ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ф. Кашлун

Р-517

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ УСЛОВИИ И УСЛОВИИ ПРИЧИННОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

II

Nuovo Cim., 1960, v17, n4, p609.

Дубна 1960 год

Р-517

Ф. Кашлун

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ УСЛОВИИ И УСЛОВИИ ПРИЧИННОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

11

Выводы, полученные в недавней работе, о связи между подходом к квантовой теории поля методом Леманна, Симанзика и Циммермана с использованием оператора взаимодействующего поля и подходом к квантовой теории поля методом Боголюбова с применением функционального дифференцирования излагаются в данной работе более подробно. В частности, показано, что условие причинности Боголюбова является необходимым условием интегрируемости для запаздывающего и опережающего решений неоднородного уравнения Кляйна-Гордона. В связи с этим довольно подробно рассматривается тот факт /связанный с теоремой Хаага/, что трансформационный оператор, который связывает оператор взаимодействующего поля со свободными операторами *in* или *out* -поля может быть унитарным только с точностью до положительной постоянной перенормировки, меньшей единицы для реальных взаимодействий. Далее мы обсуждаем различия, существующие между двумя подходами относительно экстраполяции приведенных элементов S -матрицы на область вне оболочки массы. В заключение мы показываем, что для аналитического поведения приведенных элементов S - матрицы в подходе с использованием оператора взаимодействующего поля, рассмотренного в теории дисперсионных соотношений, неважно, выполняется или не выполняется условие причинности для оператора взаимодействующего поля в виде коммутатора.

1. Введение

В недавней работе[1] мы изучили /на предварительном этапе/ связь между подходом к квантовой теории поля методом Леманна, Симанзика, Циммермана[2] с использованием оператора взаимодействующего поля и подходом к квантовой теории поля методом Боголюбова[3] с применением функционального дифференцирования. Эквивалентность между двумя подходами, в основном, не является очевидной, так как оба подхода исходят из соображений общей теории поля /теории S -матрицы, в которой выводятся приведенные формулы для элементов S - матрицы путем разных математических методов: первый использует операторы взаимодействующего поля как запаздывающие или опережающие решения неоднородного уравнения Кляйна-Гордона и асимптотическое условие, тогда как последний полностью отбрасывает предыдущее и имеет дело лишь с данной S -матрицей, как функционалом свободных операторов *in* или *out* - поля и ее вариационными производными относительно этих операторов свободного поля. Причинные теории поля рассматриваются как особые случаи общей теории, ограниченные требованием причинности. Однако, условие причинности, предполагающее в первом подходе, что коммутатор оператора взаимодействующего поля должен исчезать для пространственно подобных расстояний соответствующих точек пространства-времени, сформулировано во втором подходе следующим образом: оператор тока /2/, построенный из S - матрицы и ее вариационной производной относительно свободного оператора *in* или *out* поля, должен иметь запаздывающие или опережающие свойства /8/,/8'/ для вариационной производной относительно свободного оператора *in* или *out* -поля соответственно. Последнее условие /в противоположность первому/ включает, очевидно, также время-различающее условие причинности для времени-подобных расстояний соответствующих точек пространства-времени, которое должно быть необходимым для определения "причинности" с физической точки зрения. С другой стороны, требуемое условие причинности для оператора взаимодействующего поля в виде коммутатора предполагает существование последнего как запаздывающие или опережающие решения неоднородного уравнения Кляйна-Гордона, а явное отсутствие время-различающего условия причинности для времени-подобных расстояний могло бы быть преодолено тем, что оператор взаимодействующего поля, построенный вышеуказанным способом существует только для теории поля, которые являются причинными, в том смысле, в котором их рассматривает Боголюбов /по крайней мере, мы требуем условия коммутации для оператора взаимодействующего поля/. Однако, из данной работы станет ясным, что в действительности условие коммутации для оператора взаимодействующего поля, в противоположность условию Боголюбова, не может рассматриваться как условие на приведенные элементы S -матрицы, которое важно для их аналитического поведения по теории дисперсионных соотношений /как это считалось прежде/.

Настоящая работа посвящена основательному исследованию выводов, полученных в 1, а именно, что 1/ подход с использованием оператора взаимодействующего поля имеет силу для причинных теорий поля /в противоположность утверждению в[2]/ и 2/ условие причинности для оператора взаимодействующего поля в виде коммутатора не может быть достаточным для общего подхода к квантовой теории поля, как это имеет место в теории дисперсионных соотношений. Прежде всего мы покажем, что условие причинности по Боголюбову является необходимым условием интегрируемости для запаздывающих или опережающих решений неоднородного уравнения Кляйна-Гордона /раздел 2/. В этом смысле подход с использованием оператора взаимодействующего поля предполагает условие причинности по Боголюбову, и если последнее учитывается, мы не ожидаем принципиальных трудностей в применении асимптотического условия /ср. также [4] и раздел 4/. В связи с этим мы рассматриваем подробно тот факт, связанный с теоремой Хаага, что трансформационный оператор, который связывает оператор взаимодействующего поля $\varphi(x)$ со свободным оператором $\varphi_{\substack{in\\out}}(x)$ in или out - поля может быть унитарным только с точностью до положительной постоянной перенормировки, меньшей единицы для реальных взаимодействий локального типа. Отмечается его влияние на перестановочные соотношения операторов свободного поля. Далее мы обсудим различия, существующие между подходом и использованием оператора взаимодействующего поля с подходом с применением функционального дифференцирования относительно экстраполяции приведенных элементов S -матрицы на область вне оболочки массы / по теории дисперсионных соотношений; раздел 3/. В заключение мы показываем, что для аналитического поведения приведенных элементов S -матрицы в подходе с использованием оператора взаимодействующего поля по теории дисперсионных соотношений не важно выполняется или не выполняется условие причинности для оператора взаимодействующего поля в виде коммутатора /раздел 4/. Это означает, что условие коммутации для оператора взаимодействующего поля не может толковаться как условие на приведенные элементы S -матрицы, из которого вытекают некоторые аналитические следствия для теории дисперсионных соотношений, но что свойства причинности оператора взаимодействующего поля принимаются априорно при выводе приведенной формулы /вероятно, путем использования асимптотического условия/. В этом смысле мы должны понять указание 2 в 1.

2/ Условие причинности как условие интегрируемости уравнения Кляйна-Гордона

Мы покажем после некоторых вступительных замечаний, что условие причинности Боголюбова является необходимым условием интегрируемости для запаздывающих или опережающих решений неоднородного уравнения Кляйна-Гордона.

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = j(x), \tag{1}$$

где /1 /12//

$$j(x) = i S^{+} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{in}(x)} = i \frac{\delta S}{\delta \varphi_{out}(x)} S^{+} \tag{2}$$

– оператор тока. S – матрица рассматривается как общий оператор в гильбертовом пространстве in или out -состояний свободных частиц и допускает поэтому представление /1 /4/, 1/11//

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_n f_n(x_1 \ldots x_n); \ \varphi_{\substack{in \\ out}}(x_1) \ldots \varphi_{\substack{in \\ out}}(x_n), \tag{3}$$

когда

$$S S^{+} = S^{+} S = 1 \tag{4}$$

$$(\Box - m^2)\varphi_{\substack{in\\out}}(x) = 0 \qquad [\varphi_{\substack{in\\out}}(x), \varphi_{\substack{in\\out}}(y)] = i\Delta(x-y) \qquad /5/$$

и

$$\varphi_{out}(x) = S^+ \varphi_{in}(x) S. \qquad /6/$$

Очевидно, что /ср. также дискуссию в[2]/ вариационные производные в /2/ не могут быть определены из S -матрицы /3/ одним способом, так как функции разложения $f_n(x_1 \dots , x_n)$ полностью не определяются разложением /3/. Причина следующая: из-за /5/ Фурье-образы $f_n(x_1, \dots, x_n)$ вносят вклад только на область на оболочке массы в /3/, в противоположность тому, что имеет место в /2/, т.е. в основном /2/ зависит и от экстраполяции на область вне оболочки массы совершенно произвольно [x]. В самом деле, что касается их вкладов на область оболочки массы, функции разложения $f_n(x_1, \dots, x_n)$ должны выполнять некоторые условия, в частности, условие унитарности /4/ и требование инвариантности относительно неоднородной лоренцовой группы. Помимо этого в причинной теории поля они должны подчиняться условию причинности, о котором будет идти речь далее. Вообще, они могут быть выражены

---

x/ Заметим, что выполнение функционального дифференцирования S -матрицы /3/ относительно операторов свободного поля $\varphi_{in}(x)$ или $\varphi_{out}(x)$ обычным образом делает априорно необходимым разложение при определении S -матрицы, так как при этом не обращается внимание на тот факт, что операторы свободного поля должны удовлетворять уравнениям /5/. Итак, чтобы получить /2/, мы должны выйти за пределы "физической" S -матрицы /3/, где поля $\varphi_{in}(x)$ или $\varphi_{out}(x)$ подчиняются /5/ для экстраполированной S -матрицы, которая является функционалом полей $\varphi_{in}(x)$ или $\varphi_{out}(x)$[3], рассматриваемых как произвольные классические функции /см. также[3]/, особенно сноску на стр. 180 в немецком переводе/. Очевидно, что такая экстраполяция произвольна, так как функции разложения $f_n(x_1, \dots, x_n)$ не являются единственно определенными /3/ и /5/, то же самое справедливо для результата функционального дифференцирования, которое в конечном счете рассматривается как функционал операторов поля $\varphi_{in}(x)$ или $\varphi_{out}(x)$, подчиняющихся /5/ и представленных в виде нормального произведения.

через величины вакуумного ожидания вариационных производных S -матрицы и , если мы интересуемся только матричными элементами S между состояниями, где все импульсы приходящих частиц отличаются от импульсов уходящих, что мы также принимаем для /9/, /10/ и /10/, мы можем использовать простое представление

$$f_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n!} \langle 0 \Big/ \frac{\delta^n S}{\delta\varphi_{\substack{in\\out}}(x_1)\dots\delta\varphi_{\substack{in\\out}}(x_n)} \Big/ 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{n!} \langle 0 / S^+ \frac{\delta^n S}{\delta\varphi_{\substack{in\\out}}(x_1)\dots\delta\varphi_{\substack{in\\out}}(x_n)} / 0 \rangle = \frac{1}{n!} \langle 0 \Big/ \frac{\delta^n S}{\delta\varphi_{out}(x_1)\dots\delta\varphi_{out}(x_n)} S^+ / 0 \rangle \qquad /7/$$

/7/ может быть легко проверено на основе разложения /3/. Во второй строчке /7/ мы использовали стабильность вакуума, полагая, что произвольный коэффициент фазы равен единице.

Если мы определим причинную теорию поля с помощью /1/ /17//, 1/17/

$$\frac{\delta j(x)}{\delta\varphi_{in}(y)} = 0 \qquad \text{если} \quad y \gtrsim x \qquad /8/$$

$$\frac{\delta j(x)}{\delta\varphi_{out}(y)} = 0 \qquad \text{если} \quad y \lesssim x \qquad /8/$$

и используем определение /2/, то возможно записать /7/ в виде

$$f_n(x_1,\dots,x_n) = \frac{(-i)^n}{n!} \langle 0 / Tj(x_1)\dots j(x_n) / 0 \rangle \qquad /9/$$

/ср. 1 /34/ x/ /. Так как /8/, /8'/ не включает условий для $x_0 = y_0$

---

x/ Эта формула, однако, содержит опечатку: в первом выражении пропущен знак минус.

выражения /9/, /11/ и /11'/ определяются только с точностью до вкладов от квазилокальных операторов[x]. Важно отметить то, что /ср.также дискуссию в [2] / /8/ , /8'/ является, в общем, условием для Фурье-образов функций разложения $f_n(x_1,\dots,x_n)$ на области на оболочке массы в /3/, а также на их экстраполяции вне области оболочки массы в /2/. Однако, последнее не может быть первой важности в теории S -матрицы: каждое условие причинности эквивалентно /8/, /8'/, если только имеет те же следствия для "физической" S -матрицы /8/, т.е. для вкладов функций разложения $f_n(x_1,\dots,x_n)$ на области на оболочке массы.

Если мы имеем дело только со случаем двух приходящих или двух уходящих частиц в элементах S -матрицы, то функции разложения $f_n(x_1,\dots,x_n)$ могут быть представлены как величины вакуумного ожидания опережающих или запаздывающих произведений оператора тока соответственно.

$$f_n^{(i)}(x_1,\dots,x_n) = \frac{-i}{n!} \langle 0 | A(x_1;x_2,\dots,x_n) | 0 \rangle \qquad /10/$$

$$f_n^{(f)}(x_1,\dots,x_n) = \frac{-i}{n!} \langle 0 | R(x_1;x_2,\dots,x_n) | 0 \rangle \qquad /10'/$$

где /ср. также[2] /27/ /.

$$A(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{\delta^{n-1} j(x_1)}{\delta\varphi_{out}(x_2)\dots\delta\varphi_{out}(x_n)} = (-i)^{n-1}\sum\Theta(x_n-x_{n-1})\dots$$
$$\dots\Theta(x_2-x_1)\left[j(x_n)\dots\left[j(x_2),j(x_1)\right]\right] \qquad /11/$$

$$R(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{\delta^{n-1} j(x_1)}{\delta\varphi_{in}(x_2)\dots\delta\varphi_{in}(x_n)} = (-i)^{n-1}\sum\Theta(x_1-x_2)\dots\Theta(x_{out}-x_n)\times$$
$$\times\left[\dots\left[j(x_1),j(x_2)\right]\dots j(x_n)\right] \qquad /11'/$$

---

[x] Для определения последних см.[5]; они приводят к членам вида $P\left(\frac{\partial}{\partial x_{i,\mu}}\right)\delta(x_1-x_2)\dots\delta(x_1-x_n)$, где $P\left(\frac{\partial}{\partial x_{i,\mu}}\right)$ - ковариантный полином относительно $\partial/\partial x_{i,\mu}$ с постоянными коэффициентами.

/10/ соответствует случаю двух приходящих частиц, а /10'/—случаю двух уходящих частиц, суммирование в /11/ и /11'/ проводится по всем перестановкам $(n-1)$ координат $x_2, \ldots, x_n$. Эти формулы могут быть легко доказаны операциями, проделанными в разделе 2 /соотношения /80/, /81/ / и применением условия причинности /3'/ или /8/ в /11/ или /11'/ соответственно.

Теперь мы переходим к обсуждению запаздывающих или опережающих решений неоднородного уравнения Кляйна-Гордона /1/. Мы запишем их в виде:

$$\varphi(x) = \varphi_t(x) - \int_t^{\infty} \Delta_{ret}(x-y) j(y)\, dy \quad \text{при} \quad x_0 > t \qquad /12/$$

$$\varphi(x) = \varphi_t(x) - \int_{-\infty}^{t} \Delta_{adv}(x-y) j(y)\, dy \quad \text{при} \quad x_0 < t, \qquad /12'/$$

где $\varphi_t(x)$ - решение однородного уравнения Кляйна-Гордона

$$(\Box - m^2)\varphi_t(x) = 0, \qquad /13/$$

которое совпадает с $\varphi(x)$ при $x_0 = t$

$$\varphi(x) = \varphi_t(x) \quad \text{при} \quad x_0 = t. \qquad /14/$$

Нас особенно интересуют пределы $t \to -\infty$ в /12/, и в /12'/ $t \to +\infty$

$$\varphi(x) = \varphi_{in}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{ret}(x-y) j(y)\, dy, \quad \varphi_{in}(x) = \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) \qquad /15/$$

$$\varphi(x) = \varphi_{out}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{adv}(x-y) j(y)\, dy, \quad \varphi_{out}(x) = \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) \qquad /15'/$$

которые, несомненно, приводят к необходимости примения адиабатической концепции. С другой стороны, мы можем использовать свойства инвариантности волнового уравнения /1/, полагая, что экстраполяция вне области оболочки массы во /2/ проводится Лоренц-инвариантным способом. Из трансляционной инвариантности вытекает существование оператора энергии-импульса P_μ, как оператора смещения в смысле

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(x) = i\left[P_\mu, \varphi(x)\right], \qquad \left[P_\mu, P_\nu\right] = 0 \tag{16}$$

так что относительно временной координаты существует соотношение

$$\varphi(x) = e^{iP_0(x_0 - x_0')}\, \varphi(\vec{x}, x_0')\, e^{-iP_0(x_1 - x_0')}. \tag{17}$$

Для оператора свободного поля /13/ мы имеем аналогичным образом

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi_t(x) = i\left[P^0_\mu(t), \varphi_t(x)\right], \left[P^0_\mu(t), P_\nu'(t)\right] = 0, \tag{18}$$

где $P^0_\mu(t)$ - оператор энергии-импульса системы со свободной частицей, соответствующей начальному условию при времени t. Далее:

$$\varphi_t(x) = e^{iP^0_0(t)(x_0 - x_0')}\, \varphi_t(\vec{x}, x_0')^{-iP^0_0(t)(x_0 - x_0')} \tag{19}$$

При $t \to \mp\infty$ /18/ и /19/ переходят в соответствующие соотношения для in и out полей соответственно /ср. /15/, /15'//, например,

$$\varphi_{\substack{in\\out}}(x) = e^{iP^0_{0,\substack{in\\out}}(x_0 - x_0')}\, \varphi_{in}(\vec{x}, x_0')\, e^{-iP^0_{0,\substack{in\\out}}(x_0 - x_0')} \qquad P^0_{0,\substack{in\\out}} = \lim_{t \to \pm\infty} P^0_0(t) \tag{19'}$$

Для простоты мы принимаем равенство между собственными величинами P_μ и $P^0_\mu(t)$ x/

$$P_\mu \varphi_n = P_\mu^{(n)} \varphi_n \tag{20}$$

$$P^0_\mu(t)\, \varphi^0_n(t) = P_\mu^{(n)} \varphi^0_n(t) \tag{21}$$

---

x/ Этим самым полагаем, что не возникает никаких связанных состояний /о возможности рассмотрения последнего случая вместе с модифицированной, адиабатической концепцией см. 6/ /.

и требуем наличия состояния с наименьшим собственным значением энергии, вакуум Ψ_0 или $\Psi_0^\circ(t)$ соответственно $(P_0^{(0)}=0)$. Уравнение /21/ возможно для произвольного t, так как существует унитарное преобразование между $P_\mu^\circ(t)$ и $P_\mu^\circ(t')$, которое будет дано далее /см. /37//. /20/и /21/ вместе означают существование унитарного преобразования, которое связывает Ψ_n с $\Psi_n^\circ(t)$

$$\Psi_n = \mathcal{U}(t)\,\Psi_n^\circ(t), \quad \mathcal{U}(t)\,\mathcal{U}^+(t) = \mathcal{U}^+(t)\,\mathcal{U}(t) = 1. \qquad /22/$$

Оператор $\mathcal{U}(t)$, который действует в гильбертовом пространстве состояний $\Psi_n^\circ(t)$ со свободными частицами, может быть представлен как разложение относительно нормальных произведений оператора свободного поля $\varphi_t(x)$ /ср. /3//.

$$\mathcal{U}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_n\, g_n(x_1,\ldots,x_n;t) : \varphi_t(x_1)\ldots\varphi_t(x_n) . \qquad /23/$$

Если учесть хорошо известный факт, что состояния могут быть построены из вакуумного состояния $\Psi_n^\circ(t)$ с помощью повторного применения оператора

$$a_t^*(\vec{q}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{x} \left\{ \varphi_t(x) \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2q_0}} - \frac{\partial}{\partial x_0} \varphi_t(x) \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2q_0}} \right\}, \qquad /24/$$

где /ср. 1 /6/, 1/7//

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{q}}{\sqrt{2q_0}} \left\{ a_t(\vec{q})\, e^{-iqx} + a_t^*(\vec{q})\, e^{iqx} \right\}, \quad q_0 = +\sqrt{m^2+\vec{q}^{\,2}} \qquad /25/$$

и $$\left[a_t(\vec{q}), a_t^*(\vec{q}\,')\right] = \delta(\vec{q}-\vec{q}\,'), \quad \left[a_t(\vec{q}), a_t(\vec{q}\,')\right] = 0$$

$$a_t(\vec{q})\,\Psi_0^\circ(t) = 0 \qquad /26/$$

то, очевидно, принимая во внимание /23/, что левое выражение /22/ представляет разложение состояний относительно состояний со свободными частицами $\Psi_n^\circ(t)$. При $t \to \mp\infty$ мы получаем из вышеперечисленных соотношений соответствующее для свободных операторов in или out –поля. Мы уже отмечали /см. приложение/, что операторы $P^{\circ}_{o,in}$ и $P^{\circ}_{o,out}$ должны быть отождествлены с самим P_o

$$P^{\circ}_{o,in} = P^{\circ}_{o,out} = P_o, \qquad /27/$$

так что мы имеем /с точностью до некоторого фазового коэффициента/

$$\mathcal{U}_{in} = \mathcal{U}_{out} = 1. \qquad /28/$$

Теперь мы преобразуем /17/ при $x'_o = t$ следующим образом

$$\varphi(x) = \overset{t}{\mathcal{U}}(x_o,t)\, e^{iP^{\circ}_o(t)(x_o-t)}\, \varphi(\vec{x},t)\, e^{-iP^{\circ}_o(t)(x_o-t)}\, \mathcal{U}(x_o,t) \qquad /29/$$

при

$$\mathcal{U}(x_o,t) = e^{iP^{\circ}_o(t)(x_o-t)}e^{-iP_o(x_o-t)} \qquad /30/$$

где, очевидно,

$$\mathcal{U}(x_o,t)\,\overset{+}{\mathcal{U}}(x_o,t) = \overset{+}{\mathcal{U}}(x_o,t)\,\mathcal{U}(x_o,t) = 1. \qquad /31/$$

Используя /14/ и /19/, мы можем записать /29/ в виде:

$$\varphi(x) = \overset{+}{\mathcal{U}}(x_o,t)\,\varphi_t(x)\,\mathcal{U}(x_o,t) = \varphi_t(x) + \overset{+}{\mathcal{U}}(x_o,t)\left[\varphi_t(x), \mathcal{U}(x_o,t)\right]. \qquad /32/$$

Из /30/ следует

$$e^{-iP^{\circ}_o(t)(x_o-t)}\,\mathcal{U}(x_o,t) = \overset{+}{\mathcal{U}}(t,x_o)\, e^{-iP^{\circ}_o(x_o)(x_o-t)} \left(= e^{-iP_o(x_o-t)} \right) \qquad /33/$$

и отсюда, используя /31/,

$$P^{\circ}_o(x_o) = \mathcal{U}(t,x_o)\, P^{\circ}_o(t)\, \mathcal{U}(x_o,t). \qquad /34/$$

Перестанавливая x_0 и t в /33/, получим с другой стороны

$$P_0^0(t) = \mathcal{U}(x_0, t)\, P_0^0(x_0)\, \mathcal{U}(t, x_0) \qquad /35/$$

/34/ и /35/ вместе с /31/ подразумевают

$$\mathcal{U}^+(x_0, t) = \mathcal{U}(t, x_0) \qquad \mathcal{U}^+(t, x_0) = \mathcal{U}(x_0, t). \qquad /36/$$

Таким образом, /34/ может быть также записано в виде:

$$P_0^0(x_0) = \mathcal{U}^+(x_0, t)\, P_0^0(t)\, \mathcal{U}(x_0, t), \qquad /37/$$

что дает связь для уравнения /21/ при различных t .

Используя /19/, /14/, /32/, /37/ и /31/, мы можем теперь заключить:

$$\begin{aligned}\varphi_t(x) &= e^{iP_0^0(t)(x_0-t)}\, \varphi_t(\vec{x}, t)\, e^{-iP_0^0(t)(x_0-t)} \\ &= e^{iP_0^0(t)(x_0-t)}\, \mathcal{U}^+(t,t')\, \varphi_{t'}(\vec{x}, t)\, \mathcal{U}(t,t')\, e^{-iP_0^0(t)(x_0-t)} \\ &= \mathcal{U}^+(t,t')\, e^{iP_0^0(t')(x_0-t)}\, \varphi_{t'}(\vec{x}, t)\, e^{-iP_0^0(t')(x_0-t)}\, \mathcal{U}(t,t') \\ &= \mathcal{U}^+(t,t')\, \varphi_{t'}(x)\, \mathcal{U}(t,t')\end{aligned} \qquad /38/$$

и применяя эту формулу второй раз, мы находим:

$$\mathcal{U}(t, t'') = \mathcal{U}(t', t'')\, \mathcal{U}(t, t'). \qquad /39/$$

Используя хорошо известные теоремы сложения для экспоненциальных операторов, мы можем записать /30/ в виде

$$\mathcal{U}(x_0, t) = \mathcal{U}_t(x_0, t) = \exp_+\left\{-i \int_t^{x_0} P_0^i(t', t)\, dt'\right\}, \qquad /40/$$

где

$$P_0^i(t',t) = e^{iP_0^\circ(t)(t'-t)} P_0^i(t)\, e^{-iP_0^\circ(t)(t'-t)}, \qquad P_0^i(t) = P_0 - P_0^\circ(t). \qquad /41/$$

Знак плюс предписывает хронологический порядок операторов в разложении относительно $P_0^i(t',t)$. Индекс t в $\mathcal{U}_t(x_0,t)$ должен в дальнейшем быть связан с t -зависимостью $P_0^i(t',t)$, а аргумент τ с зависимостью интегрального предела /см. также /43//. Вообще $\mathcal{U}_t(x_0,t)$ -решение дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{U}_t(x_0,t)}{\partial x_0} = -i P_0^i(x_0,t)\,\mathcal{U}_t(x_0,t), \quad \frac{\partial \mathcal{U}_t(x_0,t)}{\partial t} = i\mathcal{U}_t(x_0,t) P_0^i(t) \qquad /42/$$

с начальным условием

$$\mathcal{U}_t(x_0,t) = 1 \qquad for \quad x_0 = t \qquad /42'/$$

или интегральных уравнений

$$\mathcal{U}_t(x_0,t) = 1 - i\int_t^{x_0} P_0^i(t',t)\,\mathcal{U}_t(t',t)\,dt' = 1 + i\int_{x_0}^{t} \mathcal{U}_t(x_0,t')\,P_0^i(t',t)\,dt'. \qquad /43/$$

В /42/ подразумевается только дифференцирование относительно аргумента t /ср. /43/ . Соотношение унитарности /31/ теперь имеет вид

$$\mathcal{U}_t(x_0,t)\,\mathcal{U}_t^+(x_0,t) = \mathcal{U}_t^+(x_0,t)\,\mathcal{U}_t(x_0,t) = 1, \qquad /44/$$

из которого вытекает важное соотношение /в связи с /43//

$$\mathcal{U}_t(x_0,t) = \mathcal{U}_t^+(x_0,t)\,\mathcal{U}_t(x_0,t)\,\mathcal{U}_t(x_0,t) = \mathcal{U}_{x_0}(x_0,t), \qquad /45/$$

так как

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t^+(x_0,t)\,P_0^i(t',t)\,\mathcal{U}_t(x_0,t) &= \mathcal{U}^+(x_0,t)\,e^{iP_0^\circ(t)(t'-t)} P_0^i(t)\,e^{-iP_0^\circ(t)(t'-t)}\,\mathcal{U}(x_0,t) \\ &= \mathcal{U}^+(x_0,t)\,\mathcal{U}^+(t,t')\,P_0\,\mathcal{U}(t,t')\,\mathcal{U}(x_0,t) - P_0^\circ(x_0) = \mathcal{U}^+(x_0,t')\,P_0\,\mathcal{U}(x_0,t') - P_0^\circ(x_0) \\ &= e^{iP_0^\circ(x_0)(t'-x_0)}\,P_0^i(x_0)\,e^{-iP_0^\circ(x)(t'-x_0)} = P_0^i(t',x_0), \end{aligned} \qquad /46/$$

где мы использовали первое уравнение /40/, /41/, /30/, /36/, /37/ и /39/. Применяя /45/ мы можем сделать теперь выводы для $\mathcal{U}_t(x_0,t)$ из /36/[x].

$$\mathcal{U}_t^{+}(x_0,t)=\mathcal{U}_{x_0}(t,x_0)=\mathcal{U}_t(t,x_0) \qquad /47/$$

и из /39/

$$\mathcal{U}_t(x_0,t)=\mathcal{U}_t(t',t)\,\mathcal{U}_{t'}(x_0,t')=\mathcal{U}_{t'}(t',t)\,\mathcal{U}_{t'}(x_0,t')=$$

$$=\mathcal{U}_t(x_0,t')\,\mathcal{U}_{t'}(t',t)=\mathcal{U}_t(x_0,t')\,\mathcal{U}_t(t',t) \qquad /48/$$

в /48/ мы использовали, кроме того, /44/ и /47/ и

$$\mathcal{U}_{t'}^{+}(t,t')\,\mathcal{U}_{t'}(x_0,t')\,\mathcal{U}_{t'}(t,t')=\mathcal{U}_t(x_0,t'), \qquad /49/$$

что очевидно ввиду /43/, /44/ и /46/.

Теперь переходя к пределам $t\to\mp\infty$ в /32/, мы получаем[xx]

$$\varphi(x)=\mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(x_0,\mp\infty)\,\varphi_{\substack{in\\out}}(x)\,\mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(x_0,\mp\infty)$$

$$=\varphi_{\substack{in\\out}}(x)+\mathcal{U}^{+}_{\substack{in\\out}}(x_0,\mp\infty)\left[\varphi_{\substack{in\\out}}(x),\,\mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(x_0,\mp\infty)\right] \qquad /50/$$

при /ср. 19'/ и /40/, /41/

$$\varphi_{\substack{in\\out}}(x)=\lim_{t\to\mp\infty} e^{iP_0^0(t)(x-t)}\,\varphi(\vec{x},t)\,e^{-iP_0^0(t)(x_0-t)} \qquad /51/$$

$$\mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(x_0,\mp\infty)=\lim_{t\to\mp\infty}\mathcal{U}_t(x_0,t)=\exp_{+}\left\{-i\int_{\mp\infty}^{x_0}P^{i}_{0,\substack{in\\out}}(t')dt'\right\},\quad P^{i}_{0,\substack{in\\out}}(t')=\lim_{t\to\mp\infty}P^{i}_{0}(t',t) \qquad /52/$$

---

x/ Соотношение $\mathcal{U}_t^{+}(x_0,t)=\mathcal{U}_t(t,x_0)$ может быть выведено также из /43/.

xx/ См. также дискуссию в конце этого раздела. Заметим, что из-за /45/ мы можем выполнить предел $t\to\mp\infty$ в /32/ таким образом, что $\mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(x_0,\mp\infty)$ заменяется в /50/ $\mathcal{U}_{x_0}(x_0,\mp\infty)$.

Легко видеть, что в таких случаях, когда $\rho_0^i(t)$ зависит только от оператора поля $\varphi_t(\vec{x},t)=\varphi(\vec{x},t)$, а не от производных по времени, $\rho^i_{0,\substack{in\\out}}(t')$ есть ни что иное как $\rho_0^i(t)$, выраженное in- или out- полями при времени t'. /52/ допускает разложения относительно нормальных произведений свободных операторов in или out - поля соответственно /ср. /3/ или /23 //; используя преобразование как и в 1 /21/, мы можем записать /50/ в виде

$$\varphi(x)=\varphi_{\substack{in\\out}}(x)+i\int dy\,\Delta(x-y)\,\mathcal{U}^+_{\substack{in\\out}}(x_0,\mp\infty)\,\frac{\delta\,\mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(x_0,\mp\infty)}{\delta\varphi_{\substack{in\\out}}(y)}, \qquad /53/$$

или

$$\varphi(x)=\varphi_{in}(x)+i\int dy\,\Delta(x-y)\,\mathcal{U}^+_{in}(x_0,\mp\infty)\,\frac{\delta\,\mathcal{U}_{in}(x_0,-\infty)}{\delta\varphi_{in}(y)} \qquad /54/$$

$$\varphi(x)=\varphi_{out}(x)-i\int dy\,\Delta(x-y)\,\frac{\delta\,\mathcal{U}_{out}(+\infty,x_0)}{\delta\varphi_{out}(y)}\,\mathcal{U}^+_{out}(+\infty,x_0). \qquad /54'/$$

Уравнение /54'/ наиболее соответствует следующим результатам, если исходить /используя /47// из эрмитово-сопряженного уравнения /29/.

Сравнение /54/, /54'/ с /15/, /15'/ обязательно требует наличия запаздывающих или опережающих свойств

$$\frac{\delta\,\mathcal{U}_{in}(x_0,-\infty)}{\delta\varphi_{in}(y)}=0, \quad \text{если} \quad y_0>x_0, \qquad /55/$$

$$\frac{\delta\,\mathcal{U}_{out}(+\infty,x_0)}{\delta\varphi_{out}(y)}=0, \quad \text{если} \quad y_0<x_0. \qquad /55'/$$

Мы назовем /55/ и /55'/ "собственным условием причинности", которое с математической точки зрения имеет смысл необходимого условия интегрируемости для опережающих или запаздывающих решений неоднородного уравнения Кляйна-Гордона.

Из /55/ , /55'/, используя определение /2/, следует

$$i\, U^+_{in}\left(x_0,-\infty\right) \frac{\delta U_{in}\left(x_0,-\infty\right)}{\delta \varphi_{in}(y)} = i\,\theta(x-y)\, S^+ \frac{\delta S}{\delta \varphi_{in}(y)} = \theta(x-y)\, j(y) \qquad /56/$$

$$i\, \frac{\delta U_{out}\left(+\infty,x_0\right)}{\delta \varphi_{out}(y)}\, U^+_{out}\left(+\infty,x_0\right) = i\,\theta(y-x) \frac{\delta S}{\delta \varphi_{out}(y)}\, S^+ = \theta(y-x)\, j(y) \qquad /56'/$$

при /ср. /48//, которое мы также используем для бесконечного t x/

$$S = S_{\substack{in\\out}} = U_{\substack{in\\out}}\left(+\infty,-\infty\right) = U_{\substack{in\\out}}\left(+\infty,x_0\right) U_{\substack{in\\out}}\left(x_0,-\infty\right), \qquad /57/$$

где , несомненно, $S = S_{in} = S_{out}$ в соответствии с /49/ и /4/ /ср. также /3//. Мы имеем, используя унитарное соотношение /44/ также при бесконечном t x/

$$j(y) = i\, S^+ \frac{\delta S}{\delta \varphi_{in}(y)} = i\, U^+_{in}\left(x_0,-\infty\right) U^+_{in}\left(+\infty,x_0\right) U_{in}\left(+\infty,x_0\right) \frac{\delta U_{in}\left(x_0,-\infty\right)}{\delta \varphi_{in}(y)}$$
$$= i\, U^+_{in}\left(x_0,-\infty\right) \frac{\delta U_{in}\left(x_0,-\infty\right)}{\delta \varphi_{in}(y)} \quad \text{for } y < x_0; \qquad /58/$$

$$j(y) = i\, \frac{\delta S}{\delta \varphi_{out}(y)}\, S^+ = i\, \frac{\delta U_{out}\left(+\infty,x_0\right)}{\delta \varphi_{out}(y)}\, U_{out}\left(x_0,-\infty\right) U^+_{out}\left(x_0,-\infty\right) U^+_{out}\left(+\infty,x_i\right) = \qquad /58'/$$
$$= i\, \frac{\delta U_{out}\left(+\infty,x_0\right)}{\delta \varphi_{out}(y)}\, U^+_{out}\left(+\infty,x_0\right) \quad \text{при } y_0 > x_0$$

---

x/ См. дискуссию в конце раздела.

Здесь мы также использовали то, что $U_{in}(+\infty, x_0)$ не может зависеть от $\varphi_{in}(y)$ при $y_0 < x_0$ из-за /55'/, а $U_{out}(x_0,-\infty)$ не может зависеть от $\varphi_{out}(y)$ при $y_0 > x_0$ из-за /55/./ Мы отметим, что, например, $U_{out}(x_0,-\infty) = S^+ U_{in}(x_0,-\infty)$ /в соответствии с /49/ или /6/ и разложением по нормальным произведениям in или out полей соответственно; из последнего вытекают вышеприведенные рассуждения /. θ – функции в /56/, /56'/ слудуют из собственного условия причинности /55/, /55'/[x/].

Мы получаем

$$\frac{\delta j(y)}{\delta \varphi_{in}(z)} = 0 \qquad \text{если} \quad z_0 > x_0 > y_0 \qquad /59/$$

$$\frac{\delta j(y)}{\delta \varphi_{out}(z)} = 0 \qquad \text{если} \quad z_0 < x_0 < y_0 \qquad /59/$$

из /56/, /56'/, используя собственное условие причинности /55/ /55'/. Из /59/, /59'/ мы можем вывести условие причинности Боголюбова /8/, /8'/[xx/], так как мы можем выбрать x_0 очень близким к y_0 в /59/, /59/. Знак в /8/ ,/8'/, кроме того, является простым следствием из требования ковариантности. Итак, мы показали, что условие причинности /8/, /8'/ являчется необходимым условием интегрируемости для опережающих или запаздывающих решений неоднородного уравнения Кляйна-Гордона /15/, /15'/, которому равны соотношения /54/, /54'/ в предположении /55/, /55'/ в соответствии с /56/, /56'/. Из этих соотношений очевидно, что мы не имеем предписания для $x_0 = y_0$ в /8/, /8'/, что приводит к возможности прибавления квазилокальных операторов к /8/, /8'/.

Вышеприведенные рассуждения могут быть обобщены на случай, в котором трансляционная инвариантность может не приниматься /т.е. на случай открытых систем/. Мы исходим из соотношений /12/, /12'/, где мы квантуем оператор свободного поля $\varphi_t(x)$ в соответствии с /ср. /25/, /26//

[x/] Равенство между выражениями правой и левой части /56/, /56'/ может быть выведено путем прямого сравнения /54/, /54'/ с /15/ /15'/, и определение /2/ оператора тока очевидно ввиду 1/21.

[xx/] Запишем здесь только y вместо x и z вместо y.

$$[\varphi_t(x), \varphi_t(y)] = i\Delta(x-y), \qquad /60/$$

где правая часть не зависит от t, т.е. от специального начального условия. /Это хорошо известное свойство решений однородного уравнения Кляйна-Гордона; ср. [7] /22//. Но из /60/ следует существование унитарного преобразования, такого, что

$$\varphi_t(x) = \overset{+}{\mathcal{U}}(t,t')\varphi_{t'}(x)\,\mathcal{U}(t,t') \qquad /61/$$

$$\mathcal{U}(t,t')\overset{+}{\mathcal{U}}(t,t') = \overset{+}{\mathcal{U}}(t,t')\,\mathcal{U}(t,t') = 1. \qquad /62/$$

В соответствии с /14/ мы получаем из /61/ при $x_0 = t$ /записав t вместо t'/

$$\varphi(x) = \overset{+}{\mathcal{U}}(x_0,t)\,\varphi_t(x)\,\mathcal{U}(x_0,t). \qquad /63/$$

Итак, мы пришли к соотношениям типа /38/ и /32/, с которыми можно поступить, как указано выше.

Отметим, что условие причинности для оператора взаимодействующего поля

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0, \text{ если } x \sim y \qquad /64/$$

выполняется травиально, так как мы имеем в соответствии с /63/, /62/ и /60/

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_{x_0=y_0} = \overset{+}{\mathcal{U}}(x_0,t)[\varphi_t(x), \varphi_t(y)]\,\mathcal{U}(x_0,t)/_{x_0=y_0} = 0 \qquad /65/$$

и по причине ковариантности /65/ должно также иметь силу для $x \sim y$. В вышеприведенных рассуждениях принимается, что оператор $\mathcal{U}_t(x_0,t)$ или $\mathcal{U}_{x_0}(x_0,t)$ имеет хорошо определенный предел при $(t \to \mp\infty)$ и что условие унитарности /44/ имеет силу в этих пределах / очевидно, что /44/ может быть правильным для конечных t и x_0, ввиду /30/ и /40//. Однако, как хорошо известно, переходя к пределам $t \to \mp\infty$, мы должны принять особую адиабатическую концепцию /чтобы получить математически хорошо определенные результаты/, а предельный процесс может повлиять на свойство унитарности операторов /52/[x]. Это будет видно в дальнейшем.

Рассмотрим сначала оператор /ср. /40/, /41/ и /30/ /

$$\mathcal{U}_0(x_0,t)=\exp_+\left\{-i\int_t^{x_0} P_0^i(t',0)\,dt'\right\}=e^{iP_0^\circ(0)x_0}\,e^{-iP_0(x_0-t)}\,e^{-iP_0^\circ(0)t}, \qquad /66/$$

где

$$P_0^i(t',0)=e^{iP_0^\circ(0)t'}P_0^i(0)\,e^{-iP_0^\circ(0)t'}, \qquad P_0^i(0)=P_0-P_0^\circ(0). \qquad /67/$$

Очевидно, что ввиду /66/ $\mathcal{U}_0(x_0,t)$ является унитарным для конечных t и x_0. Теперь мы явно введем адиабатическую концепцию в виде

$$P_0^i(t',0)\longrightarrow e^{-\varepsilon|t'|}P_0^i(t',0), \qquad /68/$$

где $e^{-\varepsilon|t'|}$ – коэффициент затухания в том смысле, что после проведения расчета нужно взять предел $\varepsilon\to 0$ [xx]. Из правого уравнения /43/ мы получаем

$$\mathcal{U}_0(x_0,t)=1+i\int_{x_0}^{t}\mathcal{U}_0(x_0,t')\,P_0^i(t',0)\,dt' \qquad /69/.$$

и из этого, полагая, что $x_0=0$ и $t=\mp\infty$

$$\mathcal{U}_0(0,\mp\infty)\,\psi_n^\circ(0)=\left\{1+i\int_0^{\mp\infty}dt'\,e^{-\varepsilon|t'|}e^{i(P_0-P_0^{(n)})t'}P_0^i(0)\right\}\psi_n^\circ(0)= \qquad /70/$$

$$=\left\{1+\frac{1}{P_0^{(n)}-P_0\pm i\varepsilon}P_0^i(0)\right\}\psi_n^\circ(0),$$

---

[x] Мы не разбираем здесь положение, когда должны рассматриваться связанные состояния /см. [6]/ .

[xx] Другая возможность определения предельного процесса дана в [8].

где $\psi_n^0(0)$ дано в /21/ и мы использовали соотношение /ср. /66/, /67//

$$\mathcal{U}_0(0,t')\,P_0^i(t',0)=e^{iP_0t'}\,P_0^i(0)\,e^{-iP_0^0(0)t'}. \qquad /71/$$

Из /70/ выводим заключение, используя правое уравнение /67/

$$\left(P_0-P_0^{(n)}\right)\mathcal{U}_0\left(0,\mp\infty\right)\psi_n^0(0)=0 \qquad /72/$$

т.е. состояния

$$\psi_n^{(\pm)}=\mathcal{U}_0\left(0,\mp\infty\right)\psi_n^0\,(0) \qquad /73/$$

являются собственными состояниями оператора энергии P_0 полной системы /ср. /20/ /, соответствующей положению со свободными частицами $\psi_n^0(0)$ при $t\mp\infty$.

Теперь мы покажем, что либо $\mathcal{U}_0(0\mp\infty)$ не являются унитарным, либо не существует взаимодействия между частицами. Доказательство состоит из 2-х частей: сначала мы покажем, что унитарность у $\mathcal{U}_0(0,\mp\infty)$ не может влиять на устойчивые состояния системы, а затем придем к выводу, что не может существовать никакого взаимодействия между двумя частицами.

Для первой части мы выбираем $\psi_n^0(0)$ как устойчивое состояние $\psi_s^0(0)$ /вакуумное или одночастичное состояния/ и получаем из /70/

$$\psi_s=\mathcal{U}_0\left(0,\mp\infty\right)\psi_s^0(0)=\mathcal{U}_0\,\psi_s^0(0)=\left\{1+\frac{1}{P_0^{(s)}-P_0}\,P_0^i(0)\right\}\psi_s^0(0), \qquad /74/$$

так как установление сингулярности не является необходимым в этом случае. Однако, мы имеем

$$\frac{1}{P_0^{(s)}-P_0}\,P_0^i(0)\,\psi_s^0(0)\approx\Lambda\,\psi_s, \qquad /75/$$

где оператор Λ проектирует состояния $\psi_s^0(0)$ и ввиду /74/ ясно, что унитарный оператор U_0 не влияет на устойчивые состояния $\psi_s^0(0)$, иначе: если $\psi_s^0(0)$ – нормированное состояние, состояние ψ_s не может быть нормированным/. Чтобы доказать /75/, мы поступаем следующим образом: из /ср./20 /, /21//

$$P_0 \psi_s = P_0^{(s)} \psi_s\,, \quad P_0^{\circ}(0)\, \psi_s^{\circ}(0) = P_0^{(s)} \psi_s^{\circ}(0)\,, \quad P_0 = P_0^{\circ}(0) + P_0^{i}(0) \qquad /76/$$

и

$$\psi_s = C_s\, \psi_s^{\circ}(0) + \Lambda\, \psi_s\,, \qquad /77/$$

где C_s – постоянная нормировки, следует

$$P_0 \psi_s = P_0 \left(C_s\, \psi_s^{\circ}(0) + \Lambda \psi_s\right) = C_s \left(P_0^{(s)} + P_0^{i}(0)\right) \psi_s^{\circ}(0) + P_0 \Lambda \psi_s = $$
$$= P_0^{(s)} \psi_s = P_0^{(s)} \left(C_s\, \psi_s^{\circ}(0) + \Lambda \psi_s\right) \qquad /78/$$

и из этого

$$\left(P_0^{(s)} - P_0\right) \Lambda\, \psi_s = C_s\, P_0^{i}(0)\, \psi_s^{\circ}(0)\,, \qquad /79/$$

т.е. наше утверждение /75/ /из-за стабильности $\psi_s^{\circ}(0)$, оператор $\left(P_0^{(s)} - P\right)$ имеет единственный обратный оператор в /79//.

Во второй части нашего доказательства мы показываем, что не может быть взаимодействия между двумя частицами, если только унитарный оператор $U_0(0, \mp\infty)$ не влияет на устойчивые состояния. Мы рассмотрим общий элемент S – матрицы для 2-х приходящих частиц:

$$\langle n | S | q_1, q_2 \rangle_{in} = \langle_{out}\, n | S | q_1, q_2 \rangle_{out} = \langle_{out}\, n | q_1, q_2 \rangle_{in} = \delta_{n;q_1;q_2} + \langle_{out}\, n | R | q_1 q_2 \rangle_{out} \qquad /80/$$

при

$$\langle_{out}\, n | R | q_1, q_2 \rangle_{out} = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int dx\, \frac{e^{-iq_1 x}}{\sqrt{2 q_{1,0}}}\, \langle_{out}\, n | j(x) | q_2 \rangle_{out} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int dx\, \frac{e^{-iq_1 x}}{\sqrt{2 q_{1,0}}} \times$$
$$\times \langle_{out}\, n | a^{*}_{out}(\vec{q}_2)\, j(x) | 0 \rangle + \frac{-i}{(2\pi)^3} \int dx\, dy\, \frac{e^{-iq_1 x - i q_2 y}}{2\sqrt{q_{1,0}\, q_{2,0}}}\, \langle_{out}\, n \left| \frac{\delta j(x)}{\delta \varphi_{out}(y)} \right| 0 \rangle \qquad /81/$$

$$q_{i,0} = +\sqrt{m^2 + \vec{q}_i^{\,2}}$$

приведенный с помощью перестановочных соотношений типа 1/8/, 1/32/ в подходе к квантовой теории поля путем функционального дифференцирования, /в /80/ мы выбрали состояния $|q_1, q_2\rangle / n\rangle$ как выходные состояния, чтобы использовать определение /2/ для оператора тока в связи со свойством устойчивости одночастичных состояний после первого приведения: $|0\rangle$ - как и в /7/ вектор состояния вакуума с приходящими или уходящими свободными частицами. Используя 1/19/ мы получаем для причинной теории с точностью до вкладов от соответствующих квазилокальных операторов

$$
{}_{out}\langle n|R|q_1, q_2\rangle_{out} = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \, \frac{e^{-iq_1 x}}{\sqrt{2q_{1,0}}} \, {}_{out}\langle n|a^*_{out}(\vec{q}_2) j(x)|0\rangle + \tag{82}
$$

$$
+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx\,dy \, \frac{e^{-iq_1 x - iq_2 y}}{2\sqrt{q_{1,0}\, q_{2,0}}} \, \theta(y-x) \, {}_{out}\langle n|[j(x), j(y)]|0\rangle ;
$$

$$
q_{i,0} = + \sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}} .
$$

В подходе с помощью оператора взаимодействующего поля /8 2/ принимает вид /ср. также раздел 4/

$$
{}_{out}\langle n|R|q_1, q_2\rangle_{in} = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \, \frac{e^{-iq_1 x}}{\sqrt{2q_{1,0}}} \, (\Box_x - m^2)_{out}\langle n|a^*_{out}(\vec{q}_2)\varphi(x)|0\rangle \tag{83}
$$

$$
+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx\,dy \, \frac{e^{-iq_1 x - iq_2 x}}{2\sqrt{q_{1,0}, q_{2,0}}} \, (\Box_x - m^2)(\Box_y - m^2)\theta(y-x)_{out}\langle n|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle ;
$$

$$
q_{i,0} = + \sqrt{m^2 + \vec{q}_i^{\,2}} .
$$

Первое выражение справа в /81/, /82/ и /83/ исчезает пока один из импульсов в конечном состоянии $|n\rangle_{out}$ не равен $\vec{q}^{\,2}$ и также исчезает, если $|n\rangle_{out}$ двухчастичное состояние благодаря /90/, /91/. Сначала мы рассмотрим второе выражение в /83/, которое мы запишем в виде:

$$
\frac{1}{(2\pi)^3} \int dx\,dy \, \frac{e^{-iq_1 x - iq_2 y}}{2\sqrt{q_{1,0}\, q_{2,0}}} \Big\{ (\Box_x - m^2)\theta(y-x)(\Box_y - m^2)_{out}\langle n|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle
$$

$$-\left(\Box_y - m^2\right)\theta(y-x)\left(\Box_x - m^2\right) \underset{out}{<} n/\varphi(y)\varphi(x)/0>\Big\} ; \qquad /83/$$

$$q_{i,0} = +\sqrt{m^2 + \vec{q}_i^{\,2}} \; ;$$

где мы проделали частичное интегрирование /см. более детально также следующий раздел/. Мы разложим матричные элементы операторов поля в /83/ относительно полного набора состояний с приходящими или уходящими частицами $/n'>_{\substack{in\\out}}$, например,

$$\underset{out}{<} n/\varphi(x)\varphi(y)/0> = \sum_{n'} \underset{out}{<} n/\varphi(x)/n'>_{\substack{in\\out}} \; \underset{\substack{in\\out}}{<} n'/\varphi(y)/0> \qquad /84/$$

и рассмотрим матричный элемент $\underset{\substack{in\\out}}{<} n'/\varphi(y)/0>$, который мы представим следующим образом

$$\underset{\substack{in\\out}}{<} n'/\varphi(y)/0> = e^{iq'y} \underset{\substack{in\\out}}{<} n'/\varphi(0)/0>$$

$$= e^{iq'y} < \psi_{n'}^{\circ}(0)/\mathcal{U}_0^{t}(0,\mp\infty)\varphi_0(0)\,\mathcal{U}_0(0,\mp\infty)/\psi_0^{\circ}(0)> = \qquad /85/$$

$$= e^{iq'y} < \psi_{n'}^{\circ}(0)/\varphi_0(0)/\psi_0^{\circ}(0)> ,$$

где мы использовали трансляционную инвариантность / q' - вектор энергии-импульса состояния $/n'>_{\substack{in\\out}}$ /, выразив все величины в обычном представлении взаимодействия /что возможно, так как $\mathcal{U}_0(0,\mp\infty)$ принимается как унитарный; ср. положение, особенно /A.6/, /A.7/ и /A.8/, и на последнем этапе использовали наше предположение, что $\mathcal{U}_0(0,\mp\infty)$ или $\mathcal{U}_0^{+}(0,\mp\infty)$ соответственно не влияет на устойчивые состояния $\varphi_S^{\circ}(0)$ / то, что при $\mathcal{U}_0(0,\mp\infty)$ также и $\mathcal{U}_0^{t}(0,\mp\infty)$ не влияет на устойчивые состояния, вытекает прямо из условия унитарности $\mathcal{U}_0^{+}(0,\mp\infty)\,\mathcal{U}_0(0,\mp\infty)\,\psi_s^{\circ}(0) = 1\,\psi_s^{\circ}(0)$ /.
Однако, на основании /85/ мы делаем вывод, что /83/ также исчезает, так

как в соответствии с /85/ только одночастичные состояния вносят вклад в /83'/ и применение соответствующих операторов Кляйна-Гордона дает нуль. Из этого видно, что первый член в /83/ также исчезает. Это дополняет наше доказательство[x/].

Итак, мы показали, что оператор $\mathcal{U}_0(0 \mp \infty)$ не может быть унитарным для реальных взаимодействий, и то же самое должно быть правильным для оператора $\mathcal{U}^{t}_{\substack{in\\out}}(0, \mp\infty)$, так как мы имеем, например, $\mathcal{U}_0(0, \mp\infty) = \mathcal{U}^{t}_{\substack{in\\out}}(0,\mp\infty)\mathcal{U}^{t}_{\substack{in\\out}}(0,\mp\infty)\mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(0,\mp\infty)$ в соответствии с /49/. Так как, однако, в соответствии с предположением /20/,/21/ Ψ_n и $\Psi^0_n(0)$ связаны унитарным преобразованием, оператор $\mathcal{U}_0(0,\pm\infty)$, который преобразует их, должен быть соответственно унитарным с точностью до общей конечной постоянной /перенормировки / далее относящейся к постоянной Z/.

Полезно также рассмотреть это положение путем изучения перестановочных соотношений. Из /32/ или /63/ следует, используя /42/ и /60/

$$[\varphi(x),\varphi(y)]/ = \Big[\dot{\mathcal{U}}^{t}(x_0,t)\varphi_t(x)\mathcal{U}(x_0,t) + \mathcal{U}^{t}(x_0,t)\varphi_t(x)\dot{\mathcal{U}}(x_0,t)\varphi(y)\Big]\Big/_{x_0=y_0}$$

$$+\,\mathcal{U}^{+}(x_0,t)\,[\varphi_t(x),\varphi_t(y)]\,\mathcal{U}(x_0,t)\Big/_{x_0=y_0} =$$

/86/

$$= i\Big[\mathcal{U}^{+}(x_0,t)\big[P^i_0(x_0,t),\varphi_t(x)\big]\mathcal{U}(x_0,t),\varphi(y)\Big]\Big/_{x_0=y_0} - i\delta(\vec{x}-\vec{y}) = -i\,\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$

если мы допустим на последнем этапе, что $P^i_0(t)$ зависит только от самого оператора поля $\varphi_t(\vec{x}',t) = \varphi(\vec{x}',t)$ и не зависит от его производных по времени /в соответствии с /41/ и /19/ $P^i_0(x_0,t)$ может только зависеть от $\varphi_t(\vec{x}',x_0)$, так что

---

x/ Легко показать, что наше доказательство может быть распространено на случай, когда мы имеем более двух приходящих частиц, / где необходимо иметь дело с T - произведениями, ср. /9//, но который, однако, не представляет непосредственного физического интереса. Математически он полностью доказал бы, что унитарное преобразование между $\varphi(x)$ и $\varphi_{\substack{in\\out}}(x)$ возможно только в случае свободного поля out .

$$\left[P_0^i (x_0,t),\ \varphi_t\ (x) \right] = 0$$

выполняется[x]. Однако, /86/ не может быть справедливо, если $\varphi_{\substack{in\\out}}(x)$ имеет вид /15/, /15'/, где операторы свободного поля подчиняются /5/ в связи с требованием стабильности для одночастичных состояний. Мы должны иметь ($|0\rangle$ как и в /7/ и /81/ вектор состояния вакуума приходящих или уходящих свободных частиц).

$$\langle 0 | \left[\dot{\varphi}(x), \varphi(y) \right] | 0 \rangle \Big|_{x_0=y_0} = -i Z^{-1} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad /87/$$

где[xx]

$$Z^{-1} = \int d\mu^2 \rho(\mu^2) \geq 1 \qquad /88/$$

---

[x] /86/ справедливо также в более общих случаях, например, если $P_0^i(t)$ зависит еще и от первой производной по времени оператора поля первого порядка. Мы учитываем всегда только локальные взаимодействия, для которых /86/ может быть выполнено.

[xx] Мы исключаем случай, когда $Z = 0$. Он означал бы, что решение неоднородного уравнения Кляйна-Гордона не может иметь вид /12/, /12'/ или /29/ в теории квантованных полей, так как квантование /93/ для оператора свободного поля не имеет смысла. С другой стороны, /15/, /15'/ представляет собой предельный случай /12/ , /12'/ {отметим также, что предельные решения /15/, /15'/ могут быть всегда представлены в виде /12/, /12'/ при

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} \varphi_{in}(x) + \int_{-\infty}^{t} \Delta(x-y) j(y)\, dy & \text{при} \quad x_0 > t \\ \varphi_{out}(x) - \int_{t}^{+\infty} \Delta(x-y) j(y)\, dy & \text{при} \quad x_0 < t \end{cases}$$

что, очевидно, подчиняется /13/ и /14/}. Далее, он означал бы, что мы не можем исключить случай /который является более сингулярным, чем δ' функция/, когда из-за /87/ квазилокальные операторы, появляющиеся, например, в /108/, имеют бесконечные коэффициенты, (вероятно, явно выписанный член в /108/ не будет иметь смысла.)

$\rho(\mu^2)$ – хорошо известная спектральная функция Челлена[9] и Леманна[10], которая вытекает из разложения левой части /87/ по полному набору состояний с уходящими или приходящими свободными свободными частицами /ср. /84//. Для реально взаимодействующих полей она должна быть

$$Z^{-1} > 1, \qquad /89/$$

так как

$$Z^{-1} = 1 \qquad /89'/$$

вытекает из вклада устойчивых одночастичных состояний $\left(\rho(\mu^2) = \delta(\mu^2 - m^2)\right)$. /89/ было эквивалентно случаю, когда $\mathcal{U}_{o,in,out}\ (0, \mp\infty)$ не влияет на устойчивые состояния /ср. соображения в /84/ и далее, которые мы должны исключить в соответствии с рассмотрениями /84/ и далее. Только для вклада промежуточных одночастичных состояний в /87/ оператор $\mathcal{U}_{o\,\substack{in\\out}}\ (0, \mp\infty)$ не подвергается никакому влиянию в соответствии с /ср. /15'/, /15/, /25/ и /26//

$$\langle 0/\varphi(x)/\vec{q}\rangle = \langle 0/\varphi_{\substack{in\\out}}(x)/\vec{q}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2q_0}}; \qquad /90/$$

$$/\vec{q}\rangle = a^{*}_{\substack{in\\out}}(\vec{q})/0\rangle$$

так как

$$\langle 0/j(x)/\vec{q}\rangle = 0 \qquad /91/$$

/91/ следует из условия стабильности

$$\langle \vec{q}/S/\vec{q}\rangle = 1 \qquad /92/$$

чтобы показать это, используем перестановочное соотношение /1/

Из вышеприведенных рассуждений мы делаем вывод, что оператор свободного поля $\varphi_t(x)$ для конечного t должен быть квантован в соответствии с[x]

[x] Заметим, что /93/ как и /60/ дает /61/, /62/. У нас нет причин заявлять, что $\mathcal{U}(t,t')$ не унитарно для бесконечных времен. Но в предположении /93/ соотношения /86/ и /87/ совместимы для унитарного $\mathcal{U}(t,t')$, так как теперь коэффициент Z^{-1} появляется также в /86/.

$$[\varphi_t(x), \varphi_t(y)] = i Z^{-1} \Delta(x-y) \qquad /93/$$

в противоположность /60/ [и, следовательно, мы должны ввести тот же коэффициент в /26/] или в соответствии с предельным значением при $t \to \mp\infty$.

$$[\varphi_{\substack{in\\out}}(x_1), \varphi_{\substack{in\\out}}(y)] = i\Delta(x-y) \qquad /93'/$$

/96/ и /93/ показывают, что оператор $U_{x_0, \substack{in\\out}}$ $(x_0 \pm \infty)$, который связывает оператор взаимодействующего поля $\varphi(x)$ со свободными операторами in или out – поля $\varphi_{\substack{in\\out}}(x)$ может быть унитарным с точностью до постоянной Z. Таким образом, применение решений /15/, /15'/, где операторы свободного поля $\varphi_{\substack{in\\out}}(x)$ подчиняются /5/ вместе с условием стабильности /92/ или, вообще говоря, требование совместимости перестановочных соотношений /квантование/ с одной стороны, и свойства спектра масс и векторов состояния /гильбертово пространство/, с другой стороны, делает необходимым повторное определение квантования для оператора свободного поля $\varphi_t(x)$ при конечном t [x].

---

[x] Проблема существования унитарного оператора $U(0;\mp\infty)$ впервые разбиралась Хаагом 11 . Мы приняли следующую точку зрения: тогда как /93/ и /93'/ показывают, что в действительности не может существовать унитарное преобразование между оператором свободного поля $\varphi_t(x)$ или/ так как $\varphi(x)=\varphi(x)$ при $x_0=t$/ оператором взаимодействующего поля $\varphi^t(x)$ и свободными операторами in или out поля $\varphi_{\substack{in\\out}}(x)$, оно еще существует в соответствии с /93/ и /93'/ между $\varphi_t(x)$ или $\varphi(x)$ и $Z^{-1/2}\varphi_{in}(x)$ /или между перенормированным оператором $Z^{1/2}\varphi(x)$ и $\varphi_{\substack{in\\out}}(x)$. Очевидно, что соотношение унитарности для $U_{x,in,out}(x_0, \pm\infty)$ может быть соответственно справедливым только с точностью до коэффициента перенормировки, который, несомненно, является не столь важным для изучения условий интегрируемости для решений /15/ и /15'/ волнового уравнения /1/. Однако, следует также заметить, что совершенно неясно может ли квантование /93/, /93'/ , которое делает теорию справедливой только впоследствии, привести к теории, которая справедлива вообще /и, вероятно, она может быть справедливой только с точностью до коэффициента перенормировки Z /. Например, если мы учтем /93/, /93'/ в соответствии с /50/, свободная волновая часть должна быть умножена на коэффициент перенормировки $Z^{1/2}$, а также $j(x)$ в /58/, /58'/ оба в противоположность нашему предположению, сделанному при разборе /86/, который должен быть впоследствии изменен рассуждениями, аналогично /86/, которые могут быть повторены на бесконечности. Более того , всегда должно быть возможным заменить $U_{in,out}(x_0,\mp\infty)$ на $U_{x_0}(x_0,\mp\infty)$ /ср. сноску к /50//, но эти два оператора не могут быть тождественны в соответствии с /45/, если /93/, /93'/ учитываются. Заметим, что вытекает совершенно очевидно из вышеприведенных рассуждений, что мы всегда имеем дело только с эквивалентными обычными представлениями перестановочных соотношений, для которых вакуумные состояния существуют и которые связаны унитарными преобразованиями, рассматривающими вопрос в целом по постоянной как проблему перенормировки по постоянной Z , связанную непосредственно с адиабатической концепцией /ср. /93/,/93'//.

3/. Экстраполированные элементы S -матрицы

Вначале мы изучим положение, связанное с проблемой экстраполяции приведенных элементов S -матрицы на область вне оболочки массы в подходе к квантовой теории поля с применением функционального дифференцирования. Если мы запишем / 1/16/ в виде

$$\frac{\delta j(x)}{\delta \varphi_{in}(y)} = -i\left[j(x), j(y)\right] + \frac{\delta j(y)}{\delta \varphi_{in}(n)}; \qquad /94/$$

умножим это уравнение на $\theta_1(x,y)$ и прибавим справа и слева по члену $\theta_2(x,y)\frac{\delta j(x)}{\delta\varphi_{in}(y)}$, где $\theta_1(x,y)$ и $\theta_2(x,y)$ подчиняются соотношению

$$\theta_1(x-y) + \theta_2(x_1, y) = 1, \qquad /95/$$

мы получим

$$\frac{\delta j(x)}{\delta \varphi_{in}(y)} = -i\theta_1(x,y)\left[j(x), j(y)\right] + \theta_1(x,y)\frac{\delta j(y)}{\delta\varphi_{in}(x)} + \theta_2(x,y)\frac{\delta j(x)}{\delta\varphi_{in}(y)}; \qquad /96/$$

Перестановочное соотношение 1/32 принимает тогда вид

$$\left[a_{in}(\vec{q}), (x)\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dy\, \frac{e^{iqy}}{\sqrt{2q_0}}\, \frac{\delta j(x)}{\delta\varphi_{in}(y)} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dy\, \frac{e^{iqy}}{\sqrt{2q_0}} \times$$

$$\times\left\{-i\theta_1(x,y)\left[j(x), j(y)\right] + \theta_1(x,y)\frac{\delta j(y)}{\delta\varphi_{in}(x)} + \theta_2(x,y)\frac{\delta j(x)}{\delta\varphi_{in}(y)}\right\}; \qquad /97/$$

$$q_0 = \sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}}$$

Если мы выберем $\theta_1(x,y)$ как обычную функцию на этом этапе

$$\theta_1(x,y) = \theta(x-y), \qquad /98/$$

так что в соответствии с /95/

$$\theta_2(x,y) = 1 - \theta(x-y) = \theta(y-x), \qquad /99/$$

– мы получаем для причинной теории из /97/ в соответствии с /8/

$$\left[a_{in}(\vec{q}), j(x)\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dy \frac{e^{iqy}}{\sqrt{2q_0}} \left\{-i\theta(x-y)\left[j(x), j(y)\right]\right\}; \; q_0 = \sqrt{m^2+\vec{q}^2} \qquad /100/$$

при $\left[j(x), j(y)\right] = 0$ и $x \sim y$ /ср. 1/18/ /, до членов, полученных из соответствующих операторов. Несомненно, в этом случае мы можем также иметь дело с более общим представлением /97/ и важно что это возможно /без введения изменений/, если мы экстраполируем /97/ на область вне оболочки массы в соответствии с идеей Боголюбова

$$m^2 \longrightarrow \tau \qquad /101/$$

как исходной точкой для адиабатического продолжения соответствующих матричных элементов /100/ по q_0 [3/]. Причина в том, что /96/ само является простым тождеством, которое не справедливо только на оболочке массы в /97/, т.е. выбор θ – функции не влияет на экстраполированные соотношения.

В подходе к квантовой теории поля с использованием оператора взаимодействующего поля мы сталкиваемся с совершенно другим положением. Здесь причинные свойства теории поля выражены через[x/]

$$\left[\varphi(x), \varphi(y)\right] = 0, \text{ если } x \sim y, \qquad /64/$$

а в 1 показано, что в приведенной формуле 1/29/, выведенной путем применения асимптотического условия[xx/]

$$\left[a_{in}(\vec{q}), j(x)\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dy \frac{e^{iqy}}{\sqrt{2q_0}} (\Box_y - m^2)\left\{-i\,\theta_{ret}(x,y)(\Box_x - m^2)\left[\varphi(x), \varphi(y)\right]\right\}; \quad q_0 = +\sqrt{m^2+\vec{q}^2} \qquad /102/$$

функция $\theta_{ret}(x,y)$ может быть определена только граничными значениями

$$\lim_{y_0 \to \mp\infty} \theta_{ret}(x,y) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \qquad /103/$$

---

x/ Мы полагаем здесь, что /64/ является условием на формализм, которое важно для аналитического поведения приведенных элементов S –матрицы.

xx/ Мы записываем здесь в более общем виде $\theta_{ret}(x,y)$ вместо $\theta(x-y)$.

с исчезающими производными $\frac{\partial}{\partial y_0} \theta_{ret}(x,y)$ в этих пределах[x/]. Если мы, однако, экстраполируем /102/ на область вне оболочки массы в соответствии с /101/, появляются дополнительные члены, зависящие от $\theta_{ret}(x,y)$, что делает аналитическое продолжение соответствующих матричных элементов /102/ по q, в основном, невозможным.

Мы можем изучить это следующим образом. Прежде всего ясно, что в соответствии с /103/ мы можем прибавить к данной функции $\theta_{ret}(x,y)$ в /102/ произвольную дополнительную функцию $\theta_a(x,y)$, подчиняющуюся граничному условию $\lim_{y_0 \to \mp\infty} \theta_a(x,y) = 0$ (104) с исчезающими производными $\frac{\partial}{\partial y_0} \theta_a(x,y)$, $y_0 \to \mp\infty$ в этих пределах. Причина следующая: на оболочке массы соотношение

$$(\Box_y - m^2)\, e^{iqy} = 0; \quad q_0 = +\sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}} \qquad /105/$$

справедливо[xx/]. Однако, если мы экстраполируем вне оболочки массы в соответствии с /101/, соотношение /105/ примет вид:

$$(\Box_y - \tau)\, e^{iqy} = 0; \quad q_0 = +\sqrt{\tau + \vec{q}^{\,2}}, \qquad /106/$$

а вклад от функции $\theta_a(x,y)$ приведет соответственно к дополнительному члену

---

x/ Отметим, что частичное интегрирование на последнем этапе 1/27/ не подвергается влиянию зависимости $\theta_{ret}(x,y)$ от непосредственных координат $\vec{y}$. Для зависимости от x нет условия /пока /103/ не нарушено/.

xx/ Строго говоря, это правильно только в том случае, если мы заменим плоские волны в /102/ соответствующими волновыми пакетами с положительной энергией; сравни преобразование в 1/27/.

$$(\tau - m^2)\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dy\,\frac{e^{iqy}}{\sqrt{2q^0}}\left\{-i\theta_a(x,y)\left[j(x),\varphi(y)\right]\right\}; \qquad q_0 = +\sqrt{\tau+\vec{q}^{\,2}} \qquad /107/$$

в экстраполированном соотношении /102/.

Если мы выбираем в /102/ $\theta_{ret}(x,y)$ как обычную функцию, мы получаем

$$\left[a_{in}(\vec{q}), j(x)\right] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dy\,\frac{e^{iqy}}{\sqrt{2q_0}}\left\{-i\theta(x-y)\left[j(x),j(y)\right]\right\}; \qquad q_0 = +\sqrt{m^2+\vec{q}^{\,2}} \qquad /108/$$

при $[j(x),j(y)]=0$ и при $x \sim y$ /ср. /64//, с точностью до вкладов от некоторых квазилокальных операторов. /108/ эквивалентно соотношению /100/. Если экстраполирование выполнено вне оболочки массы, аналитическое продолжение соответствующих матричных элементов /108/ может быть проделано обычным образом[3]. Однако, использование других функций приводит к появлению дополнительных членов вида /107/, которые ввиду условия /104/ делают вообще невозможным аналитическое продолжение матричных элементов экстраполированного соотношения /102/ по q [x]. Но так как в соответствии с /107/ эти неаналитические вклады приводят к нулевым вкладам на оболочке массы/нас интересует только конечный результат для $\tau \to m^2$/, то они на самом деле являются ложными: у нас нет необходимости их продолжать аналитически.

Итак, мы показали, что оба подхода приводят, в основном, к различным экстраполяциям приведенных элементов S -матрицы вне оболочки массы: та часть, которая может быть аналитически продолжена, определена условием причинности Боголюбова и соответствует особому выбору θ -функции в подходе с использованием оператора взаимодействующего поля.

---

[x] Отметим, что экстраполированные соотношения 1/28/, 1/29/, которые мы не можем различать априорно, отличаются также друг от друга членами вида /107/.

4. Условие причинности в подходе с использованием оператора взаимодействующего поля

В заключение мы показываем, что условие причинности для оператора взаимодействующего поля в виде коммутатора не имеет значения для аналитического поведения приведенных элементов S -матрицы в подходе с использованием оператора взаимодействующего поля по теории дисперсионных соотношений. С этой целью мы рассматриваем элемент S -матрицы для упругого рассеяния /ср. /80/, /83//.

$$ {}_{out}\langle q_3, q_4 | q_1, q_2 \rangle_{in} = \delta_{q_3, q_4; q_1, q_2} + {}_{out}\langle q_3, q_4 | R | q_1, q_2 \rangle_{out} \qquad /109/ $$

при

$$ {}_{out}\langle q_3, q_4 | R | q_1, q_2 \rangle_{out} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dx\, dy \, \frac{e^{-iq_1 x - iq_2 x}}{2\sqrt{q_{1,0}\, q_{2,0}}} (\Box_x - m^2)(\Box_y - m^2) \times $$

$$ \times\, \theta_{adv}(x,y)\, {}_{out}\langle q_3, q_4 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle ; \quad q_{i,0} = +\sqrt{m^2 + \vec{q}_j^{\,2}}, \qquad /110/ $$

где функция $\theta_{adv}(x,y)$ должна только удовлетворять условию /103/ при перестановке пределов /прошедшее и будущее/. Предположим, что оператор поля $\varphi(x)$ является непричинным, т.е.

$$ [\varphi(x), \varphi(y)] \neq 0 \quad , \text{ если } \; x \sim y \qquad /111/ $$

Теперь мы выбираем функцию $\theta_{adv}(x,y)$ так, что она исчезает для пространственно-подобно удаленных точек

$$ \theta_{adv}(x,y) = 0 \quad , \text{ если } \; x \sim y . \qquad /112/ $$

Этот вектор совместим с условием /103/ при перестановке пределов, так как пространственно-подобная часть $(x-y)$ исчезает при $y_0 = \mp\infty$ /такие точки $|x-y|$, которые могут вносить вклад на плоскостях $y_0 = \mp\infty$ лежат асимптотически на световом конусе: они имеют бесконечные значения точек $\vec{x}$ или $\vec{y}$

в обычном пространстве, где, кроме того, оператор поля $\varphi(x), \varphi(y)$ сам исчезает[x/]. Для временно-подобных точек $(x-y)$ мы выбираем $\theta_{adv}(x,y)$ так, что он равен единице в заднем световом конусе и равен нулю в переднем световом конусе в $(x-y)$ – пространстве, что находится в соответствии со /103/ при перестановке пределов. Это показывает, что всегда возможно записать /110/ в таком виде, что оно будет представлять Фурье-образ функции $f(x,y)$, которая отлична от нуля только в заднем световом конусе $(x-y)$. Но это свойство подразумевает все, что нужно получить от условия причинности в теории дисперсионных соотношений.

В самом деле, мы не считаем, что соотношение /110/, выведенное из применения асимптотического условия, имеет произвольный смысл в непричинной теории поля[xx/]. Кажется очевидным, что причинный характер теории принимается априорно при выведении формулы /110/.

Если сделать первое приведение в /109/ в соответствии с соотношением /ср. 1/21//

$$a_{in}(\vec{q}) = a_{out}(\vec{q}) + \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int dx \, \frac{e^{iqx}}{\sqrt{2q_0}} \, j(x) \qquad /114/$$

то видно непосредственно, что необходимо решить волновое уравнение /1/ для проведения дальнейших операций в /110/. Во втором приведении принимается, что решение $\varphi(y)$ имеет хорошо определенное асимптотическое поведение при $y_0 \to +\infty$ и кажется маловероятным, что $\varphi(y)$ может быть другим

---

x/ Строго говоря, мы должны для этого заменять всегда плоские волны решениями волнового пакета положительной энергии / для $\varphi(x)$ принимаем разложение в виде 1/25/, подразумеваемое для волновых групповых решений/ Только в конечных результатах мы переходим к предельному случаю плоских волн /ср. 2/. Далее заметим для случая возможных особенностей в пространственно подобных областях, что, как обычно принимается, интеграл по ним при конечной θ -функции определен.

xx/ В противном случае дисперсионные соотношения были бы справедливы как для причинной, так и для непричинной теории поля, что противоречит результатам подхода с использованием вариационной производной. Заключение о том, что вклады от пространственно подобных расстояний коммутатора /111/ не могут иметь какого-либо смысла в приведенной формуле подхода с использованием оператора взаимодействующего поля может быть также получено из требования ковариантности /аргументации, использованная в 1/.

решением, таким, например, как опережающее, которое принимает условие причинности Боголюбова /8/ как необходимое условие интегрируемости в соответствии с разделом 2.

В любом случае условие причинности /64/ не может толковаться как условие на приведенный элемент S -матрицы /110/, которое важно для его аналитического поведения по теории дисперсионных соотношений. Если необходимо изучить следствия возможной непричинной структуры квантовой теории поля, что является важной физической задачей также в рамках теории дисперсионных соотношений, нужно использовать формулу приведения для элементов S матрицы, полученных в подходе с использованием функционального дифференцирования.

Я хотел бы поблагодарить академика Боголюбова и Медведева, а также профессора Леманна и доктора Симанзика за ценные обсуждения, которые оказали большое влияние на настоящую работу. Я также очень благодарен профессору Дреллу за его большой интерес к работе.

Приложение

Мы выведем некоторые соотношения, которые справедливы для представления при произвольном t. Выполним

$$\underset{in}{<} n'/S/n>_{in} \; \underset{out}{<} n'/S/n>_{out} = < \Psi^{0}_{n'}(t)/S_t/\Psi^{0}_{n}(t)>, \qquad /A.1/$$

где

$$\Psi^{0}_{n}(t) = U^{+}_{\substack{in\\out}}(t_1 \mp \infty)/n>_{\substack{in\\out}} \qquad /A.2/$$

и /ср. /3/ и /4/

$$S_t = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 \ldots dx_n f_n(x_1, \ldots, x_n); \; \varphi_t(x_1) \ldots \varphi_t(x_n); \qquad /A.3/$$

$$S_t S_t^{+} = S_t S_t = 1$$

с /ср. /38//

$$\varphi_t(x) = \overset{+}{\mathcal{U}}_{\substack{in\\out}}(t, \mp\infty)\, \varphi_{\substack{in\\out}}(x)\, \mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(t, \mp\infty) \qquad /A.4/$$

Отметим, что по причине /45/[x/]

$$\mathcal{U}_{\substack{in\\out}}(t, \mp\infty) = \mathcal{U}_t(t, \mp\infty) \qquad /A.5/$$

Для матричных элементов $\varphi(x)$ мы запишем

$$\langle n'/\varphi/(x)/n\rangle_{\substack{in\\out}} = \langle \mathcal{U}_t(t, \mp\infty)\, \psi^{o}_{n'}(t)/\varphi(x)\, \mathcal{U}_t(t, \mp\infty)\, \psi^{o}_{n}(t)\rangle \qquad /A.6/$$

так как в соответствии с /А.2/ и /А.5/

$$\mathcal{U}_t(t, \mp\infty)\, \psi^{o}_{n}(t) = /n\rangle_{\substack{in\\out}} \qquad /A.7/$$

и где мы можем использовать в правой части /А.6/, применяя /32/ и /17/

$$\varphi(x) = \mathcal{U}^{+}_{t}(x_0, t)\, \varphi_t(x)\, \mathcal{U}_t(x_0, t) = e^{iP_0(x_0 - t)}\, \varphi(\vec{x}, t)\, e^{-iP_0(x_0 - t)} \qquad /A.8/$$

как оператор взаимодействующего поля, соответствующий $\varphi(x)$-представлению. В соответствии с /21/ мы имеем для /А.7/

$$P^{o}_{0,in,out}\, \mathcal{U}_t(t, \mp\infty)\, \psi^{o}_{n}(t) = P^{(n)}_{o}\, \mathcal{U}_t(t, \mp\infty)\, \psi^{o}_{n}(t);\; P^{o}_{o}(t)\, \psi^{o}_{n}(t) = \qquad /A.9/$$

где, очевидно, /ср./37//

$$= P^{(n)}_{o}\, \psi^{o}_{n}(t)$$

[x/] Для $\mathcal{U}_{x,in,out}(t, \mp\infty)$ мы можем также иметь ввиду представления вида /3/ или /23/, для которых /45/ тривиально из-за /38/. Здесь мы пренебрегаем как обычно фактом, что $\mathcal{U}_{in,out}(t, \mp\infty)$ может быть унитарным с точностью до постоянной /если принять во внимание то, что всегда необходимо заменить $\varphi(x_i)$ на $Z^{1/2}\varphi t(x_i)$ или отбрасывать Z -коэффициент в /93/ и нормировать состояния $\psi^{o}_{n}(t)$; см. также сноску в конце раздела 2/.

$$\rho_0^0(t) = \mathcal{U}_t^+(t, \mp\infty)\,\rho^0_{0,in,out}\,\mathcal{U}_t(t, \mp\infty). \qquad /A.10/$$

При $t=0$ обычное представление взаимодействия [x] /A.9/ принимает вид

$$\rho_{0,in,out}\,\mathcal{U}_0(0, \mp\infty)\,\Psi_n^0(0) = \rho_0^{(n)}\,\mathcal{U}_0(0, \mp\infty)\,\Psi_n^0(0). \qquad /A.11/$$

Сравнивая это с /72/, мы приходим к тому, что $\rho^0_{0,in,out}$ должно быть отождествлено с ρ_0, как было установлено в /27/.

В заключение мы выводим условия причинности, справедливые в t -представлении. Для конечного t /54/, /54'/ имеет вид[xx]

$$\varphi(x) = \varphi_t(x) + i\int dy\,\Delta(x-y)\,\mathcal{U}_t^+(x_0, t)\,\frac{\delta\mathcal{U}_t(x_0,t)}{\delta\varphi_t(y)} \quad \text{при } x_0 > t \qquad /A.12/$$

$$\varphi(x) = \varphi_t(x) - i\int dy\,(x-y)\,\frac{\delta\mathcal{U}_t(t,x_0)}{\delta\varphi_t(y)}\,\mathcal{U}_t^+(t,x_0) \quad \text{при } x_0 < t \qquad /A.12'/$$

Как в разделе 2 мы принимаем "собственное условие причинности"

$$\frac{\delta\mathcal{U}_t(x_0,t)}{\delta\varphi_t(y)} = 0, \quad \text{если} \quad y_0 > x_0 > t$$

$$\frac{\delta\mathcal{U}_t(t,x_0)}{\delta\varphi_t(y)} = 0, \quad \text{если} \quad y_0 < x_0 < t \qquad /A.13'/$$

---

x/ Этот случай см. также в /12/.

xx/ Для квантования в соответствии с /93/ интегральные члены в /A.12/, /A.12'/ должны быть умножены на χ^{-1}. Так как этот коэффициент не является важным для изучения условий интегрируемости для решений /12/, /12'/ волнового уравнения /1/, мы отбрасываем его как и в разделе 2.

и условие причинности

$$\frac{\delta j(y)}{\delta \varphi_t(z)} = \frac{\delta}{\delta \varphi_t(z)} \left\{ i\, U_t^+(x_0,t) \frac{\delta U_t(x_0,t)}{\delta \varphi_t(y)} \right\} = 0, \text{ если } z_0 > x_0 > y_0 > t \qquad /A.14/$$

$$\frac{\delta j(y)}{\delta \varphi_t(z)} = \frac{\delta}{\delta \varphi_t(z)} \left\{ i\, \frac{\delta U_t(t,x_0)}{\delta \varphi_t(y)} U_t^+(t,x_0) \right\} = 0, \text{ если } z_0 < x_0 < y_0 < t \qquad /A.14'/$$

как необходимые условия интегрируемости для запаздывающих или опережающих решений /12/, /12'/. Отметим также формулу

$$j(x) = i S^+ \frac{\delta S}{\delta \varphi_{in}(x)} = i \frac{\delta S}{\delta \varphi_{out}(x)} S^+ = \qquad /A.15/$$

$$= i\, U_t(t,-\infty) S_t^+ \frac{\delta S_t}{\delta \varphi_t(t)} U_t^+(t,-\infty) = i\, U_t^+(+\infty,t) \frac{\delta S}{\delta \varphi_t(x)} S_t^+ \left(U_t(+\infty,t) \right),$$

которая очевидна ввиду /3/, /A.3/ и /A.4/. Для оператора

$$j_t(x) = i\, S_t \frac{\delta S_t}{\delta \varphi_t(x)} = i \frac{\delta S_t}{\delta \varphi_t(x)} S_t^+, \qquad /A.16/$$

где

$$\varphi_t(x) = S_t^+ \varphi_t(x) S_t, \quad S_t = S_t \qquad /A.17/$$

/ср. /A.3// мы получаем из /8/, /8'/ и /A.3/ и /A.4/ условие причинности

$$\frac{\delta j_t(x)}{\delta \varphi_t(y)} = 0 \quad , \text{ если } \quad y \gtrsim x \qquad /A.18/$$

$$\frac{\delta j_t(x)}{\delta \varphi_t(y)} = 0 \quad , \text{ если } \quad y \lesssim x, \qquad /A.18'/$$

которое необходимо при выведении приведенной формулы для S матрицы в t -представлении.

Литература

1. F. Kaschluhn Nuovo Cim., 12, 541 (1959).
2. H. Lehmann, K.Symanzik and W. Zimmermann. Nuovo Cim., 6, 319 (1957).
3. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К.А Поливанов "Проблемы теории дисперсионных соотношений". Москва, 1959, сокращенный перевод на нем. языке в Fortschr. der Phys. 6, 169, (1958).
4. Y. Okabayashi. Suppl. Nuovo Cim., 9, 599 (1958).
5. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Успехи физических наук, 55, 149 /1955/. На нем.языке Fortschr. der Phys. 3, 439 (1955) p. 458
6. F. Kaschluhn Nucl. Phys. (in press).
7. C.N. Yang and D. Feldman. Phys.Rev., 91, 972 (1950).
8. M. Gell-Mann and M.L. Goldberger. Phys.Rev., 91, 398 (1953).
9. G. Kallen, Helv.Phys.Acta, 25, 417 (1952).
10. H. Lehmann. Nuovo Cim., 11, 342 (1954).
11. R. Haag, Kgl. Danske Vid. Selsk. 29, N 12 (1955), D. Hall, A.S. Wightman, Kgl.Danske Vid. Selsk. 31, N 5 (1957)., O.W. Greenberg, Phys.Rev.Lett. 3, 159 (1959).
12. S.S. Schweber. Nuovo Cim., 2, 397 (1955).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 апреля 1960 года.