ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

М.И. Широков

Р-631

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕАКЦИЙ ТИПА

$a + b \to c + d + e + \ldots$

ЖЭТФ, 1961, т40, в5, с. 1387-1391

Дубна 1960 год

P-631

М.И. Широков

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕАКЦИЙ ТИПА

$a + b \to c + d + e + \ldots$

Направлено в ЖЭТФ

А н н о т а ц и я

Построена релятивистская теория реакций с тремя и более частицами-продуктами. Она является обобщением релятивистской теории реакций типа $a+b \to c+d$ в форме Жакоба, Уика и Чжоу Гуан-чжао. При этом оказалось необходимым в качестве относительных импульсов частиц использовать вместо переменных Якоби другие переменные.

Выписаны правила отбора для таких реакций, следующие из сохранения четности.

1. Известна форма релятивистской общей теории реакций типа $a+b \to c+d$ (т.е. общие выражения для углового распределения и поляризации через фазы), использующая описание спинового состояния в терминах проекций на импульс частицы [1-3]. Кроме релятивизма, большим достоинством этой формы является меньшая громоздкость ее формул по сравнению с общераспространенными формулами фазового анализа (используемыми, например, при фазовом анализе p-p-рассеяния).

В настоящей статье по методу работ [1-3] построена теория реакций типа $a+b \to c+d+e+\ldots$ (а также $a \to c+d+e+\ldots$). Спины и массы покоя частиц произвольны. Одним из результатов является необходимость использования в релятивистской теории вместо переменных Якоби (см.например, Фабри [4]) других импульсных переменных, впервые использованных Далитцем для описания τ-распада [5].

2. Начнем со случая трех частиц $a+b \to 1+2+3$. Основные положения общей теории реакций изложены, например, в работах [2] и [6].

Прежде всего вместо импульсов $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ трех частиц надо ввести полный импульс $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ и два относительных импульса $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$ (точное их определение см. далее). Сохранение $\vec{P}$ позволяет исключить эту переменную из описания реакции [6]. В дальнейшем считаем, что $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$.

Далее основной задачей является нахождение функции преобразования $\langle \vec{p}\,\vec{p}\,' m_1 m_2 m_3 | \ldots JM \rangle$, позволяющей перейти от описания в терминах измеряемых в опыте переменных (импульсы частиц) к описанию в представлении, где фигурирует сохраняющий полный момент J и его проекция M. Для двух частиц аналогичная функция имеет вид [1,2,3]:

$$\langle \vec{p}\, m_1 m_2 \,|\, m_1' m_2' \tilde{p} j m \rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\, \mathcal{D}^{j}_{m_1+m_2,\,m}(-\pi, \vartheta, \pi-\varphi)\, \delta_{p,\tilde{p}}\, \delta_{m_1,m_1'}\, \delta_{m_2,m_2'}\, q(m_1, m_2, p) . \qquad (1)$$

Полный момент j двух частиц и его проекция m отнесены к с.ц.и. двух частиц с произвольно выбранными осями $z'y'x'$. ϑ и φ – сферические углы относительного импульса $\vec{p}$ двух частиц в этой системе осей. m_1 и m_2 – спиновые проекции частиц 1 и 2, отнесенные к системе осей $z_c \parallel \vec{p}$ и $y_c \parallel [\vec{z}' \times \vec{p}]$ (и отнесенные к системам покоя этих частиц как к лорентцовским системам). m_1' и m_2' квантуются относительно тех же осей $z_c y_c x_c$, но относятся к с.ц.и. двух частиц. Множитель q появляется в результате преобразования спиновых переменных из систем покоя частиц в их с.ц.и.

Для решения поставленной задачи с тремя частицами мы можем в принципе перейти от переменных ($\vec{p}$ m_1 m_2) к переменным (m_1' m_2' j m) и далее от ($\vec{p}'$ m m_3) к (m m_3 J M), считая систему из частиц 1 и 2 как бы одной частицей с переменным спином j. Однако, если мы пользуемся переменными Якоби (например, $\vec{p}_1 = \vec{p}'/2 + \vec{p}$, $\vec{p}_2 = \vec{p}'/2 - \vec{p}$ и $\vec{p}_3 = -\vec{p}'$), то спиновые проекции на $\vec{p}$ не являются проекциями на импульсы частиц (helicities). А в формуле (1) m_1 и m_2 должны быть именно такими проекциями.

Пусть $\vec{p}$ есть импульс частицы 1 в лорентцовской системе K_{12}, где полный импульс 1 и 2 равен нулю [5]. Тогда $-\vec{p}$ будет импульсом 2. Чтобы полный импульс системы /123/ равнялся нулю, полный импульс системы /12/(относительно с.ц.и. трех частиц K_{123}) должен быть равен $-\vec{p}_3$ или $+\vec{p}'$. Скорость $\vec{\beta}$ системы K_{12} относительно K_{123} равна $\vec{p}'/E_{12}$, где $E_{12} = \sqrt{p'^2 + \varkappa_{12}^2}$ а $\varkappa_{12}$ –"масса" системы /12/ (определяемая обычным образом как полная энергия /12/ в лорентцовской системе, где /12/ покоится: $\varkappa_{12} = \sqrt{p^2 + \varkappa_1^2} + \sqrt{p^2 + \varkappa_2^2}$, за единицу скорости принята скорость света). Импульсы частиц 1 и 2 в K_{123} получаются лорентцовским преобразованием (см. [7], § 18):

$$\vec{p}_1 = \vec{p} - \vec{p}'\left[\frac{(\vec{p}'\vec{p})}{p'^2}\left(\frac{E_{12}}{\varkappa_{12}} - 1\right) - \frac{\sqrt{p^2 + \varkappa_1^2}}{\varkappa_{12}}\right]$$

$$\vec{p}_2 = -\vec{p} + \vec{p}'\left[\frac{-(\vec{p}'\vec{p})}{p'^2}\left(\frac{E_{12}}{\varkappa_{12}} - 1\right) - \frac{\sqrt{p^2 + \varkappa_2^2}}{\varkappa_{12}}\right] \qquad (2)$$

Чтобы найти $\vec{p}$, зная импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, надо сделать обратное преобразование

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\left[\frac{((\vec{p}_1+\vec{p}_2)\cdot\vec{p}_1)}{(p_1+p_2)^2}\left(\frac{E_{12}}{\varkappa_{12}} - 1\right) - \frac{\sqrt{p_1^2+\varkappa_1^2}}{\varkappa_{12}}\right], \tag{3}$$

где

$$E_{12} = \sqrt{p_1^2+\varkappa_1^2} + \sqrt{p_2^2+\varkappa_2^2} \qquad \text{и} \qquad \varkappa_{12} = \sqrt{E_{12}^2 - (p_1+p_2)^2}.$$

Итак, если /1/ написана для частиц 1 и 2, то $\vec{p}$ должно быть переменной Далитца и m_1', m_2', j и m должны относиться к лоренцовской системе K_{12}. Функция преобразования от ($\vec{p}'$ m m_3) к (m' $m_3'JM$) имеет такой же вид /1/ и искомая функция равна

$$\sum_m \langle \vec{p}\; m_1 m_2 | m_1' m_2' \tilde{p} j m \rangle \langle \vec{p}'\, m m_3 | m' m_3' \tilde{p}' J M \rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\, \mathcal{D}^{j}_{m_1+m_2,\, m'}(-\pi, \vartheta, \pi-\varphi)\, \delta_{p,\tilde{p}}\, \delta_{m_1, m_1'}\, \delta_{m_2, m_2'}\, q(m_1, m_2, p) \times \tag{4}$$

$$\times \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\, \mathcal{D}^{J}_{m'+m_3, M}(-\pi, \vartheta', \pi-\varphi')\, \delta_{p', \tilde{p}'}\, \delta_{m_3, m_3'}\, q(m', m_3, p') \equiv$$

$$\equiv \langle \vec{p}\,\vec{p}'\, m_1 m_2 m_3 | m_1' m_2' m_3' j m' J M\, \tilde{p}\,\tilde{p}' \rangle .$$

В этой формуле J, M, j, m' и m_3' относятся к системе K_{123}, M проквантовано относительно некоторой системы осей zyx и ϑ', φ' суть сферические углы $\vec{p}'$ относительно zyx. Проекции m_3 и m, а также m_3' и m' проквантованы относительно системы осей с осью $z' \parallel \vec{p}'$ и осью $y' \parallel [\vec{z} \times \vec{p}']$.

ϑ и φ – сферические углы $\vec{p}$ в этой же системе осей, т.е. ϑ – угол между $\vec{p}$ и $\vec{p}'$. Наконец, m_1, m_2, m_3 относятся к системам покоя соответствующих частиц.

Важным достоинством переменных Далитца является еще и возможность выразить полную энергию системы трех частиц как функцию только $|\vec{p}|$ и $|\vec{p}'|$:

$$E = E_{12} + \sqrt{p'^2 + \varkappa_3^2} = \sqrt{p'^2 + [\sqrt{p^2+\varkappa_1^2} + \sqrt{p^2+\varkappa_2^2}\,]} + \sqrt{p'^2+\varkappa_3^2}\,. \tag{5}$$

В случае переменных Якоби E зависело еще от угла между относительными импульсами, и закон сохранения энергии нельзя было записать в представлении, содержащем модули импульсов и J, M.

Теперь можно написать следующее выражение для элемента S-матрицы (или матрицы $R = S - 1$) реакции $a + b \to$ 1+2+3:

$$\langle \vec{p}\,\vec{p}'\, m_1\, m_2\, m_3 \,|\, S \,|\, \vec{p}_a\, m_a\, m_b \rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{4\pi}} \sum_{j, m, J, M} (2J+1)\sqrt{2j+1}\; \mathcal{D}^{j}_{m_1+m_2,\, m}(-\pi, \vartheta, \pi-\varphi)\; \mathcal{D}^{J}_{m+m_3,\, M}(-\pi, \vartheta', \pi-\varphi') \cdot \tag{6}$$

$$\cdot \langle m_1 m_2 m_3\, j\, m\, p \,|\, S^{JE} \,|\, m_a m_b \rangle\; \mathcal{D}^{J*}_{m_a+m_b,\, M}(-\pi, \vartheta_a, \pi-\varphi_a)\,.$$

Функции q включены в обозначение $\langle\, | S^{JE} |\, \rangle$. Точнее, после перехода в представление, содержащее J и M, с их помощью можно возвратиться от представления в проекциях m_1', m_2', m_3' и m' — см. пояснение после (4) — к представлению в m_1, m_2, m_3, m (ср.[3]).

Суммирование по M можно выполнить [6]:

$$\sum_M \mathcal{D}^{J}_{m+m_3,\, M}(-\pi, \vartheta', \pi-\varphi')\; \mathcal{D}^{J*}_{m_a+m_b,\, M}(-\pi, \vartheta_a, \pi-\varphi_a) = \mathcal{D}^{J}_{m+m_3,\, m_a+m_b}(-\pi, \tilde{\vartheta}', \pi-\tilde{\varphi}')\,, \tag{7}$$

где $\tilde{\vartheta}'$ и $\tilde{\varphi}'$ будут сферическими углами $\vec{p}'$ в системе осей $z_a y_a x_a$, относительно которой проквантованы m_a и m_b (в частности, $z_a \parallel \vec{p}_a$). Поэтому матричный элемент (6) можно записать в виде $\langle m_1 m_2 m_3\, p\, p' \,|\, S(\vartheta, \varphi, \vartheta', \varphi') \,|\, m_a\, m_b\, p_a \rangle$ (значки $\sim$ над ϑ' и φ' здесь и в дальнейшем не выписываются).

Формула для $a \to$ 1+2+3 имеет аналогичный вид:

$$\langle \vec{p}\vec{p}' m_1 m_2 m_3 | S | JM \rangle = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{j,m} \sqrt{(2j+1)(2J+1)}\, \mathcal{D}^{j}_{m_1+m_2,\, m}(-\pi,\vartheta,\pi-\varphi)\, \mathcal{D}^{J}_{m+m_3,\, M}(-\pi,\vartheta',\pi-\varphi') \times$$

$$\times \langle m_1 m_2 m_3 j m p \,|\, S^{J\varkappa} | \rangle$$

Здесь J обозначает спин распадающейся частицы, M – его проекцию относительно некоторой тройки осей, $\varkappa$ – масса покоя распадающейся частицы.

3. При обычном способе сложения моментов с помощью коэффициентов Клебша-Гордана мы получаем для $a+b \to 1+2+3$ следующую формулу (если массы покоя всех частиц не равны нулю):

$$\langle \vec{p}\vec{p}' n_1 n_2 n_3 | S | \vec{p}_a n_a n_b \rangle =$$

$$= \sum Y_{\ell\mu}(\vartheta,\varphi) Y_{\ell'\mu'}(\vartheta',\varphi')\, C^{i\sigma}_{i_1 n_1 i_2 n_2}\, C^{j n_j}_{i\sigma \ell\mu}\, C^{s' n'}_{j n_j i_3 n_3}\, C^{JM}_{s' n' \ell' \mu'} \times \tag{9}$$

$$\times \langle i \ell j s' \ell' p | S^{JE} | s \ell_a p_a \rangle\, C^{JM}_{s n \ell_a \mu_a}\, C^{sn}_{i_a n_a i_b n_b}\, Y^{*}_{\ell_a \mu_a}(\vartheta_a, \varphi_a)$$

в (9) все спиновые проекции n проквантованы относительно одной системы осей zyx, к которой относятся также и все сферические углы. i_1, i_2, i_3 – спины частиц 1,2,3; Σ означает сумму по $\ell,\mu,\ell',\mu',i,\sigma,j,n_j,s',n',J,M,s,n,\ell_a,\mu_a$. Формула (9) тоже является релятивистской, если под $\vec{p}$ и $\vec{p}'$ подразумеваются переменные Далитца, а для описания релятивистского спина употреблено представление Л.Фоулди-Ю.Широкова [8].

Формулу /6/ можно получить из /9/. Для этого надо перейти к спиновым проекциям на направления импульсов частиц (m – проекции) с помощью соотношения

$$|m\rangle = \sum_{n=-i}^{+i} |n\rangle\, \mathcal{D}^{i}_{n,m}(g), \tag{10}$$

где g – поворот, совмещающий тройку осей zyx с соответствующей системой осей для m -проекции. Выполнив довольно громоздкие преобразования (ср., например, [6] раздел 2), мы получим (6), если обозначим (ср. [2] и [3], приложение В):

$$\langle m_1 m_2 m_3 j m p \,|\, S^{JE} \,|\, m_a m_b \rangle =$$

$$= \sum \left\{ \sqrt{\frac{2\ell+1}{2j+1}}\; C^{i\, m_1+m_2}_{i_1 m_1\, i_2 m_2}\; C^{j\, m_1+m_2}_{i\, m_1+m_2\, \ell 0} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{2\ell'+1}{2J+1}}\; C^{s'\, m+m_3}_{j m\, i_3 m_3}\; C^{J\, m+m_3}_{s' m+m_3\, \ell' 0} \right\} \times \langle i \ell_j s' \ell' p \,|\, S^{JE} \,|\, s \ell_a \rangle \cdot \left\{ \sqrt{\frac{2\ell_a+1}{2J+1}}\; C^{s\, m_a+m_b}_{i_a m_a\, i_b m_b}\; C^{J\, m_a+m_b}_{s\, m_a+m_b\, \ell_a 0} \right\}. \tag{11}$$

Ясно, насколько более громоздка формула (9) по сравнению с (6). В частности, в (6) нет ни одного коэффициента Клебша-Гордана. Конечно, они появляются, если для описания спинового состояния ансамбля частиц употреблять тензоры поляризации (см.,например, [6] и [1]):

$$\rho(q,\tau) = \sqrt{2i+1} \sum_{m,m'} (-1)^{i-m'} \langle i i\, m-m' \,|\, q \tau \rangle\, \rho_{m,m'}.$$

Здесь i - спин частицы, $\rho_{m,m'}$ -матрица плотности, описывающая спиновое состояние ансамбля частиц. Обобщение выражений для углового распределения и тензоров поляризации продуктов реакции (см. [6] и [9], раздел 1) на случай трех частиц трудностей не представляет.

4. При обобщении (6) и (8) на случай более трех частиц-продуктов не появляется никаких существенных новых трудностей. Вместо $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ вводятся переменные Далитца; сферические углы ϑ_i являются углами между импульсами Далитца. При увеличении числа частиц на одну появляется дополнительная функция преобразования вида (1).

5. В заключение выпишем правила отбора, вытекающие из инвариантности матрицы перехода относительно пространственного отражения и наличия определенных четностей у всех частиц. Способ получения их точно такой же, как в работах [9], [1], [2].

$$\langle m_1 m_2 \ldots | R(\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi',\ldots) | m_a m_b \rangle = \pi_1^* \pi_2^* \ldots \pi_a \pi_b (-1)^{l_1+l_2+\ldots+l_a+l_b} \times$$

$$\times (-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_a+m_b} \langle -m_1,-m_2,\ldots | R(\vartheta,-\varphi,\vartheta',-\varphi',\ldots) | -m_a,-m_b \rangle . \qquad (12)$$

В терминах коэффициентов W, введенных в [9], это правило отбора имеет вид:

$$\langle q_1 \tau_1 \ldots | W(\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi',\ldots) | q_a \tau_a q_b \tau_b \rangle = (-1)^{q_1+\ldots+q_a+q_b} \times$$

$$(-1)^{\tau_1+\ldots+\tau_a+\tau_b} \langle q_1,-\tau_1 \ldots | W(\vartheta,-\varphi,\vartheta',-\varphi',\ldots) | q_a -\tau_a\, q_b -\tau_b \rangle , \qquad (13)$$

что, в частности, для угловых распределений означает

$$\sigma(\vartheta,\varphi,\vartheta') = \sigma(\vartheta,-\varphi,\vartheta') \qquad (14)$$

в случае трех частиц и

$$\sigma(\vartheta,\varphi,\vartheta',\varphi',\vartheta'') = \sigma(\vartheta,-\varphi,\vartheta',-\varphi',\vartheta'') \qquad (15)$$

в случае четырех и т.д. Напомним, что угол φ' отсчитывается от оси $x'' \parallel [[\vec{p}_a \times \vec{p}''] \times \vec{p}_a]$, а угол φ от $x' \parallel [[\vec{p}'' \times \vec{p}'] \times \vec{p}'']$. Правило /13/ (в других формулировках) неоднократно упоминалось в литературе, см.например [10].

Следующие из сохранения четности азимутальные симметрии в каскадах реакций, содержащих реакции типа $a + b \to 1+2+3+\ldots$, получаются очевидным обобщением перечисленных в [9] симметрий (для каскадов бинарных реакций, т.е. типа $a + b \to 1+2$).

Рукопись поступила в издательский отдел
9 ноября 1960 года.

Литература

1. Чжоу Гуан-чжао. ЖЭТФ, 36, 909, 1959.
2. M.Jacob and G.C.Wick. Annals of Physics, 7, 404, 1959.
3. М.И. Широков. ЖЭТФ, 39, 633, 1960.
4. E.Fabri. Nuovo Cimento, 9, 479, 1954.
5. R.H.Dalitz. Phys.Rev. 94, 1046, 1954.
6. М.И.Широков. ЖЭТФ, 32, 1022, 1957.
7. C.Möller. The Theory of Relativity. Oxford, 1952.
8. Чжоу Гуан-чжао и М.И.Широков. ЖЭТФ, 34, 1230, 1958.
   Ю.М. Широков. ЖЭТФ, 35, 1005, 1958.
9. М.И.Широков. ЖЭТФ, 36, 1524, 1959.
10. P.G.Sona. Nuovo Cimento. 9, 334, 1958.