta = \frac{v - \overline{v}}{\overline{v}}$.

По порядку величины $\alpha \sim \frac{\sqrt{D_u}}{\overline{u}}$ и $\beta \sim \frac{\sqrt{D_v}}{\overline{v}}$.

Как было показано выше, величины $\frac{\sqrt{D_u}}{\overline{u}}$ и $\frac{\sqrt{D_v}}{\overline{v}}$ обратно пропорциональны $\sqrt{N}$, т.е. при больших N , членами, содержащими α и β в старших степенях, можно пренебречь. Разлагая в ряд знаменатель выражения (29), получаем

$$x = \frac{\overline{u}}{\overline{v}} \left[(1+\alpha)(1 - \beta + \beta^2 - \beta^3 + \cdots) \right] \approx \frac{\overline{u}}{\overline{v}} \left[1 + \alpha - \beta - \alpha\beta + \beta^2 \right] . \qquad (30)$$

Отсюда следует, что

$$\overline{x} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}} \left[1 + \overline{\alpha} - \overline{\beta} - \overline{\alpha\beta} + \overline{\beta^2} \right] . \qquad (31)$$

Легко видеть, что средние значения величин в правой части (31) выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} &= \overline{\beta} = 0 \\ \overline{\alpha^2} &= \frac{D_u}{\overline{u}} \\ \overline{\beta^2} &= \frac{D_v}{\overline{v}} \\ \overline{\alpha\beta} &= \frac{K_{uv}}{\overline{u}\,\overline{v}} , \end{aligned} \qquad (30a)$$

где $K_{uv} = \overline{UV} - \bar{U}\bar{V}$.

Величины $\bar{U}$, $\bar{V}$, D_u и D_v , вычисленные ранее [см. (18), (4), (26) и (7)] , а также величину K_{uv} запишем в следующем виде

$$\bar{U} = N\sum p_i \bar{z}_i = AN$$
$$\bar{V} = N\sum p_i = BN$$
$$D_u = N[-(\sum p_i \bar{z}_i)^2 + \sum K_i p_i \overline{z_i^2}] = CN$$
$$D_v = N[-(\sum p_i)^2 + \sum p_i K_i] = FN$$
$$K_{uv} = N[\sum K_i p_i \bar{z}_i - (\sum_l p_l \sum_i p_i \bar{z}_i)] = \mathcal{E}N .$$

Перепишем (31) , используя введенные обозначения,

$$\bar{x} = \frac{\bar{U}}{\bar{V}}\left[1 - \left(\frac{\mathcal{E}}{AB} - \frac{F}{B^2}\right)\frac{1}{N}\right]. \qquad (31a)$$

Выражение (31а) указывает на наличие смещения средней величины $\bar{x} = \overline{\left(\frac{U}{V}\right)}$ относительно величины $\frac{\bar{U}}{\bar{V}}$, которое уменьшается с увеличением N .

Вычислим дисперсию величины x

$$D_x = \overline{x^2} - \bar{x}^2 .$$

Используя (30) и (30а), получаем с точностью до членов порядка $1/N$

$$D_x = \left(\frac{\bar{U}}{\bar{V}}\right)^2\left(\overline{\alpha^2} + \overline{\beta^2} - 2\overline{\alpha\beta}\right) = \left(\frac{\bar{U}}{\bar{V}}\right)^2\left[\frac{D_u}{\bar{U}^2} + \frac{D_v}{\bar{V}^2} - \frac{2K_{uv}}{\bar{U}\bar{V}}\right].$$

Окончательное выражение для дисперсии x можно записать в следующем виде

$$D_x = \left(\frac{\bar{U}}{\bar{V}}\right)^2\left(\frac{C}{A^2} + \frac{F}{B^2} - \frac{2\mathcal{E}}{AB}\right)\frac{1}{N} , \qquad (32)$$

причем все величины, входящие в (32), могут быть определены экспериментально.

Как уже отмечалось, все приведенные соотношения справедливы в предположении, что различные частицы и их характеристики статистически независимы. В противном случае определение величины флюктуаций крайне осложняется. С другой стороны, иногда приходится иметь дело с величинами, вычисление флюктуаций которых затруднительно даже в самых простых предположениях.

В указанных случаях может быть использован прием чисто экспериментального определения величины флюктуаций. Предположим, что нас интересует среднее значение некоторой величины X, определяемое по группе, содержащей N событий. Можно показать, что для больших N – $D_X = \frac{a}{N}$, где a – постоянная величина. Для измерения a разделим все события на m подгрупп, содержащих $\frac{N}{m}$ событий. Каждой из этих подгрупп соответствует свое значение интересующей нас величины x_i ($i = 1, 2 \ldots\ldots m$), вычисленное на основании $\frac{N}{m}$ событий. Имея в своем распоряжении величины x_i, мы можем вычислить $D_x = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, а затем и искомую величину D_X :

$$D_X = \frac{D_x}{m} . \qquad (33)$$

Число подрупп m может быть выбрано произвольно. Следует, однако, иметь в виду, что как m, так и $\frac{N}{m}$ должны быть достаточно велики.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 декабря 1960 года.