ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Фан Шоу-сянь

Р-622

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ИЗОХРОННОМ ЦИКЛОТРОНЕ С УЧЕТОМ УСКОРЕНИЯ

Дубна 1960 год

Фан Шоу-сянь

Р-622

9178 48

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ИЗОХРОННОМ ЦИКЛОТРОНЕ С УЧЕТОМ УСКОРЕНИЯ

Как известно[1],[2], при рассмотрении бетатронных колебаний в циклических ускорителях пренебрегают изменением энергии частиц, которое определяется ускоряющим электрическим полем. Это пренебрежение справедливо только в том случае, когда относительный прирост энергии и радиуса орбиты за одно бетатронное колебание малы. Ясно, что в начале движения такое рассмотрение несправедливо.

Рассмотрим движение заряженной частицы в магнитном поле.

Система уравнений движения с учетом ускорения в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\dot m}{m}\dot r + \ddot r - r\dot\varphi^2 = -\frac{e}{mc}\left(r\dot\varphi H_z - \dot z H_\varphi\right), \\
&\frac{\dot m}{m} r\dot\varphi + r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = -\frac{e}{mc}\left(\dot r H_z - \dot z H_r\right) - \frac{e}{m}\mathcal{E}, \\
&\frac{\dot m}{m}\dot z + \ddot z = \frac{e}{mc}\left(r\dot\varphi H_r - \dot r H_\varphi\right),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\mathcal{E}$ - напряженность электрического поля.

Так как $\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2 = v^2$, то можно перейти к независимой переменной

$$\varphi = \int^t \frac{v}{\sqrt{r^2 + r'^2 + z'^2}}\,dt,$$

используя соотношения

$$(\dot\varphi)' = \frac{v'}{\sqrt{r^2 + r'^2 + z'^2}} - \frac{v\left(r'r'' + rr' + z'z''\right)}{\sqrt{\left(r^2 + r'^2 + z'^2\right)^3}} \quad \text{и} \quad \frac{m'}{m} = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\frac{v'}{v}.$$

Из (1) получим:

$$
\begin{aligned}
r''\left(1 + \frac{z'^2}{r^2}\right) - 2\frac{r'^2}{r} - r = &-\frac{e}{mcv}\frac{\sqrt{\left(r^2 + r'^2 + z'^2\right)^3}}{r^2}\left(rH_z - z'H_\varphi\right) + \\
&+ \frac{z'^2}{r} + \frac{r'z'}{r^2}z'' - \frac{v'}{v}\frac{1}{1-\beta^2}r'\frac{r^2 + r'^2 + z'^2}{r^2},
\end{aligned}
\tag{2a}
$$

$$z''\left(1+\frac{r'^2}{r^2}\right)-\frac{z'r'}{r}-\frac{z'r'}{r^2}\,r''=-\frac{e}{mcv}\,\frac{\sqrt{(r^2+r'^2+z'^2)^3}}{r^2}\left(r'H_\varphi-rH_z\right)-$$
$$-\frac{v'}{v}\,\frac{1}{1-\beta^2}\,z'\,\frac{r^2+r'^2+z'^2}{r^2} \qquad (2б)$$

Рассмотрим случай плоского движения:

$$r''-2\frac{r'^2}{r}-r=-\frac{e}{mcv}\,r^2\left(1+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{3/2}H_z(r,\varphi)-\frac{v'}{v}\,\frac{1}{1-\beta^2}\,r'\left(1+\frac{r'^2}{r^2}\right). \qquad (3)$$

Из (3) следует, что пренебрежение эффектом ускорения возможно только тогда, когда имеет место неравенство

$$\frac{\dfrac{e}{mcv_0}\,r^2\left(1+\dfrac{r'^2}{r^2}\right)^{3/2}H_z(r,\varphi)}{\dfrac{e}{mcv_0}\,\dfrac{v'}{v_0}\,\varphi\,r^2\left(1+\dfrac{r'^2}{r^2}\right)^{3/2}H_z(r,\varphi)+\dfrac{v'}{v}\,\dfrac{1}{1-\beta^2}\,r'\left(1+\dfrac{r'^2}{r^2}\right)}\gg 1. \qquad (4)$$

Так как

$$\frac{\dfrac{e}{mcv_0}\,\dfrac{v'}{v_0}\,\varphi\,r^2\left(1+\dfrac{r'^2}{r^2}\right)^{3/2}H_z(r,\varphi)}{\dfrac{v'}{v}\,\dfrac{1}{1-\beta^2}\,r'\left(1+\dfrac{r'^2}{r^2}\right)}\simeq\frac{r\varphi}{r'}\gg 1, \qquad (5)$$

то из (4) получим: $\frac{v'}{v}\varphi \ll 1$

или $$\frac{1}{2}\,\frac{E_k'}{E_k}\,\varphi \ll 1. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что рассмотрение бетатронных колебаний в циклотроне без учета электрического поля возможно только, если $E_k \gg 1$ Мэв при $E_k' \simeq \frac{0.2}{2\pi}$ Мэв, $\varphi=\frac{2\pi}{Q_\rho}$, где Q_ρ – частота бетатронных колебаний, то есть в центральной области ($r < 20$ см) необходимо учитывать ускорение. Из (5) следует также, что в процессе прохождения частицы через области резонансов достаточно учитывать только член

$$-\frac{e}{mcv_0}\frac{v'}{v_0}\varphi r^2\left(1+\frac{r'^2}{r^2}\right)^{3/2}H_z(r,\varphi) .$$

Если $v'\neq 0$, то траектория частицы близка к развертывающейся спирали, и можно рассмотреть бетатронные колебания относительно спиральной орбиты. После замены переменной

$$r(\varphi)=R(\varphi)\frac{v(\varphi)}{v_0}+\rho(\varphi) ,$$

где $R(\varphi)$ – радиус замкнутой орбиты, $\rho(\varphi)$ – величины бетатронных колебаний вокруг орбиты $R(\varphi)\frac{v(\varphi)}{v_0}$, при выполнении условий $\left(\frac{v'}{v}\right)^2\ll 1$, $\frac{v''}{v}\ll 1$, получаем следующее уравнение

$$R''-\frac{v'}{v}R'-R-2\frac{R'^2}{R}=-\frac{e}{mcv_0}\left(1+\frac{R'^2}{R^2}+2\frac{v'}{v}\frac{R'}{R}\right)^{3/2}R^2H_z(R,\varphi) . \qquad (7)$$

Ясно, что если H_z не зависит от φ, то замкнутой орбитой будет окружность радиуса $R(\varphi)=R_0=\frac{eH_z(R_0)}{mcv_0}=const.$

Если H_z зависит от φ и имеет вид

$$H_z(r,\varphi)=\frac{H_{z0}}{\sqrt{1-\frac{r^2}{r_\infty^2}}}\left(1+\varepsilon\sin\left(\frac{r}{\lambda}-N\varphi\right)\right) ,$$

то полагая $R(\varphi)=R_0+\rho_3(\varphi)$ и пренебрегая членами порядка ρ_3^2/R_0^2, $\rho_0^2v'^2/\lambda^2v_0^2$ ...., получим уравнение для $\rho_3(\varphi)$.

$$\rho_3''+2\frac{v'}{v}\rho_3'+\left(1+n+\varepsilon R_0\frac{v}{v_0}\cos\left(\frac{R_0}{\lambda}-N_э\varphi\right)+\varepsilon(2+n)\sin\left(\frac{R_0}{\lambda}-N_э\varphi\right)\right)\rho_3=-\varepsilon R_0\sin\left(\frac{R_0}{\lambda}-N_э\varphi\right), \qquad (8)$$

где $N_э=N-\frac{v'}{v_0}$ – соответствует эффективному числу спиралей.

Если

$$\frac{v'}{v}\varphi\ll 1 , \qquad (8a)$$

то вынужденные колебания имеют вид

$$\rho_3\simeq\frac{\varepsilon R_0}{N_э^2-(1+n)}\sin\left(\frac{R_0}{\lambda}-N_э\varphi\right)-\frac{\varepsilon^2R_0(2+n)}{2(1+n)[N_э^2-(1+n)]}-\frac{\varepsilon^2R_0\left[\left(\frac{R_0}{\lambda}\right)^2+(2+n)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2[N_э^2-(1+n)][4N_э^2-(1+n)]}\cos\left(2\left(\frac{R_0}{\lambda}-N_э\varphi\right)+\varphi_0\right). \qquad (9)$$

Неравенство (8а) показывает, что результаты, полученные нами из уравнения без учета ускорения, справедливы только в случае $E_к \gg 1$ $мэв$ /1/. Однако для азимутально-симметричного поля такого ограничения нет.

Теперь рассмотрим бетатронные колебания вокруг этой орбиты. Уравнение для радиальных колебаний имеет вид:

$$\rho'' + \Big[(1+n) + \frac{\varepsilon R_0}{\lambda}\frac{v}{v_0}\cos\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) + \varepsilon(2+n)\sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) + 2(1+2n+n_1)\frac{\rho_3}{R_0} + (4+3n)\frac{v'}{v}\frac{\rho_3'}{R_0} -$$

$$- \frac{\varepsilon R_0}{\lambda}\left(\frac{v}{v_0}\right)^2\rho_3 \sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) + 2(2+n)\varepsilon\rho_3\frac{v}{v_0}\cos\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) + \frac{2\varepsilon(1+2n+n_1)}{R_0}\rho_3 \sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right)\Big]\rho +$$

$$+ \Big[(4+3n)\frac{v'}{v}\frac{\rho_3}{R_0} - \frac{\rho_3'}{R_0} + 3\varepsilon\frac{\rho_3'}{R_0}\sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right)\Big]\rho' = -(1+2n+n_1)\frac{\rho^2}{R_0\frac{v}{v_0}} + \frac{1}{2}\frac{\rho'^2}{R_0\frac{v}{v_0}} - \tag{10a}$$

$$- (4+3n)\frac{v'}{v}\frac{\rho\rho'}{R_0\frac{v}{v_0}} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon R_0}{\lambda^2}\frac{v}{v_0}\rho^2\sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) - \frac{\varepsilon(2+n)}{\lambda}\rho^2\cos\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) + \dots$$

$$+ \dots$$

Для вертикальных колебаний:

$$z'' - \Big[n + n\varepsilon\sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) + \frac{\varepsilon R_0}{\lambda}\frac{v}{v_0}\cos\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) + \frac{2}{R_0}(n+n_1)\rho_3 + \frac{2}{R_0}(n+n_1)\rho_3\sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) +$$

$$+ (2+n)\varepsilon\frac{\rho_3}{\lambda}\frac{v}{v_0}\cos\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) - \frac{\varepsilon R_0\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}{\lambda^2}\rho_3\sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right) + \left(\frac{v'}{v} + \frac{\rho_3'}{R_0}\right)\varepsilon N\cos\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right)\Big]z - \tag{10б}$$

$$- \frac{1}{R}\left(1 - \varepsilon\sin\left(\frac{R_0}{\lambda} - N_3\varphi\right)\right)\rho_3' z' = 0.$$

Из этих уравнений можно сделать следующие выводы:

1. В линейном приближении уравнения не содержат членов, которые указывают на процесс затухания колебаний при увеличении энергии частиц. Это объясняется тем, что известный процесс затухания[x/] компенсируется в циклотроне удлинением равновесной орбиты.

[x/] Это затухание играет существенную роль в синхротроне и синхрофазотроне /2/.

2. Если $\mathcal{E} = 0$, то из линейного приближения (10а), (10б) следует, что бетатронные колебания (вокруг спиральной орбиты) не зависят от скорости увеличения энергии. Учитывая это можно приближенно оценить величину амплитуды бетатронных колебаний при дискретном наборе энергии. В момент прохождения через зазор между дуантами частицы получают энергию, при этом $\Delta z = 0$, $\Delta z' = R_0 \frac{v'}{v}$, то есть $\Delta \rho = -R_0 \frac{\Delta v}{v_0}$, $\Delta \rho' = 0$. После "ν" прохождений через зазор увеличение амплитуды можно найти из выражения:

$$\begin{pmatrix} \rho_\nu \\ \rho'_\nu \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \cos \pi Q_{\rho\nu} & \frac{1}{Q_{\rho\nu}} \sin \pi Q_{\rho\nu} \\ -Q_{\rho\nu} \sin \pi Q_{\rho\nu} & \cos \pi Q_{\rho\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{\nu-1} \\ \rho'_{\nu-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \rho_\nu \\ \Delta \rho'_\nu \end{pmatrix} , \tag{11}$$

где $\Delta \rho_\nu \simeq -R_0 \frac{\Delta v}{v_\nu} \simeq -R_\infty \sqrt{\frac{\Delta E_k}{2E_0}} \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $R_\infty = \frac{c}{\omega_0}$,

ω_0 - частота обращения частицы.

Из (11) получим $\rho_\nu \simeq R_\infty \sqrt{\frac{\Delta E_k}{2E_0}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right)$, то есть для циклотрона $R_\infty \simeq$ 500 см, ΔE_k = 50 кв, $\rho_\infty \simeq$ 1 см.

В заключение выражаю благодарность В.П.Дмитриевскому за руководство и ценные обсуждения этих вопросов.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 октября 1960 года.

Цитированная литература

1. Д.П.Василевская, А.А.Глазов, В.И.Данилов, Ю.Н.Денисов, В.П.Джелепов, В.П.Дмитриевский, Б.И.Замолодчиков, Н.Л.Заплатин, В.В.Кольга и др. "Циклотрон с пространственной вариацией напряженности магнитного поля", препринт ЛЯП ОИЯИ (1959).

2. Bohm Dand Folgy L. "Теория синхротрона". Phys.Rev. 70,249(1946).