



М.И.Подгорецкий, И.И.Ройзен

P-546

СИГНАЛЬНЫЙ ЭКЗЕМПЛЯР

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЯДРА
В ПРИСУТСТВИИ НЕВОЗБУЖДЕННЫХ
ЯДЕР ТОГО ЖЕ ТИПА

Дубна 1960 год

М.И.Подгорецкий, И.И.Ройзен

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЯДРА
В ПРИСУТСТВИИ НЕВОЗБУЖДЕННЫХ
ЯДЕР ТОГО ЖЕ ТИПА

Направлено в ЖЭТФ

А н н о т а ц и я

Рассмотрен вопрос об излучении возбужденного осциллятора в присутствии таких же невозбужденных осцилляторов, находящихся от него на расстоянии много больше длины излучаемой волны. Показано, что в этом случае основная частота и затухание могут либо расщепиться, как, например, в случае, когда имеется всего два осциллятора, либо могут стать функциями угла, под которым производится наблюдение, как, например, в случае достаточно длинной линейной цепочки осцилляторов. Обсуждается вопрос о влиянии этого фактора на излучение ядра, входящего в состав кристалла.

Podgoretsky M.J., Roysen J.J.

1. Как хорошо известно из радиоспектроскопии и оптики [1,2], наличие вблизи возбужденного излучателя других таких же излучателей приводит к явлению перекачки энергии между ними, что отражается на характере излучения всей системы в целом. С квантовой точки зрения это явление связано с возможностью "блуждания" возбуждения внутри системы одинаковых излучателей. Аналогичные явления должны, по-видимому, возникать и при излучении γ -квантов возбужденными ядрами, если вблизи них находятся невозбужденные ядра того же типа, входящие, например, в состав молекулы или кристалла.

В настоящей работе предполагается, что ядра можно рассматривать как изотропные классические осцилляторы^{x/}, поскольку квантовое и классическое рассмотрение задачи об излучении осциллятора приводят обычно к одинаковым результатам. Для простоты будем считать, что речь идет об электрическом дипольном излучении. Рассмотрение остается справедливым также для магнитного дипольного излучения, а в общих чертах - и для излучения более высокой мультипольности.

2. Вначале рассмотрим задачу об излучении ядра, входящего в состав симметричной двухатомной молекулы, ось которой фиксирована в пространстве. Предполагается, что расстояние между ядрами a много больше длины волны λ , излучаемой свободным ядром, следовательно, интересующая нас связь между ними осуществляется только через поле излучения в волновой зоне^{xx/}.

Легко написать в этом случае систему уравнений, определяющую поле излучения такой молекулы в точке, находящейся далеко от нее, под углом ϑ к ее оси, которая считается направленной от осциллятора с дипольным моментом P_0 к осциллятору с моментом P_1 :

^{x/} В тех случаях, когда квантовые эффекты кажутся существенными, они будут специально обсуждены. В частности, следует подчеркнуть, что изотропному классическому осциллятору соответствуют ядра, имеющие в основном состоянии спин нуль.

^{xx/} Строго говоря, величина a не является полностью фиксированной из-за квантовой неопределенности положения ядер в молекуле. Легко видеть, что для ядер с атомным весом $A \sim 100$ эта неопределенность порядка 10^{-10} см. Поэтому при $\lambda \gg 10^{-10}$ см величину a можно считать фиксированной.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{P}_0(t) + \beta \ddot{P}_1(t - \frac{a}{c}) + 2\gamma \dot{P}_0(t) + \omega^2 P_0(t) &= 0 \\ \ddot{P}_1(t) + \beta \ddot{P}_0(t - \frac{a}{c}) + 2\gamma \dot{P}_1(t) + \omega^2 P_1(t) &= 0 \\ E(\vec{R}_0, t) \sim \frac{1}{R_0 c^2} \left[\ddot{P}_0(t - \frac{R_0}{c}) + \ddot{P}_1(t - \frac{R_0}{c} + \frac{a \cos \vartheta}{c}) \right] \end{aligned} \right\} (1)$$

где $\gamma = \frac{1}{2\tau}$, τ - среднее время жизни, $\beta = \frac{3}{4\pi} \frac{\lambda}{a} \frac{\gamma}{\omega}$, а расстояние \vec{R}_0 отсчитывается от P_0 . Здесь мы для простоты считаем, что излучение поляризовано в плоскости, перпендикулярной оси молекулы ^{x/}.

При выводе уравнений (1) предполагалось, что осцилляторы неподвижны друг относительно друга. С квантовой точки зрения это означает, что в процессе обмена возбуждением между ядрами не может изменяться колебательное состояние молекулы. Последнее условие будет выполнено, если энергия отдачи при излучении кванта ядром меньше расстояния между соседними колебательными уровнями $\hbar\omega_{\text{кол}}$, т.е.

$$\frac{(\hbar\omega)^2}{Amc^2} \ll \hbar\omega_{\text{кол}}, \quad (2)$$

где M - масса нуклона. Обычно $\hbar\omega_{\text{кол}} \gtrsim 0,3 \text{ eV}$, так что (2) выполняется при $\hbar\omega \ll 0,1 \text{ mev}$, если $A \sim 100$.

Зададим следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} P_k(t) = \dot{P}_k(t) &\equiv 0 \quad \text{при } t < 0, \\ P_k(0) = A\delta_{k0}, \quad \dot{P}_k(0) &= 0, \quad k = 0, 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Переходя в системе (1) с учетом начальных условий (3) к лапласовским образам $P_k(q)$ и разрешая получающуюся систему алгебраических уравнений относительно их суммы и разности, получим:

^{x/} Поляризация вдоль оси не приводит, как легко видеть, к интересующему нас взаимодействию и потому не рассматривается.

$$P_0(q) + P_1(q) = A \frac{q + 2\gamma + \beta q \exp(-\frac{qa}{c})}{q^2 [1 + \beta \exp(-\frac{qa}{c})] + \omega^2 + 2\gamma q} \quad (4a)$$

и

$$P_0(q) - P_1(q) = A \frac{q + 2\gamma - \beta q \exp(-\frac{qa}{c})}{q^2 [1 - \beta \exp(-\frac{qa}{c})] + \omega^2 + 2\gamma q} \quad (4b)$$

где

$$P_k(q) = \int_0^{\infty} \exp(-qt) P_k(t) dt, \quad k=0,1. \quad (5)$$

Если q_i и q_j простые корни^{x/} знаменателей соответственно в /4a/ и /4b/, то в их окрестности (4a) и (4b) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} P_0(q) + P_1(q) &= A \frac{\frac{\omega^2}{q_i}}{[2 \frac{\omega^2}{q_i} + 2\gamma + \beta q_i^2 \frac{a}{c} \exp(-\frac{q_i a}{c})] (q - q_i)} \\ P_0(q) - P_1(q) &= A \frac{\frac{\omega^2}{q_j}}{[2 \frac{\omega^2}{q_j} + 2\gamma - \beta q_j^2 \frac{a}{c} \exp(-\frac{q_j a}{c})] (q - q_j)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Переходя теперь обратно к $P_k(t)$ с помощью обычной формулы:

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \exp(qt) P_k(q) dq, \quad (7)$$

где $\sigma > 0$

получим:

$$P_0(t) + P_1(t) = A \sum_i \frac{\frac{\omega^2}{q_i} \exp(q_i t)}{2 \frac{\omega^2}{q_i} + 2\gamma + \beta q_i^2 \frac{a}{c} \exp(-\frac{q_i a}{c})} \quad (8)$$

$$P_0(t) - P_1(t) = A \sum_j \frac{\frac{\omega^2}{q_j} \exp(q_j t)}{2 \frac{\omega^2}{q_j} + 2\gamma - \beta q_j^2 \frac{a}{c} \exp(-\frac{q_j a}{c})}$$

^{x/} Легко видеть, что в интересующем нас случае, когда $\frac{a}{\lambda} \gg 1$, кратных корней нет.

Поскольку q_i и q_j , вообще говоря, комплексные числа, представим их в виде:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= \gamma_i + i\omega_i \\ q_j &= \gamma_j + i\omega_j \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Предполагая, как обычно, что $|\omega_i|$ и $|\omega_j|$ мало отличаются от ω и учитывая, что $\delta/\omega \ll 1$, получим с точностью до величин первого порядка по δ/ω , δ_i/ω_i , δ_j/ω_j следующие уравнения для определения ω_i , ω_j , γ_i , γ_j :

$$\omega^2 - \omega_i^2 \left[1 + \beta \cos \frac{\omega_i a}{c} \right] = 0 \quad (10a)$$

$$\omega^2 - \omega_j^2 \left[1 - \beta \cos \frac{\omega_j a}{c} \right] = 0 \quad (10б)$$

$$\gamma_i = -\gamma - \frac{1}{2} \beta \omega_i \sin \frac{\omega_i a}{c} \quad (10в)$$

$$\gamma_j = -\gamma + \frac{1}{2} \beta \omega_j \sin \frac{\omega_j a}{c} \quad (10г)$$

Нетрудно показать, что при выполнении естественного условия

$$\frac{\omega a \beta}{2c} < 1$$

каждое из уравнений (10a) и (10б) может иметь только по два, отличающихся лишь знаком, корня, которые с точностью до малых первого порядка по указанным выше параметрам, равны:

$$\omega_i = \pm \omega \left(1 - \frac{1}{2} \beta \cos \frac{\omega a}{c} \right) \quad (11a)$$

$$\omega_j = \pm \omega \left(1 + \frac{1}{2} \beta \cos \frac{\omega a}{c} \right). \quad (11б)$$

Подставляя (11a) и (11б) соответственно в (10в) и (10г), находим

$$\gamma_i = -\gamma - \frac{1}{2} \beta \omega \sin \frac{\omega a}{c} < 0 \quad (11в)$$

$$\gamma_j = -\gamma + \frac{1}{2} \beta \omega \sin \frac{\omega a}{c} < 0. \quad (11г)$$

Таким образом, окончательно, из (8) и (11а, б, в, г), получаем

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= \frac{A}{2} [\cos(\omega_i t) \exp(-|\gamma_i|t) + \cos(\omega_j t) \exp(-|\gamma_j|t)] \\ P_1(t) &= \frac{A}{2} [\cos(\omega_i t) \exp(-|\gamma_i|t) - \cos(\omega_j t) \exp(-|\gamma_j|t)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подставляя (12) в выражение для напряженности поля E , видим, что возникает довольно сложная, зависящая от времени, картина; в частности, кривая распада оказывается неэкспоненциальной и становится таковой только по истечении времени

$$\tau' > \frac{2}{|\gamma_i - \gamma_j|}.$$

Соответствующая константа распада меньше γ на величину

$$\frac{\beta\omega}{2} \sin \frac{\omega a}{c} = \left(\frac{3}{8\pi} \frac{\lambda}{a} \sin \frac{\omega a}{c} \right) \gamma.$$

Очевидно, что для этих выводов несущественно исходное предположение о фиксированности положения оси молекулы в пространстве.

3. Для того, чтобы получить представление об излучении возбужденного ядра, входящего в состав кристалла, мы рассмотрим сначала вспомогательную задачу об излучении осциллятора, входящего в состав одномерной цепочки с периодом a . Как будет видно из дальнейшего, в этой задаче уже содержатся все характерные черты, присущие излучению кристалла. Вместе с тем она может быть решена до конца в аналитическом виде.

Для того, чтобы найти поле излучения в некоторой точке, нам необходимо знать функцию:

$$F(t) = \sum_k \frac{1}{R_k} P_k \left(t - \frac{R_k}{c} \right), \quad (13)$$

где R_k - расстояние от этой точки до $k^{\text{го}}$ осциллятора, а суммирование производится по всем осцилляторам цепочки. Легко видеть, что для определения P_k получается следующая система уравнений:

$$\ddot{P}_k \left(t - \frac{R_k}{c} \right) + \beta \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} \ddot{P}_{k+n} \left(t - \frac{a|n|}{c} - \frac{R_k}{c} \right) + 2\gamma \dot{P}_k \left(t - \frac{R_k}{c} \right) + \omega^2 P_k \left(t - \frac{R_k}{c} \right) = 0 \quad (14)$$

с начальными условиями, аналогичными (3). Из (13) и (14) для функции $F(t)$ получаем уравнение:

$$\ddot{F}(t) + \beta \sum_k \sum_{n \neq 0} \frac{1}{R_k |n|} \ddot{P}_{k+n} \left(t - \frac{a|n|}{c} - \frac{R_k}{c} \right) + 2\gamma \dot{F}(t) + \omega^2 F(t) = 0. \quad (15)$$

В случае, когда расстояние до точки наблюдения много больше длины цепочки, уравнение (15) можно переписать в виде:

$$\ddot{F}(t) + \frac{\beta}{R_0} \sum_k \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} \ddot{P}_{k+n} \left(t - \frac{a|n|}{c} + \frac{b_k}{c} \right) + 2\gamma \dot{F}(t) + \omega^2 F(t) = 0, \quad (15a)$$

где $b = a \cos \vartheta$, а ϑ - угол между \vec{R}_0 и осью цепочки, которая считается направленной в сторону положительных индексов "к". Если по обе стороны осциллятора P_0 находится достаточно много других осцилляторов, то мы сделаем малую ошибку, распространив в (13) - (15a) суммирование в обе стороны до бесконечности^{x/}. Поменяв, далее, в (15a) порядок суммирования по "к" и "n", сможем записать уравнение (15a) для $F(t)$ в замкнутом виде:

$$\ddot{F}(t) + \beta \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|n|} \ddot{F} \left(t - \frac{a|n| + b_n}{c} \right) + 2\gamma \dot{F}(t) + \omega^2 F(t) = 0 \quad (16)$$

с начальными условиями:

$$F(t) = \dot{F}(t) \equiv 0 \quad \text{при } t < 0,$$

$$F(0) = A, \quad \dot{F}(0) = 0. \quad (17)$$

Действуя теперь так же, как в случае двух осцилляторов, получим:

$$f(q) = A \frac{q \left\{ 1 - \beta \ln \left[1 - \exp(-q \frac{a+b}{c}) \right] \left[1 - \exp(-q \frac{a-b}{c}) \right] \right\} + 2\gamma}{q^2 \left\{ 1 - \beta \ln \left[1 - \exp(-q \frac{a+b}{c}) \right] \left[1 - \exp(-q \frac{a-b}{c}) \right] \right\} + \omega^2 + 2\gamma q}. \quad (18)$$

После простых, но громоздких вычислений получим следующий результат:

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \pm \omega \left\{ 1 + \frac{\beta}{4} \ln \left[4 \sin^2 \frac{\omega(a+b)}{2c} + \frac{\gamma_i^2 (a+b)^2}{c^2} \right] \left[4 \sin^2 \frac{\omega(a-b)}{2c} + \frac{\gamma_i^2 (a-b)^2}{c^2} \right] \right\} \\ \gamma_i &= -\gamma + \frac{1}{4} \omega \beta \left\{ \left[(2n_1 + 1)\pi - \frac{\omega(a+b)}{c} \right] + \left[(2n_2 + 1)\pi - \frac{\omega(a-b)}{c} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

^{x/} Можно показать, что такое упрощение заведомо возможно при выполнении условия $1 \pm \cos \vartheta \gg 2\pi\gamma/\omega$, которое нарушается только для углов ϑ чрезвычайно близких к $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$

Здесь n_1 и n_2 - целые числа, которые должны быть выбраны так, чтобы выражения в квадратных скобках (19) не превышали по модулю π .

При выводе (19) предполагалось, что (18) имеет единственный полюс. Это справедливо при выполнении естественного условия

$$\frac{\beta \omega}{2\gamma} < 1.$$

Формулы (19) получены с точностью до членов первого порядка по величинам $\frac{\gamma}{\omega}$

Из них следует, что решение уравнения (16) имеет вид:

$$F(t) \sim A \exp(-|\gamma_i| t) \cos |\omega_i| t. \quad (20)$$

Таким образом, оказывается, что под каждым углом ϑ имеется своя частота $\omega_i(\vartheta)$ и затухание $\gamma_i(\vartheta)$. Интересно отметить, что характер зависимости ω_i и γ_i от ϑ напоминает распределение интенсивности в случае дифракции на одномерной решетке. Изменение частоты

$$\Delta\omega = |\omega - \omega_i| \sim \omega \frac{\beta}{4} = \frac{3}{16\pi} \frac{\lambda}{a} \gamma. \quad (21)$$

Однако вблизи углов ϑ , для которых

$$\sin \frac{\omega_i(a \pm b)}{2c} \sim 0$$

величина его становится значительно больше. Из (19) получаем, что

$$\max |\gamma_i| - \gamma \sim \frac{3}{8} \frac{\lambda}{a} \gamma, \quad (22)$$

т.е. изменение затухания может становиться весьма существенным. С течением времени излучение остается только под теми углами, которым соответствуют минимальные затухания.

4. Сделаем, наконец, несколько качественных замечаний, относящихся к кристаллу с кубической решеткой. В этом случае можно написать систему для \vec{P}_k (теперь уже поляризация существенна), аналогичную (14) с начальными условиями,

аналогичными (3). Если ввести функцию $\vec{X}(t)$, полностью аналогичную функции $F(t)$ в (13), то при тех же упрощающих предположениях можно для нее получить следующее уравнение (\vec{m} определяет направление на точку наблюдения, $|\vec{m}|=1$):

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{X}}(t) + \beta \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{1}{|\vec{k}|} \ddot{\vec{X}} \left[t - \frac{a}{c} (|\vec{k}| + \vec{k} \vec{m}) \right] - \\ - \beta \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|^3} \left(\vec{k}, \ddot{\vec{X}} \left[t - \frac{a}{c} (|\vec{k}| + \vec{k} \vec{m}) \right] \right) + 2\gamma \dot{\vec{X}}(t) + \omega^2 \vec{X}(t) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) = \dot{\vec{X}}(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0 \\ \vec{X}(0) = \vec{A}, \quad \dot{\vec{X}}(0) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Точное решение (23) в аналитическом виде найти не удастся, однако, сходство уравнений (16) и (23) дает основание ожидать, что решения их будут, в основном, также сходными, т.е. что излучение ядра, входящего в состав кристалла, характеризуется частотами и соответствующими затуханиями, зависящими от направления.

Для того, чтобы проведенное рассмотрение соответствовало действительности, достаточно, чтобы в процессе обмена возбуждением между ядрами не изменялось внутреннее состояние кристалла^{х/}. Поэтому описанное изменение частоты, в принципе, может быть наблюдеено с помощью методики, предложенной Моссбауэром [2, 3].

Авторы выражают благодарность В.И.Огиевскому, В.М.Файну, Я.И.Ханину, Д.С.Чернавскому и Ф.Л.Шапиро за участие в обсуждении работы и существенные замечания.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 мая 1960 года.

^{х/} В случае молекулы аналогичное требование связано с выполнением условия (2).

Л и т е р а т у р а

1. R.H. Dicke, Phys.Rev. 93, 99 (1954).
2. Э.М. Файн, УФН, 64, 273 (1958).
3. R.L. Mossbauer, Zs. Phys. 151, 124 (1958).
4. R.L. Mossbauer, Zs. Naturforsch. 14a 211 (1959).