ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Р-511

Н.Н. Боголюбов

К ВОПРОСУ О МОДЕЛЬНОМ ГАМИЛЬТОНИАНЕ В ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Дубна - 1960 год

С о д е р ж а н и е

§ 1. Постановка задачи

Простейшая модельная система, рассматриваемая в теории сверхпроводимости, характеризуется гамильтонианом, в котором оставлено взаимодействие частиц лишь с противоположными импульсами и спинами:

$$H = \sum_{f} T(f) a_f^+ a_f - \frac{1}{2V} \sum_{f,f'} \lambda(f)\lambda(f') a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'} \qquad /1.1/$$

где $f=(p,s)$, $s=\pm 1$; p - вектор импульса. При фиксировании $V=L^3$:

$$p_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi}{L} n_z$$

n_x, n_y, n_z - целые числа.

$$-f = (-p, -s).$$

Наконец

$$T(f) = \frac{p^2}{2m} - \mu, \qquad \text{где} \quad \mu > 0 \quad \text{- химический потенциал,}$$

$$\lambda(f) = \begin{cases} J, & \text{для } \left| \frac{p^2}{2m} - \mu \right| \leqq \Delta \\ 0, & \text{для } \left| \frac{p^2}{2m} - \mu \right| > \Delta . \end{cases}$$

Применение метода Бардина-Купера-Шриффера [1] и метода компенсации опасных диаграмм приводит в данном случае к одинаковому результату.

Более того, в заметке [2] было показано, что гамильтониан типа /1.1/ представляет сам по себе большой методический интерес, так как здесь мы имеем одну из весьма немногих полностью решаемых задач статистической физики.

В упомянутой заметке было установлено, что для этой задачи мы можем получить асимптотически точное /при $V \to \infty$ / выражение свободной энергии.

Этот результат там был найден следующим образом: гамильтониан /1.1/ особым способом разбивался на две части H_0 и H_1. Задача с гамильтонианом H_0 решалась точно. Для учета влияния H_1 применялась теория возмущений. Показывалось, что любой n-ый член соответствующего разложения становится асимптотически малым при $V \to \infty$, в связи с чем и делалось заключение о том, что влиянием H_1 можно вообще пренебречь, после предельного перехода $V \to \infty$. Разумеется, рассуждения такого рода не могут претендовать на математическую строгость, но надо однако подчеркнуть, что в задачах статистической физики часто используются еще более грубые приемы. Весьма распространенными, например, являются приближенные методы, основанные на избирательном суммировании в каком-то смысле "главных членов" ряда теории возмущений, причем остальные члены, хотя они даже и не стремятся к нулю при $V \to \infty$, отбрасываются.

Сомнения в справедливости результатов заметки [2] возникли и в связи с тем, что различные попытки использовать обычную диаграммную технику Фейнмана /без учета "аномальных спариваний" $\overbrace{a_f\, a_{-f}}$, $\overbrace{a^+_{-f}\, a^+_f}$, к которым приводит каноническое u, v - преобразование/ не давали ожидаемого результата.

Больше того, в работе [3] автор, основываясь на суммировании некоторого класса диаграмм Фейнмана, получает решение принципиально отличное от решения, полученного в статьях [1], [2], и считает эти последние неверными.

В связи с таким положением, в работе [4] была изучена цепочка зацепляющихся уравнений для функций Грина без применения теории возмущений. Здесь было показано, что функции Грина для гамильтониана H_0 удовлетворяют всей этой цепочке уравнений для точного гамильтониана $H = H_0 + H_1$ с ошибкой порядка $\frac{1}{V}$. Этим подтверждаются результаты заметки [2] и выявляется "неэффективность" добавки H_1.

Однако можно стать и на чисто математическую точку зрения. Как только мы фиксировали гамильтониан, скажем в форме /1.1/, мы имеем уже вполне определенную математическую задачу, которую и следует решать строго, без каких-то бы ни было "физических предположений". Мы не должны тогда удовлетворяться тем, что приближенные выражения удовлетворяют точным уравнениям с погрешностью порядка $\frac{1}{V}$, и нам следует оценить разность между самыми точными и приближенными выражениями.

Имея ввиду полное прояснение вопроса о поведении динамической системы с гамильтонианом /1.1/, мы и станем в настоящей работе именно на такую чисто математическую точку зрения.

Мы будем изучать гамитониан /1.1/, при температуре $\theta = 0$, и строго покажем, что относительная разность $\frac{E-E_0}{E_0}$ между наименьшими энергетическими уровнями H и H_0 , а также между соответствующими функциями Грина стремится к нулю, при $V \to \infty$ и получим надлежащие оценки для порядка убывания.

Из методических соображений нам будет удобно рассматривать несколько более общий гамильтониан, содержащий члены, представляющие источники для рождения и уничтожения пар:

$$\mathcal{H} = \sum_f T(f)\, a_f^+ a_f - \nu \sum_f \frac{\lambda(f)}{2} \left(a_{-f}\, a_f + a_f^+\, a_{-f}^+ \right) - \qquad /1.2/$$

$$- \frac{1}{2V} \sum_{f,f'} \lambda(f) \lambda(f')\, a_f^+\, a_{-f}^+\, a_{-f'}\, a_{f'},$$

где ν параметр, который мы будем считать большим или равным нулю.

Заметим, что случай $\nu < 0$ рассматривать не надо, так как он приводится к случаю $\nu > 0$ тривиальным изменением калибровки ферми-операторов:

$$a_f \to i\, a_f \; ; \qquad a_f^+ \to -i\, a_f^+ .$$

Подчеркнем, что случай $\nu > 0$ будет рассматриваться исключительно из тех соображений, что он представляет интерес для понимания ситуации в реальном случае $\nu = 0$.

Для предпринимаемого исследования нам не будут нужны те конкретные свойства функций $\lambda(f)$, $T(f)$, о которых говорилось выше.

Вполне достаточно будет выполнение следующих общих условий:

1/ Функции $\lambda(f)$, $T(f)$ вещественны, кусочно непрерывны, обладают условиями симметрии:

$$\lambda(-f) = -\lambda(f); \quad T(-f) = T(f)$$

2/ $\lambda(f)$ равномерно ограничена во всем пространстве,

$$T(f) \to \infty \quad \text{при} \quad |f| \to \infty$$

3/

$$\frac{1}{V}\sum_f |\lambda(f)| \leqq Const \quad V \to \infty$$

4/

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{2V}\sum_f \frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)x + T^2(f)}} > 1$$

для достаточно малых положительных x.

Представим $H(1,2)$ в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + H_1, \qquad /1.3/$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \sum_f T(f)\, a_f^+ a_f - \frac{1}{2}\sum_f \lambda(f)\left\{(\nu+\overset{*}{G})a_{-f}a_f + (\nu+G)\, a_f^+ a_{-f}^+\right\} + \frac{|G|^2 V}{2} \qquad /1.4/$$

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2V}\left(\sum_f \lambda(f)\, a_f^+ a_{-f}^+ - VG^*\right)\left(\sum_f \lambda(f)\, a_{-f} a_f - VG\right), \qquad /1.5/$$

где G – некоторое комплексное число.

Заметим, что если G определить из условия минимума наименьшего собственного значения $\mathcal{H}_0$, а H_1 отбросить, то мы придем к хорошо известному приближенному решению, рассматривавшемуся в упоминавшихся работах [1], [2], [4]. Наша задача здесь будет состоять в нахождении оценок для отклонения минимальных собственных значений $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}$ и для отклонения соответствующих функций Грина.

Мы покажем, что эти отклонения будут исчезать в процессе предельного перехода $V \to \infty$.

§ 2. Общие свойства гамильтониана

1. В этом параграфе мы установим некоторые общие свойства модельного гамильтониана $\mathcal{H}$ /1.2/. Рассмотрим числа заполнения

$$n_f = a_f^+ a_f$$

и покажем, что разности $n_f - n_{-f}$ являются интегралами движения. Действительно,

$$a_{-f} a_f \left(n_f - n_{-f}\right) - \left(n_f - n_{-f}\right) a_{-f} a_f = 0,$$

а также

$$a_f^+ a_{-f}^+ \left(n_f - n_{-f}\right) - \left(n_f - n_{-f}\right) a_f^+ a_{-f}^+ = 0$$

поэтому

$$\mathcal{H}\left(n_f - n_{-f}\right) - \left(n_f - n_{-f}\right)\mathcal{H} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(n_f(t) - n_{-f}(t)\right) = 0. \qquad /2.1/$$

2. Покажем, что для волновой функции Φ_H, соответствующей наименьшему собственному значению гамильтониана $\mathcal{H}$, можем положить:

$$\left(n_f - n_{-f}\right)\Phi_H = 0 \qquad /2.2/$$

при любом f.

Для доказательства этого допустим обратное. Так как $\left(n_f - n_{-f}\right)$ коммутируют с $\mathcal{H}$ /и друг с другом/, мы всегда можем выбрать $\Phi_{\mathcal{H}}$ так, чтобы она являлась собственной функцией для всех этих операторов:

$$n_f - n_{-f} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}.$$

Обозначим через K_0, K_+, K_-, соответственно, совокупность индексов f, для которых

$$(n_f - n_{-f})\,\Phi_H = 0 \qquad f \in K_0$$

$$(n_f - n_{-f} - 1)\,\Phi_H = 0 \qquad f \in K_+$$

$$(n_f - n_{-f} + 1)\,\Phi_H = 0 \qquad f \in K_-$$

Наше допущение сводится к тому, что множества K_+, K_- не пустые, и что[x/]

$$\langle \Phi_H^* \mathcal{H} \Phi_H \rangle \leqq \langle \varphi^* \mathcal{H} \varphi \rangle$$

для любой функции φ.

Потребуем далее, чтобы φ удовлетворяла дополнительным условиям:

$$(n_f - n_{-f})\,\varphi = 0. \qquad /2.3/$$

Заметим теперь, что если $f \in K_+$, то

$$n_f = 1; \quad n_{-f} = 0,$$

а если $f \in K_-$, то

$$n_f = 0; \quad n_{-f} = 1.$$

Поэтому Φ_H можно представить в виде прямого произведения

$$\Phi_H = \Phi_{K_0}\,\Phi_{K_+}\,\Phi_{K_-},$$

где

$$\Phi_{K_+} = \prod_{f \in K_+} \delta(n_f - 1)\,\delta(n_{-f}); \quad \Phi_{K_-} = \prod_{f \in K_-} \delta(n_f)\,\delta(n_{-f} - 1),$$

а Φ_{K_0} является функцией только тех n_f, у которых $f \in K_0$

$$\Phi_{K_0} = F(\ldots n_f \ldots); \quad \langle \Phi_{K_0}^+ \Phi_{K_0} \rangle = 1 \qquad f \in K_0.$$

[x/] Символом $\langle \Phi^* \Psi \rangle$ будет обозначать скалярное произведение функций Φ и Ψ.

Заметим далее, что

$$a_{-f}a_f\,\delta(n_f-1)\,\delta(n_{-f})=0\,;\qquad a_{-f}a_f\,\delta(n_f)\,\delta(n_{-f}-1)=0\,;$$

$$a_f^+\,a_{-f}^+\,\delta(n_f-1)\,\delta(n_{-f})=0\,;\qquad a_f^+\,a_{-f}^+\,\delta(n_f)\,\delta(n_{-f}-1)=0\,;$$

поэтому

$$a_{-f}\,a_f\,\Phi_{K_+}\,\Phi_{K_-}=0\,;\qquad a_f^+\,a_{-f}^+\,\Phi_{K_+}\,\Phi_{K_-}=0$$

если $f\in K_+$ или K_-.

Следовательно,

$$H\Phi_H=\Big\{\sum_{f\in K_+}T(f)+\sum_{f\in K_-}T(f)+\sum_{f\in K_0}T(f)\,n_f-\frac{\nu}{2}\sum_{f\in K_0}\frac{\lambda(f)}{2}\left(a_{-f}a_f+a_f^+a_{-f}^+\right)-$$

$$-\frac{1}{2V}\sum_{f\in K_0}\sum_{f'\in K_0}\lambda(f)\,\lambda(f')\,a_f^+a_{-f}^+\,a_{-f'}\,a_{f}\Big\}\,\Phi_H.$$

И стало быть

$$\langle\,\Phi_H^*\,\mathcal{H}\,\Phi_H\,\rangle=\sum_{f\in K_+}T(f)+\sum_{f\in K_-}T(f)+$$

$$+\langle\,\Phi_{K_0}^*\Big\{\sum_{f\in K_0}T(f)\,n_f-\frac{\nu}{2}\sum_{f\in K_0}\frac{\lambda(f)}{2}\left(a_{-f}\,a_f+a_f^+\,a_{-f}^+\right)-$$

$$-\frac{1}{2V}\sum_{f\in K_0}\sum_{f'\in K_0}\lambda(f)\,\lambda(f')\,a_f^+\,a_{-f}^+\,a_{-f'}\,a_{f'}\Big\}\,\Phi_{K_0}\,\rangle.$$

Разделим теперь множество $K_+ + K_-$ на два множества Q_+ и Q_-

$$K_+ + K_- = Q_+ + Q_-$$

таким образом, что в Q_+ войдут те индексы f из $K_+ + K_-$, для которых $T(f) \geqq 0$, а в Q_- –те из $K_+ + K_-$, для которых $T(f) < 0$.

Ввиду симметрии $T(f) = T(-f)$ индекс f входит в Q_+ или Q_- всегда одновременно с $-f$.

Имеем

$$\langle \Phi_H^* \mathcal{H} \Phi_H \rangle = \sum_{f \in Q_+} |T(f)| - \sum_{f \in Q_-} |T(f)| +$$

$$+ \langle \Phi_{K_0}^* \Big\{ \sum_{f \in K_0} T(f) n_f - \frac{\nu}{2} \sum_{f \in K_0} \frac{\lambda(f)}{2} (a_{-f} a_f + a_f^+ a_{-f}^+) -$$

$$- \frac{1}{2V} \sum_{f \in K_0} \sum_{f' \in K_0} \lambda(f) \lambda(f') a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'} \Big\} \Phi_{K_0} \rangle .$$

Построим теперь функцию φ также в виде простого произведения, положив:

$$\varphi = \Phi_{K_0} \Phi_{Q_+} \Phi_{Q_-},$$

где

$$\Phi_{Q_+} = \prod_{f \in Q_+} \delta(n_f) \delta(n_{-f}); \qquad \Phi_{Q_-} = \prod_{f \in Q_-} \delta(n_f - 1) \delta(n_{-f} - 1).$$

/Здесь именно существенно, что f одновременно с $-f$ принадлежит Q_+ или Q_- /. Для такой функции:

$$\langle \varphi^* \mathcal{H} \varphi \rangle = -2 \sum_{f \in Q_-} |T(f)| + \langle \Phi_{K_0}^* \Big\{ \sum_{f \in K_0} T(f) n_f - \frac{\nu}{2} \sum_{f \in K_0} \frac{\lambda(f)}{2} \times$$

$$\times (a_{-f} a_f + a_f^+ a_{-f}^+) - \frac{1}{2V} \sum_{f \in K_0} \sum_{f' \in K_0} \lambda(f) \lambda(f') a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'} \Big\} \Phi_{K_0} \rangle - \frac{1}{2V} \sum_{f \in Q_-} \lambda^2(f)$$

Как видно:

$$\langle \Phi_H^* \mathcal{H} \Phi_H \rangle \quad > \langle \varphi^* \mathcal{H} \varphi \rangle .$$

С другой стороны по самому способу построения φ удовлетворяет всем дополнительным условиям /3/, и мы пришли к противоречию с /2/. Таким образом, наше утверждение доказано. Из утверждения /2.2/ в частности вытекает, что полный импульс для $\Phi_{\mathcal{H}}$ равен нулю

$$\sum_{\vec{f}} \vec{f} n_{\vec{f}} \Phi_H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{f}} \vec{f} (n_f - n_{-f}) \Phi_H = 0. \qquad /2.4/$$

Как видно из ранее сказанного, собственную функцию Φ для наименьшего собственного значения $\mathcal{H}$ мы можем всегда искать в классе функций φ, подчиненных дополнительным условиям /2.3/.

Заметим, что для этого специального класса φ, удовлетворяющих условию , /2.3/ гамильтониан $\mathcal{H}$ может быть выражен через амплитуды Паули.

Рассмотрим операторы:

$$b_f = a_{-f} a_f ; \qquad b_f^+ = a_f^+ a_{-f}^+ .$$

Независимо от дополнительных условий имеем:

$$b_f b_{f'} = b_{f'} b_f ; \quad b_f^+ b_{f'}^+ = b_{f'}^+ b_f^+ ; \quad b_f^2 = 0 ; \quad b_f^{+2} = 0$$

$$b_f b_{f'}^+ - b_{f'}^+ b_f = 0 ; \qquad f \neq f'.$$

Кроме того, ввиду дополнительных условий:

$$b_f^+ b_f + b_f b_f^+ = n_f n_{-f} + (1 - n_f)(1 - n_{-f}) = 1 .$$

Так как n_f и n_{-f} одновременно либо оба равны нулю, либо оба равны единице.

Итак, на рассматриваемом классе /2.3/ операторы b_f, b_f^+ являются амплитудами Паули. На этом классе функций гамильтониан /1.2/ имеет вид:

$$\mathcal{H} = 2\Big\{\sum_{f>0} T(f)\, b_f^+ b_f - \frac{\nu}{2}\sum_{f>0} \lambda(f)\{b_f + b_f^+\} - \frac{1}{V}\sum_{\substack{f>0\\ f'>0}} \lambda(f)\lambda(f')\, b_f^+ b_{f'}. \qquad /2.5/$$

Мы выделили класс индексов $f>0$, чтобы все операторы b_f были различны, так как $b_f = b_{-f}$. Гамильтониан такого типа рассматривался в нашей работе [5].

§ 3. Оценка собственного значения гамильтониана /1.2/ сверху

Рассмотрим теперь вопрос об оценке сверху минимального собственного значения гамильтониана $\mathcal{H}$. Будем исходить из представления гамильтониана $\mathcal{H}$ в виде /1.2/. Обозначим через E_H наименьшее собственное значение гамильтониана $\mathcal{H}$ /1.2/ и через $E_0(\sigma)$ наименьшее собственное значение гамильтониана $\mathcal{H}_0$ /1.4/. Заметим, что оператор $\mathcal{H}_1 \leqq 0$ и потому минимальное собственное значение гамильтониана $\mathcal{H}_0$ больше минимального собственного значения гамильтониана $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$:

$$E_0(\sigma) \geqq E_H \qquad /3.1/$$

при любом σ.

Таким образом, минимальные собственные значения гамильтониана $\mathcal{H}_0$ мажорируют минимальное собственное значение $\mathcal{H}$. Наилучшая оценка получится при σ, дающем $\min E_0(\sigma)$.

Перейдем теперь к вычислению собственных значений гамильтониана $\mathcal{H}_0$. Совершая соответствующее каноническое преобразование, диагонализующее квадратичную форму $\mathcal{H}_0$ /1.4/, получим тождество:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_f \sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma) + T^2(f)}\,(a_f^+ u_f + a_{-f} v_f^*)(u_f a_f + v_f a_{-f}^+) +$$
$$+ \frac{1}{2} V \Big\{\sigma^*\sigma - \frac{1}{V}\sum_f\Big[\sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma) + T^2(f)} - T(f)\Big]\Big\}, \qquad /3.2/$$

где

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma) + T^2(f)}}}$$

$$v_f = \frac{-\epsilon(f)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma) + T^2(f)}}} \cdot \frac{\sigma+\nu}{|\sigma+\nu|}, \qquad /3.3/$$

где

$$\lambda(f) = \epsilon(f)\,|\lambda(f)|\,; \quad \epsilon(f) = \operatorname{sign}\lambda(f). \qquad /3.4/$$

Очевидно:

$$u(-f) = u(f); \quad v(-f) = -v(f); \quad u^2 + |v|^2 = 1 \qquad /3.5/$$

u – вещественно, v – комплексно.

Отсюда видно, что амплитуды

$$\alpha_f = u_f a_f + v_f a^+_{-f}$$
$$\alpha^+_f = u_f a^+_f + v^*_f a_{-f} \qquad /3.6/$$

будут фермионными.

Следовательно, выражение для $\mathcal{H}_0$ можно переписать в виде:

$$\mathcal{H}_0 = \sum \sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma) + T^2(f)}\; \alpha^+_f \alpha_f + \qquad /3.7/$$

$$+ \frac{1}{2} V \left\{ \sigma^*\sigma - \frac{1}{V} \sum_f \left[\sqrt{(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma)\cdot\lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f) \right] \right\}.$$

Очевидно, что $\min \mathcal{H}_0$ будет достигаться для чисел заполнения $\alpha^+_f \alpha_f = 0$. В результате, для энергии основного состояния гамильтониана $\mathcal{H}_0$ получаем:

$$E_0(\sigma) = \frac{1}{2} V \left\{ \sigma^*\sigma - \frac{1}{V} \sum_f \left[\sqrt{\lambda^2(f)(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma) + T^2(f)} - T(f) \right] \right\}. \qquad /3.8/$$

Для улучшения оценки $E_{\mathcal{H}}$ сверху мы должны взять $\min E_0(\mathfrak{S})$.

Следует рассмотреть отдельно случаи: $\nu = 0$ и $\nu > 0$.

1. Случай $\nu = 0$.

Положим

$$X = \mathfrak{S}^* \mathfrak{S} > 0$$

тогда

$$E_0(\mathfrak{S}) = \frac{1}{2} V F(\mathfrak{S}^* \mathfrak{S}),$$

где

$$F(x) = x - \frac{1}{V} \sum_f \left\{ \sqrt{\lambda^2(f) x + T^2(f)} - T(f) \right\}.$$

В этом случае , как видно из условия минимума, можно определить только модуль $\mathfrak{S}$, но не ее фазу.

Имеем

$$F'(x) = 1 - \frac{1}{2V} \sum_f \frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f) x + T^2(f)}} ;$$

$$F''(x) = \frac{1}{4V} \sum_f \frac{\lambda^4(f)}{\left(\sqrt{\lambda^2(f) x + T^2(f)}\right)^3} ;$$

Как видно

$$F''(x) > 0 \qquad в \qquad 0 \leqq x \leqq \infty$$

и поэтому $F'(x)$ может иметь в этом интервале не больше одного корня. Принимая во внимание свойства функций $\lambda(f)$ и $T(f)$ /см. § 1/, будем иметь:

$$F'(0) < 0 \quad ; \qquad F'(\infty) > 0 .$$

И, следовательно, в интервале $0 < x < \infty$ существует одно единственное решение уравнения

$$F'(x) = 0,$$

которое и реализует абсолютный минимум.

Таким образом, окончательно:

$$\frac{V}{2} \min F(x) \geqq E_H . \qquad (0 < x < \infty). \tag{3.9}$$

2. Случай $\nu > 0$.

Положим $(\nu+\sigma^*)(\nu+\sigma) = x$ /очевидно, что $x > 0$ / и заметим, что

$$\sigma^*\sigma = x + \nu^2 - \nu(\sigma + \nu + \sigma^* + \nu) = (\sqrt{x} - \nu)^2 + \nu\{2\sqrt{x} - (\sigma + \nu + \sigma^* + \nu)\}.$$

Корню здесь, как всегда, приписываем знак + . Тогда

$$\sigma + \nu = \sqrt{x}\, e^{i\varphi}\ ; \qquad \sigma^* + \nu = \sqrt{x}\, e^{-i\varphi}$$

и

$$\sigma^*\sigma = (\sqrt{x} - \nu)^2 + 2\nu\sqrt{x}\,(1 - \cos\varphi).$$

Поэтому

$$E_0(\sigma) = \frac{V}{2} F(x) + V\nu\sqrt{x}\,(1 - \cos\varphi), \tag{3.10}$$

где

$$F(x) = (\sqrt{x} - \nu)^2 - \frac{1}{V}\sum_f\left\{\sqrt{\lambda^2(f)x + T^2(f)} - T(f)\right\}.$$

Имеем далее:

$$F'(x) = 1 - \frac{\nu}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2V}\sum_f \frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)x + T^2(f)}}$$

$$F''(x) = \frac{\nu}{2x^{3/2}} + \frac{1}{4V}\sum_f \frac{\lambda^4(f)}{\left(\lambda^2(f)x + T^2(f)\right)^{3/2}}.$$

Ввиду того, что

$$F''(x) > 0$$

видим, что $F'(x)$ не может иметь больше одного корня в $[0, \infty]$. Но

$$F'(0) = -\infty\ ; \qquad F'(\infty) = 1.$$

Поэтому существует x_0 в интервале $0 < x_0 < \infty$, для которого $F'(x_0) = 0$. Как раз при этом значении x_0 функция $F(x)$ имеет абсолютный минимум.

Из /3.10/ видно, что единственно возможный выбор σ , соответствующий абсолютному минимуму, будет

$$x = x_0$$
$$\varphi = 0. \qquad /3.11/$$

Таким образом

$$\sigma + \nu = \sqrt{x}\ ; \qquad \sigma = \sqrt{x} - \nu .$$

Итак, в данном случае / $\nu > 0$ /определится и фаза σ . Как видим, σ должно быть вещественным.

Имеем также

$$\frac{V}{2} \min F(x) \geqq E_{\mathcal{H}} \qquad (0 < x < \infty). \qquad /3.12/$$

Простые соображения, использованные в работе [2] , показывают , что в формуле /1.3/ дополнительный член $\mathcal{H} - \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$ не эффективен при $V \to \infty$. Однако, строгое установление этого свойства затрудняется тем, что мы имеем только оценку сверху для E_H и не имеем аналогичной оценки снизу. Было бы вообще желательно аннулировать член

$$\Big(\sum_f \lambda(f)\, a_f^+ a_{-f}^+ - V\sigma^*\Big)\Big(\sum_f \lambda(f)\, a_{-f}\, a_f - V\sigma\Big).$$

Этого можно было бы добиться, взяв за σ не число, а оператор

$$L = \frac{1}{V} \sum_f \lambda(f)\, a_{-f}\, a_f .$$

Но с оператором нельзя делать канонических преобразований от фермионов a к фермионам α . Мы однако постараемся обобщить тождество /3.2/ на такой случай. Надо нам только будет правильно установить порядок операторов. Именно таким путем мы и докажем теоремы о том, что с помощью $\mathcal{H}_0$ можно получить асимптотически точное решение для $\mathcal{H}$ при $V \to \infty$.

§ 4. Оценка собственного значения гамильтониана снизу

Для того, чтобы получить оценку гамильтониана /1.2/ снизу, обобщим прежде всего тождество /1.3/ таким образом, чтобы обратить в нуль член H_1 /1.5/. Это можно сделать, рассматривая σ не как c- число, а как некоторый оператор L :

$$L = \frac{1}{V} \sum_f a_{-f}\, a_f\, \lambda(f). \qquad /4.1/$$

Вместо c - числа $(\nu + \sigma^*)(\nu + \sigma)$ введем операторы:

$$K = (L+\nu)(L^+ + \nu) + \beta^2; \qquad \tilde{K} = (L^+ + \nu)(L+\nu) + \beta^2, \qquad /4.2/$$

где β - некоторая константа.

Введем теперь операторы:

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{K\lambda^2(f) + T^2(f)} + T(f)}\,; \qquad P_f = P_f^+$$

$$q_f = -\frac{\epsilon(f)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{K\lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f)} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} (L+\nu). \qquad /4.3/$$

Очевидно:

$$P_f\, q_f = -\frac{\lambda(f)}{2}(L+\nu) \qquad /4.4/$$

$$P_f^2 = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{K\lambda^2(f) + T^2(f)} + T(f)\right\} \qquad /4.5/$$

$$q_f^+ q_f = (L^+ + \nu)\frac{1}{2K}\left\{\sqrt{K\lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f)\right\}(L+\nu). \qquad /4.6/$$

Принимая во внимание, что для любого оператора ξ, имеет место тождество:

$$\xi^{+} F(\xi \xi^{+}) \xi = \xi^{+} \xi \, F(\xi^{+} \xi) \qquad /4.7/$$

выражение /4.6/ можно записать в виде:

$$q_f^{+} q_f = (L^{+} + \nu)(L + \nu) \frac{1}{2\tilde{K}} \left\{ \sqrt{\tilde{K} \lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f) \right\} =$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\tilde{K} \lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f) \right\} - \frac{\beta^2}{2\tilde{K}} \left\{ \sqrt{\tilde{K} \lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f) \right\}. \qquad /4.8/$$

Имея в виду в дальнейшем применение леммы $\underline{\text{II}}$ /см.приложение формулы А 9-10/, напишем:

$$q_f^{+} q_f = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\lambda^2(f)\left(K + \frac{2S}{V}\right) + T^2(f)} - T(f) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\lambda^2(f)\left(K + \frac{2S}{V}\right) + T^2(f)} - \right. \qquad /4.9/$$
$$\left. - \sqrt{\lambda^2(f) \tilde{K} + T^2(f)} \right\} - \frac{\beta^2}{2\tilde{K}} \left\{ \sqrt{\tilde{K} \lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f) \right\}.$$

Заметим, что второй член справа не отрицателен, а S – верхняя грань выражения $\frac{1}{V} \sum_f |\lambda(f)|^2$:

$$\frac{1}{V} \sum_f |\lambda(f)|^2 \leqq S. \qquad /4.10/$$

Кроме того, имеем

$$p_f^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(K + \frac{2S}{V}\right) \lambda^2(f) + T^2(f)} + T(f) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(K + \frac{2S}{V}\right) \lambda^2(f) + T^2(f)} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{K \lambda^2(f) + T^2(f)} \right\}. \qquad /4.11/$$

Рассмотрим теперь формулу

$$\Omega = \sum_f \left(a_f^+ p_f + a_{-f} q_f^+\right)\left(p_f a_f + q_f a_{-f}^+\right). \qquad /4.12/$$

Используя равенство $q_f^+ q_f = q_{-f}^+ q_{-f}$ и /4.4/, получаем :

$$\Omega = \sum_f a_f^+ p_f^2 a_f + \sum_f a_f q_f^+ q_f a_f^+ - \sum_f \frac{\lambda(f)}{2}\left\{(L^+ + \nu)a_{-f}a_f + a_f^+ a_{-f}^+(L+\nu)\right\} + R_1 \qquad /4.13/$$

где

$$R_1 = \sum_f \frac{\lambda(f)}{2}\left\{\left(L^+ a_{-f} + a_{-f} L^+\right)a_f + a_f^+\left(a_{-f}^+ L - L\, a_{-f}^+\right)\right\}. \qquad /4.14/$$

Заметим, что

$$\sum_f \frac{\lambda(f)}{2}\left\{\left(L^+ + \nu\right)a_{-f}a_f + a_f^+ a_{-f}^+(L+\nu)\right\} = VL^+L + \frac{V}{2}\left(\nu L + \nu L^+\right) \qquad /4.15/$$

и следовательно:

$$\Omega + \frac{V}{2}L^+L - \sum_f a_f^+ p_f^2 a_f - \sum_f a_f q_f^+ q_f a_f^+ = -\frac{V}{2}\left\{L^+L + \nu\left(L + L^+\right)\right\} + R_1 . \qquad /4.16/$$

Или, в силу/ /4.9/ и /4.11/ , имеем:

$$\sum_f \left\{a_f^+ p_f + a_{-f} q_f^+\right\}\left\{p_f a_f + q_f a_{-f}^+\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_f a_f^+ \left\{\sqrt{\left(K + \frac{2s}{V}\right)\lambda^2(f) + T^2(f)} - \sqrt{K\lambda^2(f) + T^2(f)}\right\} a_f +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_f a_f \left\{\sqrt{\left(K + \frac{2s}{V}\right)\lambda^2(f) + T^2(f)} - \sqrt{\tilde{K}\lambda^2(f) + T^2(f)}\right\} a_f^+ +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{f} a_f \frac{\beta^2}{2\tilde{K}}\left\{\sqrt{\tilde{K}\lambda^2(f)+T^2(f)} - T(f)\right\} a_f^+ -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{f} a_f^+ \left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2(f)+T^2(f)} + T(f)\right\} a_f -$$ /4.17/

$$-\frac{1}{2}\sum_{f} a_f \left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2(f)+T^2(f)} - T(f)\right\} a_f^+ + \frac{V}{2} L^+L =$$

$$= -\frac{V}{2}\left\{L^+L + \nu\left(L+L^+\right)\right\} + R_1 .$$

Введем обозначения:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\sum_{f} a_f^+ \left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2} - \sqrt{K\lambda^2+T^2}\right\} a_f$$ /4.18/

$$\Delta_2 = \frac{1}{2}\sum_{f} a_f \left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2} - \sqrt{\tilde{K}\lambda^2+T^2}\right\} a_f^+$$ /4.19/

$$\Delta_3 = \frac{1}{2}\sum_{f} a_f \frac{\beta^2}{2\tilde{K}}\left\{\sqrt{\tilde{K}\lambda^2+T^2} - T\right\} a_f^+ .$$ /4.20/

Тогда в силу леммы $\underline{\text{II}}$ /А 9–10/

$$\Omega \geqq 0 ; \quad \Delta_1 \geqq 0 ; \quad \Delta_2 \geqq 0 ; \quad \Delta_3 \geqq 0 .$$ /4.21/

Итак

$$\Omega + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \frac{1}{2}\sum_{f} a_f^+ \left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2} + T\right\} a_f -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{f} a_f \left\{\sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2+T^2} - T\right\} a_f^+ + \frac{V}{2} L^+L =$$ /4.22/

$$= -\frac{V}{2}\left\{L^+L + \nu\left(L+L^+\right)\right\} + R_1 .$$

Положим

$$R_2 = \frac{1}{2}\sum_f a_f^+ \left\{ \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2}\, a_f - a_f \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2} \right\} \qquad /4.23/$$

$$R_3 = \frac{1}{2}\sum_f a_f \left\{ \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2}\, a_f^+ - a_f^+ \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2} \right\}. \qquad /4.24/$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\Omega + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - R_2 - R_3 + \frac{V}{2} L^+ L - \\ &- \frac{1}{2}\sum_f a_f^+ a_f \left\{ \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2} + T \right\} - \\ &- \frac{1}{2}\sum_f a_f a_f^+ \left\{ \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2} - T \right\} = \\ &= -\frac{V}{2}\left\{ L^+ L + \nu\left(L + L^+\right) \right\} + R_1 . \end{aligned} \qquad /4.25/$$

Но

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_f a_f^+ a_f \left\{ \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2} + T \right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_f a_f a_f^+ \left\{ \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2} - T \right\} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_f \left\{ \sqrt{\left(K+\frac{2s}{V}\right)\lambda^2 + T^2} - T \right\} + \sum_f T(f) a_f^+ a_f . \end{aligned} \qquad /4.26/$$

Стало быть

$$\Omega + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - R_1 - R_2 - R_3 + \frac{V}{2}\left(L^+L - LL^+\right) +$$

$$+\frac{1}{2}V\left[LL^+ - \frac{1}{V}\sum_f\left\{\sqrt{\left(K+\frac{2S}{V}\right)\lambda^2 + T^2} - T\right\}\right] = \qquad /4.27/$$

$$= \sum_f T(f)\, a_f^+ a_f - \frac{V}{2}\left\{L^+L + \nu\left(L + L^+\right)\right\} =$$

$$= \sum_f T(f)\, a_f^+ a_f - \nu \sum_f \frac{\lambda(f)}{2}\left(a_{-f}a_f + a_f^+ a_{-f}^+\right) -$$

$$-\frac{1}{2V}\sum_{ff'} \lambda(f)\lambda(f')\, a_f^+ a_{-f}^+ a_{-f'} a_{f'} = \mathcal{H}.$$

Итак, окончательно будем иметь:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}V\left\{LL^+ - \frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\left(K+\frac{2S}{V}\right)\lambda^2(f) + T^2(f)} - T(f)\right]\right\} +$$

$$+\Omega + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - R_1 - R_2 - R_3 + \frac{V}{2}\left(L^+L - LL^+\right). \qquad /4.28/$$

Соотношение /4.28/ представляет тождественное преобразование гамильтониана /1.2/. Первый член формулы /4.28/ будем рассматривать как главный, что касается членов R_1, R_2, R_3, то мы покажем, что они асимптотически малы, а члены Ω, Δ_1, Δ_2, Δ_3 опустим. Так как они положительны /4.21/, то мы получим оценку для $\mathcal{H}$ снизу.

Легко показать, что при учете /2.2/

$$-R_1 + \frac{V}{2}\left(L^+L - LL^+\right) = -\frac{1}{V}\sum_f \lambda^2(f), \qquad /4.29/$$

где, согласно /4.10/, $\frac{1}{V}\sum_f \lambda^2(f) \leq S$. Далее в силу леммы IV /неравенство A-30/

$$|R_2| + |R_3| \leqq c \qquad /4.30/$$

где

$$c = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{V}\sum_{f}|\lambda(f)|^2\left(1+\frac{|\lambda(f)|\left(\frac{1}{V}\sum|\lambda(f)|+V\right)}{2\,\frac{1}{V}\sum|\lambda(f)|^2+V\,\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\right)\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}\,dt. \qquad /4.31/$$

Итак, для любой нормированной функции Φ в силу /4.21/ имеем неравенство,

$$\langle\Phi^*\mathcal{H}\Phi\rangle \geqq -(s+c)+$$

$$+\frac{1}{2}V\left\langle\Phi^*\left(LL^+-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\left\{(L+\nu)(L^++\nu)+\beta^2+\frac{2s}{V}\right\}\lambda^2+T^2(f)}-T(f)\right]\right)\Phi\right\rangle.$$

Но s и c не зависят от β. Поэтому, совершая предельный переход $\beta\to 0$, найдем:

$$\langle\Phi^*\mathcal{H}\Phi\rangle \geqq -(2s+c)+$$

$$+\frac{1}{2}V\left\langle\Phi^*\left\{LL^++\frac{2s}{V}-\frac{1}{V}\sum_f\left[\sqrt{\left\{(L+\nu)(L^++\nu)+\frac{2s}{V}\right\}\lambda^2(f)+T^2(f)}-T(f)\right]\right\}\Phi\right\rangle. \qquad /4.32/$$

Имеем далее:

$$LL^+ = (L+\nu)(L^++\nu)-\nu\{L+\nu+L^++\nu\}+\nu^2$$

$$LL^++\frac{2s}{V} = \left\{(L+\nu)(L^++\nu)+\frac{2s}{V}\right\}-\nu\{(L+\nu+L^++\nu)\}+\nu^2. \qquad /4.33/$$

Положим

$$(L+\nu)(L^++\nu)+\frac{2s}{V} = X. \qquad /4.34/$$

Тогда

$$L L^{+} + \frac{2s}{V} = \left(\sqrt{X} - \nu\right)^{2} + \nu\left\{2\sqrt{X} - (L+\nu) - (L^{+}+\nu)\right\}. \qquad /4.35/$$

Но по лемме I /A, 1-2/ взяв в неравенстве

$$\xi = L + \nu \; ; \qquad \xi^{+} = L^{+} + \nu$$

получим

$$2\sqrt{(L+\nu)(L^{+}+\nu) + \frac{s}{V}} - (L+\nu) - (L^{+}+\nu) \geqq 0. \qquad /4.36/$$

Тем более

$$2\sqrt{X} - (L+\nu) + (L^{+}+\nu) \geqq 0. \qquad /4.37/$$

Рассмотрим функцию $F(x)$ /3.11/ :

$$F(x) = (\sqrt{x} - \nu)^{2} - \frac{1}{V}\sum_{f}\left[\sqrt{x\lambda^{2}(f) + T^{2}(f)} - T(f)\right].$$

Тогда формулу /4.32/ можем записать в виде:

$$\langle \Phi^{*}\mathcal{H}\Phi\rangle \geqq -(2s+c) + \frac{1}{2}V\langle \Phi^{*}F(X)\Phi\rangle +$$

$$+ V\frac{\nu}{2}\langle \Phi^{*}\{2\sqrt{X} - (L+\nu+L^{+}+\nu)\}\Phi\rangle \geqq \qquad /4.38/$$

$$\geqq -(2s+c) + \frac{1}{2}V\langle \Phi^{*}F(X)\Phi\rangle,$$

где X – оператор, определенный соотношением /4.34/.

Пусть $E_{\mathcal{H}}$ – наименьшее собственное значение $\mathcal{H}$, Φ_{H} – соответствующая собственная функция. Пусть далее E_{H_0} – наименьшее собственное значение H_0. Именно /3.11/:

$$E_{H_0} = \frac{V}{2}\min F(x).$$

Пусть абсолютный минимум достигается у $F(x)$ при

$$x = x_0 = C^{2} \qquad /4.39/$$

Имеем

$$\frac{V}{2}F(C^2) \geqq E_H = \langle \Phi_H^* H \Phi_H \rangle \geqq -(2s+c) + \frac{1}{2}V\langle \Phi^* F(X)\Phi\rangle \geqq$$
$$\geqq -(2s+c) + \frac{V}{2}F(C^2). \qquad /4.40/$$

Отсюда, принимая во внимание, что энергия системы пропорциональна объему системы, получаем окончательную оценку для собственных значений гамильтониана $\mathcal{H}$ /1.2/

$$0 \leqq \frac{E_{H_0} - E_H}{V} \leqq \frac{2s+c}{V}. \qquad /4.41/$$

Заметим, что C /4.31/ и s, в соответствии с условиями § 1, остаются конечными при $V \to \infty$. Поэтому разность собственных значений приближенного гамильтониана $\mathcal{H}_0$ /1.4/ и точного гамильтониана $\mathcal{H}$ /1.2/, отнесенная к объему системы, убывает как $\frac{1}{V}$ при $V \to \infty$. Таким образом, на основании этого результата можем заключить, что решение приближенного гамильтониана $\mathcal{H}_0$ /1.4/ дает асимптотически точное решение гамильтониана $\mathcal{H}$ /1.2/ при $V \to \infty$.

Покажем теперь, что оператор X /4.34/ с асимптотической точностью /т.е. с точностью $\frac{1}{V}$ /, может рассматриваться как c – число. Для этого возьмем любую нормированную функцию Φ, такую, что

$$\langle \Phi^* H \Phi\rangle - E_H \leqq c_1 = const. \qquad /4.42/$$

Тогда на основании /4.38/, /4.40/, /4.42/ имеем:

$$\langle \Phi^*\big(F(X) - F(C^2)\big)\Phi\rangle + \nu\langle \Phi^*\big(2\sqrt{X} - (L + \nu + L^+ + \nu)\big)\Phi\rangle \leqq \frac{\ell}{V} \qquad /4.43/$$

$$\ell = 2(2s + c + c_1).$$

Заметим для дальнейшего, что оба члена в левой части /4.43/ положительны. В частности, в виду положительности второго слагаемого в левой части неравенства /4.43/ /см. лемму I А 1-2/, получаем:

$$\langle \Phi^* \left(F(X) - F(C^2)\right) \Phi \rangle \leq \frac{\ell}{V}, \qquad /4.44/$$

но

$$F(X) - F(C^2) = \frac{1}{2} F''(\xi)(X - C^2)^2 \qquad /4.45/$$

$$F''(x) = \frac{\nu}{2x^{3/2}} + \frac{1}{4} \frac{1}{V} \sum_{f} \frac{\lambda^4(f)}{(x\lambda^2(f) + T^2(f))^{3/2}}; \quad \frac{1}{2} F''(\xi) \geqslant \alpha = const > 0 \qquad /4.46/$$

Отсюда получаем:

$$\langle \Phi^* |X - C^2|^2 \Phi \rangle \leq \frac{\ell}{\alpha V}. \qquad /4.47/$$

Из /4.46/ и следует, что оператор X с асимптотической точностью может рассматриваться как c - число.

Для случая $\nu > 0$ можно получить более полную информацию относительно математического ожидания операторов L, L^+. Именно, мы покажем, что среднее квадратичное отклонение для оператора L от величины C /4.39/ асимптотически мало при $V \to \infty$.

Имеем очевидное неравенство

$$(\sqrt{X} - C)^2 = \frac{(X - C^2)^2}{(\sqrt{X} + C)^2} \leq \frac{1}{C^2}(X - C^2)^2. \qquad /4.48/$$

Отсюда, используя /4.47/, получаем:

$$\langle \Phi^* (\sqrt{X} - C)^2 \Phi \rangle \leq \frac{\ell}{\alpha C^2 V}. \qquad /4.49/$$

Положим по определению

$$\langle \Phi^* \sqrt{X}\, \Phi \rangle = C_0. \qquad /4.50/$$

Тогда при учете /4.49/

$$\langle \Phi^*(\sqrt{X}-C_0)^2\Phi\rangle \leqq \langle \Phi^*(\sqrt{X}-C)^2\Phi\rangle \leqq \frac{\ell}{\alpha C^2 V}. \qquad /4.51/$$

Действительно, так как

$$\langle \Phi^*(\sqrt{X}-C)^2\Phi\rangle = (C-C_0)^2+\langle \Phi^*(\sqrt{X}-C_0)^2\Phi\rangle. \qquad /4.52/$$

Из оценки /4.51/ следует оценка для математического ожидания оператора X :

$$\langle \Phi^* X \Phi\rangle - C_0^2 \leqq \frac{\ell}{\alpha C^2 V}. \qquad /4.53/$$

Наконец, из формул /4.51/, /4.52/ получаем оценку для разности $(C-C_0)^2$:

$$(C-C_0)^2 \leqq \frac{\ell}{\alpha C^2 V}. \qquad /4.54/$$

Положим теперь

$$\xi = L + \nu; \qquad \xi^+ = L^+ + \nu, \qquad /4.55/$$

тогда для среднего квадратичного отклонения для ξ от C_0 имеем при учете /4.34/:

$$\langle \Phi^*(C_0-\xi)(C_0-\xi^+)\Phi\rangle \leqq$$

$$\leqq C_0^2 + \langle \Phi^* X \Phi\rangle - C_0\langle \Phi^*(\xi+\xi^+)\Phi\rangle. \qquad /4.56/$$

Используя затем /4.53/, / 4.43/ получаем:

$$\langle \Phi^*(C_0-\xi)(C_0-\xi^+)\Phi\rangle \leqq 2C_0^2 + \frac{\ell}{\alpha C^2 V} - C_0\langle \Phi^*(\xi+\xi^+)\Phi\rangle =$$

$$= \langle \Phi^*\{2\sqrt{X}-(\xi+\xi^+)\}\Phi\rangle C_0 + \frac{\ell}{\alpha C^2 V} \leqq \frac{\ell C_0}{\sqrt{V}} + \frac{\ell}{\alpha C^2 V}. \qquad /4.57/$$

Таким образом, для интересующей нас величины $\langle \Phi^* (C-\xi)(C-\xi^+) \Phi \rangle$ получаем следующую оценку:

$$\langle \Phi^* (C-\xi)(C-\xi^+) \Phi \rangle =$$

$$= \langle \Phi^* (C-C_0+C_0-\xi)(C-C_0+C_0-\xi^+) \Phi \rangle \leqq$$

$$\leqq 2(C-C_0)^2 + 2\langle \Phi^* (C_0-\xi)(C_0-\xi^+) \Phi \rangle \leqq \tag{4.58}$$

$$\leqq \frac{2\ell}{\alpha C^2 V} + \frac{2\ell C_0}{\nu V} + \frac{2\ell}{\alpha C^2 V} \leqq \frac{const}{V} = \frac{I}{V} .$$

$$(I = const.)$$

Отметим, что полученная оценка годна только при $\nu > 0$, так как ν входит в знаменатель правой части неравенства /4.58/.

Скажем сейчас несколько слов по поводу полученных здесь результатов. Пусть $\nu = 0$. Тогда, как мы видели, для состояний со средней энергией, асимптотически близкой к наименьшей E_H, оператор L^+L с асимптотической точностью равен c - числу C^2. Эти состояния, однако, не обладают подобными свойствами для самих операторов L и L^+. Рассмотрим состояние Φ_H с наименьшей энергией E_H. Вообще говоря, может представиться случай вырождения, так что мы будем иметь не одно Φ_H, а некоторое линейное многообразие $\{\Phi_H\}$ возможных состояний с той же наименьшей энергией E_H.

Поскольку оператор $N = \sum a_f^+ a_f$, представляющий полное число частиц в нашем случае $(\nu = 0)$, точно коммутирует с H, в этом многообразии $\{\Phi_H\}$ мы всегда можем найти такое Φ'_H, для которого N принимает некоторое определенное значение N_0. Тогда очевидно

$$\langle \Phi^{*\prime}_H L \Phi'_H \rangle = 0 ; \quad \langle \Phi^{*\prime}_H L^+ \Phi'_H \rangle = 0 .$$

Следовательно, L не может принимать даже приближенного определенного значения в состоянии Φ'_H, ибо в противном случае L^+L для этого состояния оказалось бы приближенно равным 0, а не C^2.

Рассмотрим теперь многообразие $\{\Phi\}$ состояний с энергией, асимптотически близкой к E_H. Так как L, L^+ приближенно коммутируют с H, то естественно ожидать, что в $\{\Phi\}$ можно выбрать такую Φ, для которой L, L^+ с асимптотической точностью принимают определенные значения.

Так и обстоит дело в действительности. Данным свойством обладает, например, Φ_{H_0} – состояние с наименьшей энергией для H_0.

В самом деле, как мы видели, Φ_{H_0} определяется соотношениями

$$\alpha_f \Phi = 0 ; \quad \text{где} \quad \alpha_f = u_f a_f - v_f a^+_{-f}$$

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f) C^2 + T^2(f)}}}$$

$$v_f = \frac{\epsilon(f)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{T(f)}{\sqrt{\lambda^2(f) C^2 + T^2(f)}}} .$$

Выразив L через фермионы α, α^+, найдем:

$$L = \frac{1}{V} \sum_f \lambda(f) \left\{ u_f^2 \alpha_{-f} \alpha_f - v_f^2 \alpha_f^+ \alpha_{-f}^+ - 2 u_f v_f \alpha_f^+ \alpha_f \right\} + \frac{1}{V} \sum_f u_f v_f \lambda(f) .$$

Но

$$\frac{1}{V} \sum_f u_f v_f = \frac{1}{2V} \sum_f \frac{|\lambda(f)|^2 C}{\sqrt{\lambda^2(f) C^2 + T^2(f)}} = C , \quad \text{и}$$

потому

$$\langle \Phi^*_{H_0} (L^+ - C)(L - C) \Phi_{H_0} \rangle \leqq \frac{\text{const}}{V} ;$$

$$\langle \Phi^*_{H_0} (L - C)(L^+ - C) \Phi_{H_0} \rangle \leqq \frac{\text{const}}{V} .$$

Для Φ_{H_0}, L и L^+ приближенно равны C. Именно это обстоятельство и обусловило успех приближенного метода, в котором мы гамильтониан H с точным законом сохранения N заменяем H_0, для которого N уже не являются точным интегралом движения.

Теперь видно также, что приближенный метод можно было бы сформулировать так, чтобы закон сохранения N формально не нарушался. Для этого надо было бы ввести вместо фермионов α_f амплитуды:

$$\alpha_f = u_f a_f - v_f \frac{L}{|C|} a_{-f}^+ ,$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям для ферми-амплитуд с асимптотической точностью. Тогда α_f уменьшает N на 1, а α_f^+ увеличивает N на единицу. Такие амплитуды имеют аналогии с амплитудами

$$b_f = \frac{a_0^+}{\sqrt{N_0}} a_f ,$$

введенными в теории сверхтекучести [6] при выделении конденсата.

Вообще, имеется сильная аналогия между амплитудами a_0, a_0^+ для Бозе конденсата и амплитудами L, L^+ в рассматриваемом случае.

Когда мы включаем в $\mathcal{H}$ член с источниками пар $(\nu > 0)$, операторы L, L^+ сейчас же начинают принимать с асимптотической точностью определенные значения для состояний с энергией, близкой к $\mathcal{H}$.

Здесь получается аналогия с теорией ферромагнетизма в изотропной среде. При отсутствии магнитного поля направление оси намагничения неопределенно. При включении магнитного поля, сколь угодно слабого, действующего по определенному направлению, вектор намагничения немедленно устанавливается именно по этому направлению.

Заметим, наконец, что из соотношений

$$L^+ L \sim C^2 \qquad (\nu = 0)$$

$$\nu + L \sim C ; \quad \nu + L^+ \sim C \qquad (\nu > 0)$$

можно показать, что и корреляционные средние

$$\langle \Phi_H^* \ldots a_{f_l}(t_l) \ldots a_{f_j}^+(t_j) \ldots \Phi_H \rangle$$

для гамильтониана H асимптотически равны соответствующим средним для гамильтониана H_0. При $\nu > 0$ это касается всех средних данного типа, а при $\nu = 0$, разумеется, только тех, у которых число a равно числу a^+, т.е. средних от таких операторов, которые сохраняют N. К установлению этих свойств мы сейчас и перейдем.

§ 5. Функции Грина для случая $\nu > 0$.

В этом параграфе мы займемся асимптотическими оценками для функции Грина и корреляционных средних в случае $\nu > 0$. Из этих оценок будет следовать, что решение уравнений для гриновских функций, построенных на гамильтониане $\mathcal{H}_0$ /1.4/, будет асимптотически мало отличаться от соответствующих решений для такого модельного гамильтониана $\mathcal{H}$ /1.2/ при $V \to \infty$.

Рассмотрим уравнения движения для операторов a_f, a_f^+. Принимая во внимание /1.2/, получим:

$$i\frac{da_f}{dt} = T(f)a_f - \lambda(f)a_{-f}^+(\nu + L)$$
$$i\frac{da_f^+}{dt} = -T(f)a_f^+ + \lambda(f)(\nu + L^+)a_{-f}. \quad /5.1/$$

Откуда имеем также:

$$i\frac{da_{-f}}{dt} = T(f)a_{-f} + \lambda(f)a_f^+(\nu + L)$$
$$i\frac{da_{-f}^+}{dt} = -T(f)a_{-f}^+ - \lambda(f)(\nu + L^+)a_f. \quad /5.2/$$

Положим /см. /3.3/ и /3.11/ /:

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{T(f)}{\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}}}$$

$$v_f = -\frac{\epsilon(f)}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{T(f)}{\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}}} \qquad /5.3/$$

и введем новые фермионные амплитуды:

$$\alpha_f^+ = u_f a_f^+ + v_f a_{-f}. \qquad /5.4/$$

Имеем

$$i\frac{d\alpha_f^+}{dt} = u_f i\frac{da_f^+}{dt} + v_f i\frac{da_{-f}}{dt} =$$

$$= u_f\left\{-T(f)a_f^+ + \lambda(f)(\nu+L^+)a_{-f}\right\} + v_f\left\{T(f)a_{-f} + \right. \qquad \left. L)\right\} =$$

$$\left. + \lambda(f)a_f^+(\nu+L)\right\} = -a_f^+\left\{T(f)u_f - \lambda(f)v_f(\nu+L)\right\} +$$

$$+ \left\{\lambda(f)(\nu+L^+)a_f + T(f)v_f\right\}a_{-f} =$$

$$-a_f^+\left\{T(f)u_f - \lambda(f)v_f C\right\} +$$

$$+ \left\{\lambda(f)C u_f + T(f)v_f\right\}a_{-f} + R_f,$$

где

$$R_f = R_f^{(1)} + R_f^{(2)}$$

$$R_f^{(1)} = u_f\lambda(f)(L^+ + \nu - C)a_{-f} \qquad /5.5/$$

$$R_f^{(2)} = v_f\lambda(f)a_f^+(L+\nu-C).$$

Обратим теперь внимание на наличие тождеств:

$$T(f)\,u_f - \lambda(f)\,v_f\,C = \sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\;u_f$$ /5.6/

$$T(f)\,v_f + \lambda(f)\,u_f\,C = -\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\;v_f\,.$$

Откуда следует, что:

$$i\,\frac{d\alpha_f^+}{dt} + \sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\;\alpha_f^+ = R_f$$ /5.7/

и потому

$$i\,\frac{d\alpha_f}{dt} - \sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\;\alpha_f = -R_f^+\,.$$ /5.8/

Займемся сейчас оценками величин, связанных с R, R^+.

Имеем:

$$\langle \Phi_H^* \, R_f R_f^+ \, \Phi_H \rangle \leqq 2\langle \Phi_H^* \, R_f^{(1)} R_f^{(1)+} \Phi_H \rangle + 2\langle \Phi_H^* \, R_f^{(2)} R_f^{(2)+} \Phi_H \rangle =$$

$$= 2u_f^2\,\lambda^2(f)\langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C)\,a_{-f}\,a_{-f}^+\,(L+\nu-C)\,\Phi_H \rangle +$$

$$+ 2v_f^2\,\lambda^2(f)\langle \Phi_H^* \, a_f^+\,(L+\nu-C)(L^+ + \nu - C)\,a_f\,\Phi_H \rangle.$$

Но так как $|a_{-f}\,a_{-f}^+| \leqq 1$, то

$$\langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C)\,a_{-f}\,a_{-f}^+\,(L+\nu-C)\,\Phi_H \rangle \leqq \langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C)(L+\nu-C)\,\Phi_H \rangle$$

и далее в силу /A.18/:

$$\langle \Phi_H^* \, a_f^+\,(L+\nu-C)(L^+ + \nu - C)\,a_f\,\Phi_H \rangle \leqq$$

$$\leqq \frac{2S}{V} + \langle \Phi_H^* a_f^+ (L^+ + \nu - C)(L + \nu - C) a_f \Phi_H \rangle =$$

$$= \frac{2S}{V} + \langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C) a_f^+ a_f (L + \nu - C) \Phi_H \rangle \leqq$$

$$\leqq \frac{2S}{V} + \langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C)(L + \nu - C) \Phi_H \rangle$$

Итак:

$$\langle \Phi_H^* R_f R_f^+ \Phi_H \rangle \leqq 2\lambda^2(f) \langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C)(L + \nu - C) \Phi_H \rangle + 2\lambda^2(f) v_f^2 \frac{2S}{V}. \qquad /5.9/$$

Совершенно аналогично получим:

$$\langle \Phi_H^* R_f^+ R_f \Phi_H \rangle \leqq 2\lambda^2(f) \langle \Phi_H^* (L + \nu - C)(L^+ + \nu - C) \Phi_H \rangle + 2\lambda^2(f) u_f^2 \frac{2S}{V}. \qquad /5.10/$$

Но, как было ранее показано /см. /4.58/ /:

$$\langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C)(L + \nu - C) \Phi_H \rangle \leqq \frac{I}{V}$$

$$\langle \Phi_H^* (L + \nu - C)(L^+ + \nu - C) \Phi_H \rangle \leqq \frac{I}{V}.$$

Поэтому, вводя постоянную

$$\gamma = 2(I + 2S), \qquad /5.11/$$

можем написать:

$$\langle \Phi_H^* R_f R_f^+ \Phi_H \rangle \leqq \frac{\gamma}{V} |\lambda(f)|^2; \quad \langle \Phi_H^* R_f^+ R_f \Phi_H \rangle \leqq \frac{\gamma}{V} |\lambda(f)|^2. \qquad /5.12/$$

Дадим еще несколько более общие оценки. Рассмотрим операторы A_f, каждый из которых является линейной комбинацией операторов a_f и a^+_{-f}.

$$A_f = p_f a_f + q_f a^+_{-f} \tag{5.13}$$

с ограниченными коэффициентами:

$$|p_f|^2 + |q_f|^2 \leqq \text{const}. \tag{5.14}$$

Покажем, что

$$|\langle \Phi^*_H A_{f_1} \ldots A_{f_l} R_f A_{f_{l+1}} \ldots A_{f_m} R^+_f A_{f_{m+1}} \ldots \Phi_H \rangle| \leqq \frac{\text{Const}}{V}$$

/5.15/

$$|\langle \Phi^*_H A_{f_1} \ldots A_{f_l} R^+_f A_{f_{l+1}} \ldots A_{f_m} R_f A_{f_{m+1}} \ldots \Phi_H \rangle| \leqq \frac{\text{Const}}{V}.$$

<u>Доказательство.</u> Заметим прежде всего, что

$$L a_f - a_f L = 0\,; \qquad L^+ a^+_f - a^+_f L = 0$$

$$|L a^+_f - a^+_f L| \leqq \frac{2|\lambda(f)|}{V}\,; \qquad |L^+ a_f - a_f L^+| \leqq \frac{2|\lambda(f)|}{V}.$$

Поэтому, например,

$$\langle \Phi^*_H A_{f_1} \ldots (L + \nu - C) A_{f_j} \ldots (L^+ + \nu - C) A_{f_i} \ldots \Phi_H \rangle =$$

$$= Z + \langle \Phi^*_H (L + \nu - C) A_{f_1} \ldots A_{f_n} (L^+ + \nu - C) \Phi_H \rangle,$$

где

$$|Z| \leqq \frac{\text{const}}{V}.$$

Стало быть

$$\left|\left\langle \Phi_H^* A_{f_1} \dots (L+\nu-C) A_{f_j} \dots (L^+ + \nu - C) A_{f_i} \dots \Phi_H \right\rangle\right| \leqq \frac{Const}{V} + \qquad /5.16/$$

$$+ |A_{f_1}| \dots |A_{f_n}| \left\langle \Phi_H^* (L+\nu-C)(L^+ + \nu - C) \Phi_H \right\rangle \leqq \frac{Const}{V}.$$

Аналогично доказывается и что

$$\left|\left\langle \Phi_H^* A_{f_1} \dots (L^+ + \nu - C) A_{f_j} \dots (L+\nu-C) A_{f_i} \dots \Phi_H \right\rangle\right| \leqq \frac{Const}{V}. \qquad /5.17/$$

Имеем далее при учете /6.16/, /6.17/ :

$$\left|\left\langle \Phi_H^* A_{f_1} \dots (L+\nu-C) A_{f_j} \dots (L+\nu-C) A_{f_i} \dots \Phi_H \right\rangle\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{Const}{V} + \left|\left\langle \Phi_H^* (L+\nu-C) A_{f_1} \dots A_{f_n} (L+\nu-C) \Phi_H \right\rangle\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{Const}{V} + \sqrt{\left\langle \Phi_H^* \left\{ (L+\nu-C) A_{f_1} \dots A_{f_n} A_{f_n}^+ \dots A_{f_1}^+ (L^+ + \nu - C) \right\} \Phi_H \right\rangle} \times \qquad /5.18/$$

$$\times \sqrt{\left\langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C)(L+\nu-C) \Phi_H \right\rangle} \leqq$$

$$\leqq \frac{Const}{V} + |A_{f_1}| \dots |A_{f_n}| \sqrt{\left\langle \Phi_H^* (L+\nu-C)(L^+ + \nu - C) \Phi_H \right\rangle \left\langle \Phi_H^* (L^+ + \nu - C)(L+\nu-C) \Phi_H \right\rangle} \leqq$$

$$\leqq \frac{Const}{V}.$$

Аналогично доказывается и что

$$\left|\langle \Phi_H^* A_{f_1} \ldots (L^+ + \nu - C) A_{f_j} \ldots (L^+ + \nu - C) A_{f_i} \ldots \Phi_H \rangle\right| \leqq \frac{Const}{V}. \qquad /5.19/$$

Из соотношений /5.16/, /5.17/, /5.18/, /5.19/ и следует справедливость доказываемых неравенств /5.15/.

Займемся теперь оценками для корреляционных функций. Используя уравнения /5.7/, будем иметь:

$$i \frac{d}{dt} \langle \Phi_H^* \alpha_f^+(t) \alpha_f \Phi_H \rangle = -\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)} \langle \Phi_H^* \alpha_f^+(t) \alpha_f \Phi_H \rangle + \qquad /5.20/$$

$$+ \langle \Phi_H^* R_f(t) \alpha_f \Phi_H \rangle$$

причем, как всегда

$$\alpha_f(0) = \alpha_f ; \qquad \alpha_f^+(0) = \alpha_f^+ .$$

Вспоминая, что из уравнения

$$i \frac{d\mathcal{J}(t)}{dt} = -\Omega \mathcal{J}(t) + R(t)$$

следует

$$\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(0) e^{i\Omega t} + e^{i\Omega t} \int_0^t e^{-i\Omega t} R(t)\, dt,$$

напишем:

$$\langle \Phi_H^* \alpha_f^+(t) \alpha_f \Phi_H \rangle = e^{i\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}\, t} \langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle + \qquad /5.21/$$

$$+ e^{i\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}\, t} \int_0^t e^{-i\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}\, t} \langle \Phi_H^* R_f(t) \alpha_f \Phi_H \rangle\, dt .$$

С другой стороны, раз Φ_H есть собственная функция H, соответствующая наименьшему собственному значению его, обычное спектральное представление дает:

$$\langle \Phi_H^* \alpha_f^+(t) \alpha_f \Phi_H \rangle = \int_0^\infty \mathcal{J}_f(\nu) e^{-i\nu t} d\nu, \qquad /5.22/$$

причем

$$\mathcal{J}_f \geqq 0 \qquad и \qquad \int_0^\infty \mathcal{J}_f(\nu)\, d\nu \leqq 1. \qquad /5.23/$$

Положим

$$h(t) = \int_0^2 \omega^2 (2-\omega)^2 e^{-i\omega t} d\omega. \qquad /5.24/$$

Как видно, эта функция регулярна на всей вещественной оси. Интегрированием по частям нетрудно убедиться, что для $|t| \to \infty$ $h(t)$ убывает согласно оценке:

$$|h(t)| \leqq \frac{Const}{|t|^3}. \qquad /5.25/$$

Поэтому интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t\, h(t)|\, dt \qquad /5.26/$$

оказывается конечным.

Положим:

$$\sqrt{C^2 \lambda^2(f) + T^2(f)} = \Omega \qquad /5.27/$$

и заметим, что

$$h(\Omega t) = \frac{1}{\Omega^5} \int_0^{2\Omega} \nu^2 (2\Omega - \nu)^2 e^{-i\nu t} d\nu. \qquad /5.28/$$

По такому способу построения видно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega t) e^{-i\nu t} dt = 0, \quad \text{для} \quad \nu \geqq 0 \qquad /5.29/$$

и потому в силу /5.22/:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \Phi_H^* \alpha_f^+(t) \alpha_f \Phi_H \rangle h(\Omega t)\, dt = 0. \qquad /5.30/$$

Имеем поэтому из /5.21/:

$$\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega t} h(\Omega t)\, dt = \qquad /5.31/$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} h(\Omega t)\, e^{i\Omega t} \left(\int_0^t e^{-i\Omega t'} \langle \Phi_H^* R_f(t') \alpha_f \Phi_H \rangle dt' \right) dt.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega t} h(\Omega t)\, dt = \frac{2\pi}{\Omega}. \qquad /5.32/$$

Значит

$$\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \leqq \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\Omega t)| \left\{ \int_0^t |\langle \Phi_H^* R_f(t') \alpha_f \Phi_H \rangle| dt' \right\} dt. \qquad /5.33/$$

Но ввиду /5.12/

$$|\langle \Phi_H^* R_f \alpha_f \Phi_H \rangle| \leqq \sqrt{|\langle \Phi_H^* R_f R_f^+ \Phi_H \rangle| |\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle|} \leqq \qquad /5.34/$$

$$\leqq \left(\frac{\gamma}{V} \right)^{\frac{1}{2}} |\lambda(f)| \left(\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно

$$\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \leqq \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\Omega t)|\, |t|\, dt \left(\frac{\gamma}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\, \tau|\, d\tau \left(\frac{\gamma}{V} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \right)^{\frac{1}{2}} |\lambda(f)|.$$

Итак:

$$\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \leqq \frac{|\lambda(f)|^2}{2\pi \left(C^2 |\lambda(f)|^2 + T^2(f) \right)} \frac{\gamma}{V} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau) \tau|\, d\tau \right)^2. \qquad /5.35/$$

Отсюда получим ряд оценок. В силу неравенства Шварца и того, что $|a_f^+ a_f| \leqq 1$, и /5.35/ имеем

$$|\langle \Phi_H^* \alpha_{f_1}^+ \ldots \alpha_{f_s}^+ \alpha_{g_e} \ldots \alpha_{g_1} \Phi_H \rangle| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\langle \Phi_H^* \alpha_{f_1}^+ \ldots \alpha_{f_s}^+ \alpha_{f_s} \ldots \alpha_{f_1} \Phi_H \rangle \langle \Phi_H^* \alpha_{g_1}^+ \ldots \alpha_{g_i}^+ \alpha_{g_i} \ldots \alpha_{g_1} \Phi_H \rangle} \leqq \qquad /5.36/$$

$$\leqq \sqrt{\langle \Phi_H^* \alpha_{f_1}^+ \alpha_{f_1} \Phi_H \rangle \langle \Phi_H^* \alpha_{g_1}^+ \alpha_{g_1} \Phi_H \rangle} \leqq \frac{Const}{V}.$$

Имеем также:

$$|\langle \Phi_H^* \alpha_{f_1} \ldots \alpha_{f_s} \Phi_H \rangle| \leqq \sqrt{\langle \Phi_H^* \alpha_{f_1} \ldots \alpha_{f_{s-1}} \alpha_{f_{s-1}}^+ \ldots \alpha_{f_1}^+ \Phi_H \rangle \langle \Phi_H^* \alpha_{f_s}^+ \alpha_{f_s} \Phi_H \rangle} \leqq \qquad /5.37/$$

$$\leqq \sqrt{\langle \Phi_H^* \alpha_{f_s}^+ \alpha_{f_s} \Phi_H \rangle} \leqq \frac{Const}{\sqrt{V}}$$

и

$$|\langle \Phi_H^* \alpha_{f_1}^+ \ldots \alpha_{f_s}^+ \Phi_H \rangle| \leqq \sqrt{\langle \Phi_H^* \alpha_{f_1}^+ \alpha_{f_1} \Phi_H \rangle} \leqq \frac{Const}{\sqrt{V}}. \qquad /5.38/$$

Сравним теперь средние

$$\langle \Phi_H^* \mathfrak{U}_{f_1} \ldots \mathfrak{U}_{f_s} \Phi_H \rangle$$

/где $\mathfrak{U}_f = a_f$ или $= a_f^+$ / с соответствующими средними, вычисленными исходя из гамильтониана H_0, в котором положено: $\nu + \sigma = C$.

Для удобства будем обозначать средние этих типов соответственно:

$$\langle \mathfrak{U}_{f_1} \ldots \mathfrak{U}_{f_s} \rangle_H \qquad и \qquad \langle \mathfrak{U}_{f_1} \ldots \mathfrak{U}_{f_s} \rangle_{H_0}.$$

Оценим величину разности:

$$\langle \mathfrak{U}_{f_1} \ldots \mathfrak{U}_{f_s} \rangle_H - \langle \mathfrak{U}_{f_1} \ldots \mathfrak{U}_{f_s} \rangle_{H_0}. \qquad /5.39/$$

Скажем несколько слов о том, как вычисляется

$$\langle \mathfrak{U}_{f_1} \ldots \mathfrak{U}_{f_s} \rangle_{H_0}.$$

Мы пользуемся формулами:

$$a_f^+ = u_f \alpha_f^+ - v_f \alpha_{-f}$$
$$a_f = u_f \alpha_f - v_f \alpha_{-f}^+$$

и затем приводим произведение

$$\mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s}$$

к сумме произведений нормального типа, у которых все α^+ стоят впереди α. Так как все члены типа

$$\langle \alpha^+ \dots \alpha^+ \rangle_{H_0} ; \quad \langle \alpha \dots \alpha \rangle_{H_0} ; \quad \langle \alpha^+ \dots \alpha \rangle_{H_0} \qquad /5.40/$$

равны нулю, мы и получаем выражение для $\langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{H_0}$.

Применим эту же процедуру для вычисления

$$\langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_H .$$

Как видно разность /5.40/ вся обусловлена членами, пропорциональными

$$\langle \alpha^+ \dots \alpha^+ \rangle_H ; \quad \langle \alpha \dots \alpha \rangle_H ; \quad \langle \alpha^+ \dots \alpha \rangle_H , \qquad /5.41/$$

которые в отличие от /5.40/, вообще говоря, не равны нулю. Но для величин /5.41/ имеются оценки /5.36/ - /5.38/. Поэтому имеем:

$$\left| \langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_H - \langle \mathfrak{A}_{f_1} \dots \mathfrak{A}_{f_s} \rangle_{H_0} \right| \leqq \frac{Const}{\sqrt{V}} . \qquad /5.42/$$

Рассмотрим теперь двухвременные корреляционные функции и покажем, что разности

$$\langle \mathcal{B}_{f_1}(t) \dots \mathcal{B}_{f_\ell}(t) \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \dots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau) \rangle_H - \langle \mathcal{B}_{f_1}(t) \dots \mathcal{B}_{f_\ell}(t) \mathfrak{A}_{f_m}(\tau) \dots \mathfrak{A}_{f_n}(\tau) \rangle_{H_0} , \qquad /5.43/$$

где $\mathfrak{A}_f, \mathcal{B}_f$ равны или a_f, или a_f^+

все будут ограничены по модулю величинами порядка $\frac{1}{\sqrt{V}}$. Заметим, что с одной стороны:

$$\langle \alpha^+_{f_1}(t)\ldots \alpha_{f_j}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots \mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_{H_0} = 0, \tag{5.44}$$

а с другой

$$|\langle \alpha^+_{f_1}(t)\ldots \alpha_{f_j}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots \mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H| \leq$$

$$\leq \sqrt{\langle \alpha^+_{f_1}(t)\,\alpha_{f_1}(t)\rangle_H\,\langle w^+ w\rangle_H} = \sqrt{\langle \alpha^+_{f_1}\alpha_{f_1}\rangle_H\,\langle w^+ w\rangle_H}, \tag{5.45}$$

где

$$w = \ldots \alpha_{f_j}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots \mathcal{U}_{f_n}(\tau)$$

так что

$$|\langle \alpha^+_{f_1}(t)\ldots \alpha_{f_j}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots \mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H| \leq \sqrt{\langle \alpha^+_{f_1}\alpha_{f_1}\rangle} \leq \frac{Const}{\sqrt{V}}. \tag{5.46}$$

Поэтому нам надо только установить, что разности типа

$$\langle \alpha_{f_1}(t)\ldots \alpha_{f_e}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots \mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H - \langle \alpha_{f_1}(t)\ldots \mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_{H_0}$$

будут ограничены по модулю величинами порядка $\frac{1}{\sqrt{V}}$. Положим

$$\langle \alpha_{f_1}(t)\ldots \alpha_{f_e}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots \mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H = \Gamma(t-\tau). \tag{5.47}$$

Имеем в силу /5.8/:

$$i\,\frac{d\Gamma(t-\tau)}{dt} - \left\{\Omega(f_1) + \ldots + \Omega(f_e)\right\}\Gamma(t-\tau) = \Delta(t-\tau), \tag{5.48}$$

где

$$\Omega(f) = \sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}$$

и

$$\Delta(t-\tau) = \Delta_1(t-\tau) + \ldots + \Delta_\ell(t-\tau)$$

$$\Delta_1(t-\tau) = -\langle R^+_{f_1}(t)\,\alpha_{f_2}(t)\ldots\alpha_{f_\ell}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots\mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H$$

$$\ldots$$

$$\Delta_\ell(t-\tau) = -\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_{\ell-1}}(t)\,R^+_{f_\ell}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots\mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H .$$

Но

$$|\Delta_s(t-\tau)| \leqq \sqrt{\langle\alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_{s-1}}(t)\,R^+_{f_s}(t)\ldots\alpha_{f_\ell}(t)\,\alpha^+_{f_\ell}(t)\ldots R_{f_s}(t)\ldots\alpha^+_{f_1}(t)\rangle_H} \times$$

$$\times\sqrt{\langle\mathcal{U}^+_{f_n}(\tau)\ldots\mathcal{U}^+_{f_m}(\tau)\,\mathcal{U}_{f_n}(\tau)\ldots\mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H} =$$

$$= \sqrt{\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_{s-1}}\,R^+_{f_s}\ldots\alpha_{f_\ell}\,\alpha^+_{f_\ell}\ldots R_{f_s}\ldots\alpha^+_{f_1}\rangle_H\,\langle\mathcal{U}^+_{f_n}\ldots\mathcal{U}_{f_n}\rangle_H} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\langle\alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_{s-1}}\,R^+_{f_s}\ldots\alpha_{f_\ell}\,\alpha^+_{f_\ell}\,R_{f_s}\ldots\alpha^+_{f_1}\rangle_H}$$

и потому, на основании /5.15/:

$$|\Delta_s(t-\tau)| \leqq \frac{\text{Const}}{\sqrt{V}} . \qquad /5.49/$$

Следовательно:

$$|\Delta(t-\tau)| \leqq \frac{S}{\sqrt{V}} \qquad \text{где } S = \text{const} . \qquad /5.50/$$

Но из /5.48/ имеем

$$\Gamma(t-\tau) = \Gamma(0)\, e^{-i\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_\ell)\}(t-\tau)} + \qquad /5.51/$$

$$+\exp\Big[\{-i[\Omega(f_1)+\ldots\Omega(f_\ell)](t-\tau)\}\Big\{\int\limits_0^{t-\tau} e^{i[\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_\ell)]\omega}\,\Delta(\omega)\,d\omega\Big\}\Big].$$

Откуда, в силу /5.50/

$$\left|\Gamma(t-\tau) - \Gamma(0)\, e^{-i\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_\ell)\}(t-\tau)}\right| \leqq \frac{S}{\sqrt{V}}\,|t-\tau|. \qquad /5.52/$$

Но с другой стороны

$$\langle \alpha_{f_1}(t)\ldots \alpha_{f_\ell}(t)\ldots \mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots \mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_{H_0} = \qquad /5.53/$$

$$= e^{-i\{\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_\ell)\}(t-\tau)}\,\langle \alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_\ell}\,\mathcal{U}_{f_m}\ldots\mathcal{U}_{f_n}\rangle_{H_0}.$$

Итак, по /5.52/, /5.53/:

$$\mathcal{D} \equiv \left|\langle \alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_\ell}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots\mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H - \langle \alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_\ell}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots\mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_{H_0}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{S}{\sqrt{V}}\,|t-\tau| + \left|\langle \alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_\ell}\,\mathcal{U}_{f_m}\ldots\mathcal{U}_{f_n}\rangle_H - \langle \alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_\ell}\,\mathcal{U}_{f_m}\ldots\mathcal{U}_{f_n}\rangle_{H_0}\right|.$$

Но во втором члене правой части стоит разность одновременных средних, и, как ранее было показано /см. /5.42/ /, она мажорируется членом порядка $\frac{1}{\sqrt{V}}$. Таким образом устанавливаем для двухвременных средних, что:

$$\left|\langle \mathcal{B}_{f_1}(t)\ldots\mathcal{B}_{f_\ell}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots\mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_H - \langle \mathcal{B}_{f_1}(t)\ldots\mathcal{B}_{f_\ell}(t)\,\mathcal{U}_{f_m}(\tau)\ldots\mathcal{U}_{f_n}(\tau)\rangle_{H_0}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{G_1}{\sqrt{V}}\,|t-\tau| + \frac{G_2}{\sqrt{V}}; \qquad G_1, G_2 = const. \qquad /5.54/$$

Эти оценки можно обобщить и на случай S -временных корреляционных средних:

$$\langle \mathcal{P}_s(t_s)\, \mathcal{P}_{s-1}(t_{s-1}) \ldots \mathcal{P}_1(t_1) \rangle \qquad /5.55/$$

$$\mathcal{P}_j(t) = \mathcal{U}_1^{(j)}(t) \ldots \mathcal{U}_\ell^{(j)}(t)$$

и

$\mathcal{U}_s^{(j)}(t)$ равно $a_f(t)$ или $a_f^+(t)$.

Покажем, что:

$$\left| \langle \mathcal{P}_s(t_s) \ldots \mathcal{P}_1(t_1) \rangle_H - \langle \mathcal{P}_s(t_s) \ldots \mathcal{P}_1(t_1) \rangle_{H_0} \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{\left(K_s |t_s - t_{s-1}| + \ldots + K_2 |t_2 - t_1| + Q_s \right)}{\sqrt{V}}, \qquad /5\_56/$$

где

$$K_j = Const, \qquad Q_s = Const. \qquad /5.57/$$

Доказательство легко осуществить методом индукции. Допустим, что эти соотношения верны для $S-1$ временных средних, и докажем их для S -временных. Рассуждая как и в двухвременном случае, видим, что достаточно будет доказать /5.56/ для

$$\mathcal{P}_s(t) = \alpha_{f_1}(t) \ldots \alpha_{f_\ell}(t).$$

Но тогда

$$\langle \mathcal{P}_s(t_s)\, \mathcal{P}_{s-1}(t_{s-1}) \ldots \mathcal{P}_1(t_1) \rangle_{H_0} =$$

$$= \exp\{-i(\Omega_{f_1} + \ldots + \Omega_{f_\ell})(t_s - t_{s-1})\} \langle \mathcal{P}_s(t_{s-1})\, \mathcal{P}_{s-1}(t_{s-1}) \ldots \mathcal{P}_1(t_1) \rangle_{H_0}. \qquad /5.58/$$

С другой стороны, на основе /5.8/, /5.15/ и рассуждений, установивших неравенство /5.52/, убедимся, что

$$\left| \langle \mathcal{P}_s(t_s)\mathcal{P}_{s-1}(t_{s-1})\dots\mathcal{P}_1(t_1)\rangle_H - \exp\{-i(\Omega_{f_1}+\dots+\Omega_{f_e})(t_s-t_{s-1})\}\times \right.$$
$$\left. \times\langle \mathcal{P}_s(t_{s-1})\mathcal{P}_{s-1}(t_{s-1})\dots\mathcal{P}_1(t_1)\rangle_H \right| \leqq \frac{K_1^{(s)}|t_s-t_{s-1}|}{\sqrt{V}} \qquad /5.59/$$

где $K_1^{(s)} = const$

Таким образом

$$\left| \langle \mathcal{P}_s(t_s)\dots\mathcal{P}_1(t_1)\rangle_H - \langle \mathcal{P}_s(t_s)\dots\mathcal{P}_1(t_1)\rangle_{H_0} \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{K_1^{(s)}|t_s-t_{s-1}|}{\sqrt{V}} + \left| \langle \mathcal{P}_s(t_{s-1})\mathcal{P}_{s-1}(t_{s-1})\dots\mathcal{P}_1(t_1)\rangle_H - \right. \qquad /5.60/$$
$$\left. - \langle \mathcal{P}_s(t_{s-1})\mathcal{P}_{s-1}(t_{s-1})\dots\mathcal{P}_1(t_1)\rangle_{H_0} \right| .$$

Но второй член в правой части представляет разность корреляционных средних с $(s-1)$ временами, для которых по допущению, принятые оценки установлены. Поэтому-то они оказываются верными и для s -временных средних. Итак, H_0 дает асимптотическое приближение для всех корреляционных средних типа:

$$\langle \mathcal{P}_s(t_s)\dots\mathcal{P}_1(t_1)\rangle .$$

Следовательно, такое же утверждение имеет место и для функций Грина, построенных на основе рассматривавшихся операторов.

<u>Примечание.</u>

Заметим, что в оценках степени приближения мы могли получить везде $\frac{Const}{V}$ вместо полученных $\frac{Const}{\sqrt{V}}$, если бы в определении u_f, v_f, H_0 заменили бы C на

$$C_1 = \langle L + \nu \rangle_H = \langle L^+ + \nu \rangle_H \qquad /5.61/$$

Так как очевидно /см. /4.58/ /:

$$(C - C_1)^2 \leqq \frac{Const}{V},$$

то все оценки типа /5.12/, /5.15/, /5.35/ остаются справедливыми. Добавляются еще новые полезные соотношения:

$$\left| \langle A_{f_1} \ldots R_f \ldots A_{f_n} \rangle_H \right| \leqq \frac{Const}{V}$$

$$\left| \langle A_{f_1} \ldots R_f^+ \ldots A_{f_n} \rangle_H \right| \leqq \frac{Const}{V}. \qquad /5.62/$$

Для их доказательства достаточно раскрыть выражения:

$$\langle A_{f_1} \ldots R_f \ldots A_{f_n} \rangle_H \; ; \qquad \langle A_{f_1} \ldots R_f^+ \ldots A_{f_n} \rangle_H , \qquad /5.63/$$

выразив все a и a^+ через α и α^+. Тогда выражения /5.33/ можем представить суммой членов типа

$$\langle \alpha^+ \ldots \alpha \rangle_H$$

$$\langle (L + \nu - C_1) \ldots \alpha \rangle_H \; ; \qquad \langle \alpha^+ \ldots (L + \nu - C_1) \rangle_H$$

$$\langle (L^+ + \nu - C_1) \ldots \alpha \rangle_H \; ; \qquad \langle \alpha^+ \ldots (L^+ + \nu - C_1) \rangle_H \qquad /5.64/$$

$$Const \langle L + \nu - C_1 \rangle_H \equiv 0 \; ; \qquad Const \langle L^+ + \nu - C_1 \rangle_H \equiv 0$$

и коммутационных членов порядка $\frac{1}{V}$. /Равенство нулю последних двух выражений /5.64/ следует из /5.61/ /. Применяя к /5.64/ неравенство

$$|\langle A B \rangle| \leqq \sqrt{|\langle A A^+ \rangle|} \sqrt{|\langle B^+ B \rangle|},$$

а также /5.35/, видим, что все эти величины будут порядка $\frac{1}{V}$, что и доказывает /5.62/.

Воспользуемся теперь этими дополнительными соотношениями. Рассмотрим выражения

$$\langle \alpha^+_{f_1} \dots \alpha^+_{f_n} \rangle,$$

очевидно не зависящие от t. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\langle \alpha^+_{f_1} \dots \alpha^+_{f_n} \rangle_H = \langle \frac{d\alpha^+_{f_1}}{dt} \dots \alpha^+_{f_n} \rangle_H + \dots + \langle \alpha^+_{f_1} \dots \frac{d\alpha^+_{f_n}}{dt} \rangle_H = 0. \qquad /5.65/$$

Следовательно, из /5.7/ получим

$$\left(\Omega(f_1) + \dots + \Omega(f_n)\right) \langle \alpha^+_{f_1} \dots \alpha^+_{f_n} \rangle_H =$$

$$= \langle R_{f_1} \dots \alpha^+_{f_n} \rangle_H + \dots + \langle \alpha^+_{f_1} \dots R_{f_n} \rangle_H . \qquad /5.66/$$

Но, в силу /5.62/:

$$\left| \langle R_{f_1} \dots \alpha^+_{f_n} \rangle + \dots + \langle \alpha^+_{f_1} \dots R_{f_n} \rangle \right| \leqq \frac{D}{V}; \quad D = \mathrm{Const} \qquad /5.67/$$

и потому

$$\left| \langle \alpha^+_{f_1} \dots \alpha^+_{f_n} \rangle \right| \leqq \frac{D}{V\left(\Omega(f_1) + \dots + \Omega(f_n)\right)} . \qquad /5.68/$$

Откуда, переходя к сопряженным величинам:

$$\left| \langle \alpha_{f_1} \dots \alpha_{f_n} \rangle \right| \leqq \frac{D}{V\left(\Omega(f_1) + \dots + \Omega(f_n)\right)} \qquad /5.69/$$

Воспользовавшись новыми неравенствами /5.68/, /5.69/ вместо старых /5.37/ /5.38/ /а /5.36/ сохраняем/, мы и можем показать, что имеет место неравенство

$$\left| \langle \mathcal{U}_{f_1} \ldots \mathcal{U}_{f_s} \rangle_H - \langle \mathcal{U}_{f_1} \ldots \mathcal{U}_{f_s} \rangle_{H_0} \right| \leqq \frac{Const}{V}, \qquad /5.70/$$

заменяющее неравенство /5.42/.

Аналогичные улучшения оценок могут быть выполнены для всех корреляционных средних ранее рассматривавшихся типов.

Мы не будем здесь давать общего доказательства. Ограничимся оценкой разности:

$$\langle \alpha_{f_1}(t) \ldots \alpha_{f_\ell}(t) \alpha^+_{g_1}(\tau) \ldots \alpha^+_{g_r}(\tau) \rangle_H - \langle \alpha_{f_1}(t) \ldots \alpha^+_{g_r}(\tau) \rangle_{H_0}. \qquad /5.71/$$

Положим

$$\Gamma_{\substack{H \\ H_0}}(t-\tau) = \langle \alpha_{f_1}(t) \ldots \alpha^+_{g_r}(\tau) \rangle_{\substack{H \\ H_0}}. \qquad /5.72/$$

Имеем:

$$i \frac{\partial \Gamma_H(t-\tau)}{\partial t} = \left(\Omega(f_1) + \ldots + \Omega(f_\ell) \right) \Gamma_H(t-\tau) + \Delta_H(t-\tau), \qquad /5.73/$$

где

$$\Delta_H = -\sum_j \langle \alpha_{f_1}(t) \ldots R^+_{f_j}(t) \ldots \alpha_{f_\ell}(t) \alpha^+_{g_1}(\tau) \ldots \alpha^+_{g_r}(\tau) \rangle_H. \qquad /5.74/$$

Дифференцируя /5.74/ по τ, найдем

$$i \frac{\partial \Delta_H(t-\tau)}{\partial \tau} = -\left(\Omega(g_1) + \ldots + \Omega(g_r) \right) \Delta_H(t-\tau) + \zeta(t-\tau), \qquad /5.75/$$

где

$$\zeta(t-\tau) = -\sum_{j,s} \langle \alpha_{f_1}(t) \ldots R^+_{f_j}(t) \ldots \alpha_{f_\ell}(t) \alpha^+_{g_1}(\tau) \ldots R_{f_s}(\tau) \ldots \alpha^+_{g_r}(\tau) \rangle_H. \qquad /5.76/$$

Но ввиду /5.15/ :

$$|\zeta(t-\tau)| \leqq \frac{Q}{V}, \qquad \text{где} \quad Q = const. \qquad /5.77/$$

Поэтому из /5.75/ обычным путем получим /см. например, /5.48/ - /5.72/ /:

$$\left|\Delta_H(t-\tau) - \Delta_H(0)\exp\{i[\Omega(g_1)+\ldots+\Omega(g_r)](\tau-t)\}\right| \leqq \leqq \frac{Q}{V}|t-\tau|. \qquad /5.78/$$

Но в силу /5.62/ и /5.74/ :

$$|\Delta_H(0)| \leqq \frac{Q_1}{V}; \quad Q_1 = const. \qquad /5.79/$$

Значит

$$|\Delta_H(t-\tau)| \leqq \frac{Q_1 + Q|t-\tau|}{V}. \qquad /5.80/$$

Подставим эту оценку в /5.73/. Найдем:

$$\left|\Gamma_H(t-\tau) - \Gamma_H(0)\exp\{i[\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)](\tau-t)\}\right| \leqq \leqq \frac{Q_1|t-\tau| + Q|t-\tau|^2\frac{1}{2}}{V}. \qquad /5.81/$$

С другой стороны

$$\Gamma_{H_0}(t-\tau) = \Gamma_{H_0}(0)\exp\{i[\Omega(f_1)+\ldots+\Omega(f_l)](\tau-t)\}. \qquad /5.82/$$

Значит:

$$|\Gamma_H(t-\tau) - \Gamma_{H_0}(t-\tau)| \leqq |\Gamma_H(0) - \Gamma_{H_0}(0)| + + \frac{Q_1|t-\tau| + Q|t-\tau|^2\frac{1}{2}}{V}. \qquad /5.83/$$

Но, по /5.70/ :

$$|\Gamma_H(0) - \Gamma_{H_0}(0)| = |\langle \alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_l}\alpha^+_{g_1}\ldots\alpha^+_{g_r}\rangle_H - \qquad /5.84$$

$$- \langle \alpha_{f_1} \dots \alpha_{f_\ell} \alpha^+_{g_1} \dots \alpha^+_{g_2} \rangle_{H_0} \Big| \leqq \frac{Q_2}{V}; \quad Q_2 = const.$$

Итак

$$\left| \langle \alpha_{f_1}(t) \dots \alpha_{f_\ell}(t) \alpha^+_{g_1}(\tau) \dots \alpha^+_{g_2}(\tau) \rangle_H - \langle \alpha_{f_1}(t) \dots \alpha^+_{g_2}(\tau) \rangle_{H_0} \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{Q_2 + Q_1|t-\tau| + Q_2|t-\tau|^{\frac{1}{2}}}{V}.$$

Рассуждая далее по этой схеме, нетрудно везде в ранее полученных оценках повысить порядок $\frac{1}{\sqrt{V}}$ до $\frac{1}{V}$.

§ 6 Функция Грина для случая $\nu = 0.$

В предыдущем параграфе мы получили все необходимые асимптотические оценки для функции Грина в случае $\nu > 0$. Поскольку некоторые оценки /см. /4.58//, которыми мы пользовались в § 5, при $\nu = 0$ не имеют смысла, результаты этого параграфа не переносятся непосредственно на случай $\nu = 0$. Этот случай требует специального рассмотрения.

Так как теперь L и L^+ не принимают с асимптотической точностью определенных значений в наинизшем энергетическом состоянии Φ_H мы, в отличие от ранее рассмотренного случая, будем работать с амплитудами

$$\alpha_f = u_f a_f + v_f a^+_{-f} \frac{L}{C}, \tag{6.1}$$

где

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{T(f)}{\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}}}$$

/6.2/

$$v_f = -\frac{\epsilon(f)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{T(f)}{\sqrt{C^2\lambda^2(f) + T^2(f)}}}.$$

Эти амплитуды удовлетворяют перестановочным соотношениям для Ферми-амплитуд не точно, а лишь с асимптотическим приближением.

Нам необходимо будет для получения оценок установить ряд неравенств.

Рассмотрим, в прежде всего, выражение

$$\sum \Omega(f)\,\alpha_f^+\alpha_f,$$

в котором

$$\Omega(f)=\sqrt{C^2\lambda^2(f)+T^2(f)}\,. \qquad /6.2'/$$

Имеем, раскрывая по формуле /6.1/ :

$$\sum \Omega(f)\alpha_f^+\alpha_f=\sum \Omega(f)\Big\{u_f a_f^+ + v_f\frac{L^+}{C}a_{-f}\Big\}\Big\{u_f a_f + v_f a_{-f}^+\frac{L}{C}\Big\}=$$

$$=\sum \Omega(f)\Big\{u_f^2 a_f^+ a_f + v_f^2\frac{L^+}{C}a_{-f}a_{-f}^+\frac{L}{C} + u_f v_f\frac{L^+}{C}a_{-f}a_f + u_f v_f a_f^+ a_{-f}^+\frac{L}{C}\Big\}.$$

Но

$$\sum \Omega(f)\,v_f^2\frac{L^+}{C}a_{-f}a_{-f}^+\frac{L}{C}=$$

$$=\sum \Omega(f)v_f^2\frac{L^+}{C}a_f^+a_f\frac{L}{C}+\sum \Omega(f)\,v_f^2\,\frac{L^+L}{C^2}=$$

$$=-\sum \Omega(f)v_f^2\,a_f^+\,\frac{L^+L}{C^2}a_f+\sum \Omega(f)\,v_f^2\,\frac{L^+L}{C^2}\,.$$

Далее, так как

$$u_f v_f=-\frac{C\lambda(f)}{2\Omega(f)},$$

то

$$-\sum \Omega(f)\Big\{u_f v_f\frac{L^+}{C}a_{-f}a_f+u_f v_f a_f^+a_{-f}^+\frac{L}{C}\Big\}=V L^+ L.$$

Следовательно:

$$\sum \Omega(f)\alpha_f^+\alpha_f = \sum_f \Omega(f)\left\{u_f^2 a_f^+ a_f - v_f^2 a_f^+ \frac{L^+L}{c^2} a_f\right\} +$$

$$+\sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+L}{c^2} - V L^+L =$$

$$= \sum_f \Omega(f)(u_f^2 - v_f^2) a_f^+ a_f - \sum_f \Omega(f) v_f^2 a_f^+ \frac{L^+L - c^2}{c^2} a_f +$$

$$+\sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+L}{c^2} - V L^+L.$$

Но

$$\Omega(f)(u_f^2 - v_f^2) = T(f)$$

и потому

$$H = \sum T(f) a_f^+ a_f - V \frac{L^+L}{2} =$$

$$= \sum \Omega(f)\alpha_f^+\alpha_f + \frac{VL^+L}{2} - \sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+L}{c^2} +$$

$$+\sum \Omega(f) v_f^2 a_f^+ \frac{L^+L - c^2}{c^2} a_f$$

и, следовательно,

$$H = \sum \Omega(f)\alpha_f^+\alpha_f +$$

$$+\frac{V}{2}\left\{c^2 - \frac{2}{V}\sum \Omega(f) v_f^2\right\} +$$

$$+\frac{V(L^+L - c^2)}{2} - \sum \Omega(f) v_f^2 \frac{L^+L - c^2}{c^2} +$$

$$+\sum \Omega(f) v_f^4 \frac{L^+L - c^2}{c^2} +$$

$$+\sum \Omega(f) v_f^2 \left\{ a_f^+ \frac{L^+L - C^2}{C^2} a_f - v_f^2 \frac{L^+L - C^2}{C^2} \right\}.$$

Имеем с другой стороны

$$C^2 \frac{V}{2} - \sum \Omega(f) v_f^2 + \sum \Omega(f) v_f^4 =$$

$$= C^2 \frac{V}{2} - \sum \Omega(f) u_f^2 v_f^2 = \frac{V}{2} \left\{ C^2 - \frac{1}{2V} C^2 \sum \frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{C^2 \lambda^2(f) + T^2(f)}} \right\} =$$

$$= \frac{V}{2} C^2 \mathcal{F}'(C^2);$$

где $\mathcal{F}(C^2) = C^2 - \frac{2}{V} \sum \Omega(f) v_f^2.$

Поэтому

$$H = \sum \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f - w + \frac{V}{2} (L^+L - C^2) \mathcal{F}'(C^2) + \mathcal{F}(C^2). \qquad /6.3/$$

Где

$$w = -\sum \Omega(f) v_f^2 \left\{ a_f^+ \frac{L^+L - C^2}{C^2} a_f - v_f^2 \frac{L^+L - C^2}{C^2} \right\}. \qquad /6.4/$$

Но по своему определению C^2 является корнем уравнения /см. /3.8//

$$\mathcal{F}'(x) = 0.$$

Кроме того,

$$\langle \Phi_H^* H \Phi_H \rangle \leq \mathcal{F}(C^2).$$

Стало быть

$$\langle \Phi_H^* \sum \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_H \rangle \leq$$

$$\leq \langle \Phi_H^* w \Phi_H \rangle . \qquad /6.5/$$

Займемся теперь оценкой среднего значения w . Обратимся к определению амплитуд α /6.1/. Имеем

$$\alpha_f^+ = u_f a_f^+ + v_f \frac{L^+}{C} a_{-f}$$
$$\alpha_{-f} = -v_f a_f^+ \frac{L}{C} + u_f a_{-f} .$$

Откуда

$$u_f \alpha_f^+ - v_f \frac{L^+}{C} \alpha_{-f} = u_f^2 a_f^+ + v_f^2 \frac{L^+}{C} a_f^+ \frac{L}{C} =$$
$$= a_f^+ \left(u_f^2 + v_f^2 \frac{L^+ L}{C^2} \right).$$

Положим

$$\eta_f^+ = a_f^+ v_f^2 \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} = v_f^2 \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} a_f^+ + \frac{2\lambda(f) L^+}{V C^2} a_{-f} \qquad /6.6/$$
$$\eta_f = v_f^2 \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} a_f = v_f^2 a_f \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} + \frac{2\lambda(f)}{V C^2} a_{-f}^+ L .$$

Тогда

$$a_f^+ = u_f \alpha_f^+ - v_f \frac{L^+}{C} \alpha_{-f} + \eta_f^+ \qquad /6.7/$$
$$a_f = u_f \alpha_f - v_f \alpha_{-f}^+ \frac{L}{C} + \eta_f .$$

Обратимся теперь к формуле /6.4/ и напишем:

$$w = w_1 + w_2 + w_3$$

$$w_1 = \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \alpha_f^+ \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} a_f =$$
$$= \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \alpha_f^+ a_f \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} +$$
$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \alpha_f^+ \frac{2\lambda(f)}{V \cdot C^2} a_{-f}^+ L$$

$$w_2 = \sum \Omega(f) v_f^2 \eta_f^+ \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} a_f =$$

$$= \sum \Omega(f) v_f^2 \eta_f^+ a_f \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} + \sum \Omega(f) v_f^2 \eta_f^+ \frac{2\lambda(f)}{V C^2} a_{-f}^+ L$$

$$w_3 = \sum \Omega(f) v_f^2 \left\{ - v_f \frac{L^+}{C} \alpha_{-f} \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} a_f - v_f^2 \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right\} =$$

$$= - \sum \Omega(f) v_f^3 \frac{L^+}{C} \left\{ \frac{L^+ L}{C^2} \alpha_{-f} - \alpha_{-f} \frac{L^+ L}{C^2} \right\} a_f +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 \left\{ - v_f \frac{L^+}{C} \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right) (\alpha_{-f} a_f + a_f \alpha_{-f}) - \right.$$

$$\left. - v_f^2 \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right\} + \sum \Omega(f) v_f^3 \frac{L^+}{C} \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right) a_f \alpha_{-f} .$$

Начнем теперь оценивать средние w_1, w_2, w_3, для w_1 воспользуемся ранее доказанным неравенством /4.47/, которое напишем в виде:

$$\left\langle \phi_H^* \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \right) \phi_H \right\rangle \leq \frac{G}{V} , \text{ где } G = const.$$
$$\left\langle \phi_H^* \left(\frac{C^2 - L L^+}{C^2} \right) \phi_H \right\rangle \leq \frac{G}{V} . \qquad /6.8/$$

Имеем:

$$\left| \langle \phi_H^* w_1 \phi_H \rangle \right| \leq \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \left| \left\langle \phi_H^* \alpha_f^+ a_f \frac{C^2 - L^+ L}{C^2} \phi_H \right\rangle \right| +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \left| \langle \phi_H^* \alpha_f^+ a_{-f}^+ L \phi_H \rangle \right| \frac{2|\lambda(f)|}{V C^2} \leq$$

$$\leq \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \sqrt{\langle \phi_H^* \alpha_f^+ a_f a_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle} \sqrt{\left\langle \phi_H^* \left(\frac{c^2 - L^+ L}{c^2}\right)^2 \phi_H \right\rangle} +$$

$$+ \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \sqrt{\langle \phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle \langle \phi_H^* L^+ a_{-f} a_{-f}^+ L \phi_H \rangle} \frac{2|\lambda(f)|}{V c^2} \leq$$

$$\leq \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \left(\frac{G}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\langle \phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle} +$$

$$+ \frac{1}{V} \sum \Omega(f) v_f^2 u_f \frac{2|\lambda(f)|}{c^2} |L| \sqrt{\langle \phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle} \leq$$

$$\leq \sqrt{\langle \phi_H^* \sum \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle} \left\{ \sqrt{\frac{G}{V} \sum_f \Omega(f) v_f^4 u_f^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2|L|}{c^2 \sqrt{V}} \sqrt{\frac{1}{V} \sum_f \Omega(f) v_f^4 u_f^2 |\lambda(f)|^2} \right\}.$$

Следовательно,

$$|\langle \phi_H^* W_1 \phi_H \rangle| \leq R_1 \sqrt{\langle \phi_H^* \sum_f \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle} \; ; \quad R_1 = const$$

Совершенно аналогично, найдем:

$$|\langle \phi_H^* W_2 \phi_H \rangle| \leq R_2 \; , \text{ где } R_2 = const.$$

Перейдем к W_3 . Заметим, что

$$\alpha_{-f} a_f + a_f \alpha_{-f} = \left(- v_f a_f^+ \frac{L}{c} + u_f a_{-f}\right) a_f +$$

$$+ a_f \left(- v_f a_f^+ \frac{L}{c} + u_f a_{-f}\right) = - \frac{v_f}{c} \left(a_f^+ L a_f + a_f a_f^+ L\right) =$$

$$= -\frac{v_f}{c}\left(a_f^+ a_f + a_f a_f^+\right) L = -\frac{v_f}{c} L.$$

Значит /см. выражение для w_3 /:

$$\Delta \equiv \sum_f \Omega(f)\, v_f^2 \left\{ -v_f \frac{L^+}{c}\left(c^2 - \frac{L^+L}{c^2}\right)\left(\alpha_{-f} a_f + a_f \alpha_{-f}\right) - v_f^2 \frac{c^2 - L^+L}{c^2} \right\} =$$

$$= \sum_f \Omega(f)\, v_f^2 \left\{ v_f^2 \frac{L^+}{c}\left(\frac{c^2 - L^+L}{c^2}\right)\frac{L}{c} - v_f^2 \frac{c^2 - L^+L}{c^2} \right\} =$$

$$= \sum_f \Omega(f)\, v_f^4 \frac{L^+}{c^2}\left(\frac{LL^+ - L^+L}{c^2}\right) L - \sum_f \Omega(f)\, v_f^4 \left(\frac{c^2 - L^+L}{c^2}\right)^2$$

и потому /см. /А.18//

$$\left\langle \phi_k^* \Delta \phi_k \right\rangle \le \sum_f \Omega(f)\, v_f^4 \left\langle \phi_k^* \frac{L^+}{c}\left(\frac{LL^+ - L^+L}{c^2}\right)\frac{L}{c}\phi_k \right\rangle =$$

$$= \frac{2}{V^2 c^2} \sum_{f,f'} \Omega(f)\, v_f^4 \lambda^2(f') \left\langle \phi_k^* \frac{L^+}{c}\left(1 - a_{f'}^+ a_{f'} - a_{-f'}^+ a_{-f'}\right)\frac{L}{c}\phi_k \right\rangle \le$$

$$\le 2\frac{|L|^2}{c^4}\frac{1}{V}\sum_f \Omega(f)\, v_f^4 \frac{1}{V}\sum_{f'} \lambda^2(f') \le \text{const}.$$

Найдем также:

$$\sum_f \Omega(f)\, |v_f|^3 \left\langle \phi_k^* \frac{L^+}{c}\left(\frac{L^+L}{c^2}\alpha_{-f} - \alpha_{-f}\frac{L^+L}{c^2}\right) a_f \phi_k \right\rangle \le \text{const}$$

$$\sum_f \Omega(f)\, |v_f|^3 \left\langle \phi_k^* \frac{L^+}{c}\left(\frac{c^2 - L^+L}{c^2}\right) a_f \alpha_{-f} \phi_k \right\rangle \le$$

$$\leq R_3 \sqrt{\sum_f \langle \phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle \Omega(f)} .$$

Итак, собирая выражения для w_1, w_2, w_3, найдем

$$\langle \phi_H^* w \phi_H \rangle \leq \gamma_1 \sqrt{\langle \phi_H^* \sum_f \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle} + \gamma_2 ,$$

где

$$\gamma_1 = \mathrm{const}, \quad \gamma_2 = \mathrm{const} .$$

Подставляя это неравенство в /6.5/, получим:

$$\langle \phi_H^* \sum_f \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle \leq \gamma_1 \sqrt{\langle \phi_H^* \sum_f \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle} + \gamma_2 .$$

Положим:

$$x = \sqrt{\langle \phi_H^* \sum_f \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle} .$$

Тогда

$$x^2 - \gamma_1 x \leq \gamma_2 , \quad \left(x - \frac{\gamma_1}{2} \right)^2 \leq \gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{4}$$

и

$$x < \frac{\gamma_1}{2} + \sqrt{\gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{4}} .$$

Итак

$$\langle \phi_H^* \frac{1}{V} \sum_f \Omega(f) \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle \leq \frac{R}{V} , \qquad /6.9/$$

где

$$R = \left(\frac{\gamma_1}{2} + \sqrt{\gamma_2 + \frac{\gamma_1^2}{4}} \right)^2 = const.$$

Мы можем перейти теперь к рассмотрению уравнений движения. При $\nu = 0$ из уравнений /5.1/, /5.2/ имеем

$$i \frac{da_f}{dt} = T(f)\, a_f - \lambda(f)\, a_{-f}^+ L$$
$$i \frac{da_{-f}}{dt} = T(f)\, a_{-f} + \lambda(f)\, a_f^+ L. \qquad /6.10/$$

Поэтому

$$i \frac{dL}{dt} = \frac{1}{V} \sum \lambda(f) \left\{ T(f)\, a_{-f} + \lambda(f)\, a_f^+ L \right\} a_f +$$
$$+ \frac{1}{V} \sum \lambda(f)\, a_{-f} \left\{ T(f)\, a_f - \lambda(f)\, a_{-f}^+ L \right\} =$$
$$= \frac{2}{V} \sum \lambda(f)\, T(f)\, a_{-f} a_f + \frac{1}{V} \sum \lambda^2(f) \left(a_f^+ a_f - a_{-f} a_{-f}^+ \right) L =$$
$$= \frac{2}{V} \sum \lambda(f)\, T(f)\, a_{-f} a_f + \frac{1}{V} \sum \lambda^2(f) \left(a_f^+ a_f - a_f a_f^+ \right) L =$$
$$= \frac{2}{V} \sum \lambda(f)\, T(f)\, a_{-f} a_f +$$
$$+ \frac{1}{V} \sum \lambda^2(f) \left(2 a_f^+ a_f - 1 \right) L.$$

Заметим теперь, что

$$-2\lambda(f)\,T(f)\,u_f v_f \frac{L}{C} + \lambda^2(f)\left(2v_f^2 - 1\right)L =$$

$$= \lambda^2(f)\frac{T(f)}{\Omega(f)}L + \lambda^2(f)\left(1 - \frac{T(f)}{\Omega(f)} - 1\right)L = 0\ ;$$

следовательно,

$$i\frac{dL}{dt} = D_1 + D_2$$

$$D_1 = \frac{2}{V}\sum \lambda(f)\,T(f)\left\{a_{-f}a_f + u_f v_f \frac{L}{C}\right\} \qquad /6.11/$$

$$D_2 = \frac{2}{V}\sum \lambda^2(f)\left(a_f^+ a_f - v_f^2\right)L\,.$$

Но, ввиду /6.7/

$$a_{-f}a_f + u_f v_f \frac{L}{C} =$$

$$= \left(u_f \alpha_{-f} + v_f \alpha_f^+ \frac{L}{C}\right)\left(u_f \alpha_f - v_f \alpha_{-f}^+ \frac{L}{C}\right) + \eta_{-f} a_f + a_{-f}\eta_f - \eta_{-f}\eta_f + u_f v_f \frac{L}{C} =$$

$$= u_f^2 \alpha_{-f}\alpha_f - v_f^2 \alpha_f^+ \frac{L}{C}\alpha_{-f}^+ \frac{L}{C} - u_f v_f \alpha_{-f}\alpha_f^+ \frac{L}{C} +$$

$$+ u_f v_f \alpha_f^+ \frac{L}{C}\alpha_f + \eta_{-f} a_f + a_{-f}\eta_f - \eta_{-f}\eta_f + u_f v_f \frac{L}{C} = \qquad /6.12/$$

$$= u_f^2 \alpha_{-f}\alpha_f - u_f v_f\left(\alpha_{-f}\alpha_{-f}^+ + \alpha_{-f}^+\alpha_{-f} - 1\right)\frac{L}{C} -$$

$$- v_f^2 \alpha_f^+ \frac{L}{C}\alpha_{-f}^+ \frac{L}{C} + u_f v_f\left(\alpha_f^+ \frac{L}{C}\alpha_f + \alpha_{-f}^+\alpha_{-f}\frac{L}{C}\right) +$$

$$+ \eta_{-f} a_f + a_{-f}\eta_f - \eta_{-f}\eta_f\,.$$

Имеем далее:

$$\alpha_{-f}\alpha_{-f}^{+}+\alpha_{-f}^{+}\alpha_{-f}-1=\left(-v_f a_f^{+}\frac{L}{C}+u_f a_{-f}\right)\left(-v_f\frac{L^{+}}{C}a_f+u_f a_{-f}^{+}\right)+$$

$$+\left(-v_f\frac{L^{+}}{C}a_f+u_f a_{-f}^{+}\right)\left(-v_f a_f^{+}\frac{L}{C}+u_f a_{-f}\right)-1=$$

$$=v_f^2 a_f^{+}\frac{LL^{+}}{C^2}a_f+u_f^2 a_{-f}a_{-f}^{+}-u_f v_f a_f^{+}\frac{L}{C}a_{-f}^{+}-u_f v_f a_{-f}\frac{L^{+}}{C}a_f+$$

$$+v_f^2\frac{L^{+}}{C}a_f a_f^{+}\frac{L}{C}+u_f^2 a_{-f}^{+}a_{-f}-u_f v_f a_{-f}^{+}a_f^{+}\frac{L}{C}-u_f v_f\frac{L^{+}}{C}a_f a_{-f}-1=$$

$$=v_f^2 a_f^{+}\frac{LL^{+}-L^{+}L}{C^2}a_f+v_f^2\frac{L^{+}L}{C^2}+u_f^2-1-u_f v_f a_f^{+}\left(\frac{L}{C}a_{-f}^{+}-a_{-f}^{+}\frac{L}{C}\right)-$$

$$-u_f v_f\left(a_{-f}\frac{L^{+}}{C}-\frac{L^{+}}{C}a_{-f}\right)a_f$$

и поэтому

$$\alpha_{-f}\alpha_{-f}^{+}+\alpha_{-f}^{+}\alpha_{-f}-1=$$

$$=\frac{2}{V^2}\sum_{(g)}v_f^2 a_f^{+}\frac{\lambda^2(g)}{C^2}\left(1-a_g^{+}a_g-a_{-g}^{+}a_{-g}\right)a_f+$$

$$+v_f^2\frac{L^{+}L-C^2}{C^2}+u_f v_f a_f^{+}a_f\frac{2\lambda(f)}{V}+ \qquad /6.13/$$

$$+u_f v_f a_f^{+}a_f\frac{2\lambda(f)}{V}.$$

Имеем, следовательно:

$$\left\langle\phi_H^{*}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1^{+}\phi_H\right\rangle=\frac{2}{V}\sum_f\lambda(f)\,T(f)\,u_f^2\left\langle\phi_H^{*}\alpha_{-f}\alpha_f\mathcal{D}_1^{+}\phi_H\right\rangle-$$

$$-\frac{2}{V}\sum_f\lambda(f)T(f)\left\langle\phi_H^{*}\alpha_f^{+}\left\{v_f^2\frac{L}{C}\alpha_{-f}^{+}\frac{L}{C}-u_f v_f\left(\frac{L}{C}\alpha_f+\alpha_f\frac{L}{C}\right)\right\}\mathcal{D}_1^{+}\phi_H\right\rangle-$$

$$-\frac{4}{V^3}\sum_{fg}\lambda(f)T(f)u_f v_f^3\frac{\lambda^2(g)}{C^2}\left\langle \phi_H^* a_f^+\left(1-a_g^+a_g-a_{-g}^+a_{-g}\right)a_f\frac{L}{C}\mathcal{D}_1^+\phi_H\right\rangle+$$

$$+\frac{2}{V}\sum_f\lambda(f)T(f)\left\langle\phi_H^*\left(\eta_{-f}a_f-\eta_f a_{-f}+[a_{-f}\eta_f+\eta_f a_{-f}]-\eta_{-f}\eta_f\right)\mathcal{D}_1^+\phi_H\right\rangle+$$

$$-\frac{2}{V}\sum_f\lambda(f)T(f)\left\langle\phi_H^*\left\{v_f^2\frac{L^+L-C^2}{C^2}+2u_f v_f a_f^+ a_f\frac{2\lambda(f)}{V}\right\}\frac{L}{C}\mathcal{D}_1^+\phi_H\right\rangle$$

Приняв во внимание, что

$$\left\langle\phi_H^*\alpha_{-f}\alpha_f\mathcal{D}_1^+\phi_H\right\rangle=\left\langle\phi_H^*\alpha_{-f}\mathcal{D}_1^+\alpha_f\phi_H\right\rangle+$$

$$+\left\langle\phi_H^*\alpha_{-f}\left(\alpha_f\mathcal{D}_1^+-\mathcal{D}_1^+\alpha_f\right)\phi_H\right\rangle,$$

мы можем убедиться отсюда, на основании /6.8/ и /6.9/, что

$$\left\langle\phi_H^*\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1^+\phi_H\right\rangle\leq\frac{\Gamma_1}{V}\quad,\quad\Gamma_1=\mathrm{const}. \qquad /6.14/$$

Таким же образом можем получить

$$\left\langle\phi_H^*\mathcal{D}_1^+\mathcal{D}_1\phi_H\right\rangle\leq\frac{\Gamma_2}{V}\quad,\quad\Gamma_2=\mathrm{const}. \qquad /6.15/$$

Перейдем теперь к выражению $\mathcal{D}_2$. Имеем

$$a_f^+a_f-v_f^2=a_f^+\eta_f+\eta_f^+a_f-\eta_f^+\eta_f+$$

$$+\left(u_f\alpha_f^+-v_f\frac{L^+}{C}\alpha_{-f}\right)\left(u_f\alpha_f-v_f\alpha_{-f}^+\frac{L}{C}\right)-v_f^2=$$

$$=u_f^2\alpha_f^+\alpha_f+v_f^2\frac{L^+}{C}\alpha_{-f}\alpha_{-f}^+\frac{L}{C}-v_f^2-u_f v_f\alpha_f^+\alpha_{-f}^+\frac{L}{C}-$$

$$-u_f v_f \frac{L^+}{C}\alpha_{-f}\alpha_f + a_f^+\eta_f + \eta_f^+ a_f - \eta_f^+\eta_f =$$

$$= u_f^2\alpha_f^+\alpha_f + v_f^2\frac{L^+}{C}(\alpha_{-f}\alpha_{-f}^+ + \alpha_{-f}^+\alpha_{-f} - 1)\frac{L}{C} - v_f^2\,\frac{C^2 - L^+L}{C^2} -$$

$$- v_f^2\frac{L^+}{C}\alpha_{-f}^+\alpha_{-f}\frac{L}{C} - u_f v_f\alpha_f^+\alpha_{-f}^+\frac{L}{C} - u_f v_f\frac{L^+}{C}\alpha_{-f}\alpha_f +$$

$$+ a_f^+\eta_f + \eta_f^+ a_f - \eta_f^+\eta_f. \qquad /6.16/$$

Исходя отсюда и неравенств /6.8/ , /6.9/, можем установить, что

$$\langle \Phi_H^* \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2^+ \Phi_H \rangle \le \frac{\Gamma_3}{V} \quad ; \quad \Gamma_3 = \mathrm{const}$$

$$\langle \Phi_H^* \mathcal{D}_2^+ \mathcal{D}_2 \Phi_H \rangle \le \frac{\Gamma_3}{V}. \qquad /6.17/$$

Из /7.10/ имеем теперь:

$$\langle \Phi_H^* \left(\frac{dL}{dt}\right)^+ \frac{dL}{dt}\,\Phi_H \rangle \le \frac{\Gamma}{V}\,; \quad \Gamma = \mathrm{const}$$

$$\langle \Phi_H^* \,\frac{dL}{dt}\left(\frac{dL}{dt}\right)^+ \Phi_H \rangle \le \frac{\Gamma}{V}. \qquad /6.18/$$

Обратимся опять к уравнениям движения /6.11/. Учитывая /6.1/, /6.2/, получим

$$i\frac{d\alpha_f^+}{dt} = i\frac{d}{dt}\left(u_f a_f^+ + v_f\frac{L^+}{C}a_{-f}\right) =$$

$$= u_f\, i\frac{da_f^+}{dt} + v_f\frac{L^+}{C}\,i\,\frac{da_{-f}}{dt} + v_f\, i\,\frac{dL^+}{dt}\,\frac{a_{-f}}{C} =$$

$$= u_f\left\{-T(f)a_f^+ + \lambda(f)\,L^+a_{-f}\right\} +$$

$$+ v_f\frac{L^+}{C}\left\{T(f)a_{-f} + \lambda(f)a_f^+L\right\} + v_f\, i\,\frac{dL^+}{dt}\,\frac{a_{-f}}{C} =$$

$$= - a_f^+ \left\{ T(f) u_f - \lambda(f) v_f \frac{L^+L}{C} \right\} + \frac{L^+}{C} \left\{ u_f \lambda(f) C + T(f) v_f \right\} a_{-f} +$$

$$+ v_f \, i \frac{dL^+}{dt} \frac{a_{-f}}{C} =$$

$$= - a_f^+ \left\{ T(f) u_f - \lambda(f) v_f C \right\} +$$

$$+ \frac{L^+}{C} \left\{ u_f \lambda(f) C + T(f) v_f \right\} a_{-f} - a_f^+ \lambda(f) v_f \frac{C^2 - L^+L}{C} + v_f \, i \frac{dL^+}{dt} \frac{a_{-f}}{C} .$$

Но /см. /5.6//

$$u_f \lambda(f) C + T(f) v_f = \Omega(f) v_f$$ /6.19/

$$T(f) u_f - \lambda(f) v_f C = \Omega(f) u_f$$

поэтому $i \frac{d\alpha_f^+}{dt} + \Omega(f) \alpha_f^+ = R_f$ /6.20/

где $R_f = - a_f^+ \lambda(f) v_f \frac{C^2 - L^+L}{C} + v_f (\mathcal{D}_1^+ + \mathcal{D}_2^+) \frac{a_{-f}}{C}$.

Имеем далее

$$\langle \Phi_H^* R_f^+ R_f \Phi_H \rangle \leq 2 \langle \Phi_H^* \frac{C^2 - L^+L}{C} a_f a_f^+ \frac{C^2 - L^+L}{C} \Phi_H \rangle \lambda^2(f) v_f^2 +$$

$$+ 2 \langle \Phi_H^* \frac{a_{-f}^+}{C} (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)(\mathcal{D}_1^+ + \mathcal{D}_2^+) \frac{a_{-f}}{C} \Phi_H \rangle v_f^2 \leq$$

$$\leq 2 \lambda^2(f) v_f^2 \langle \Phi_H^* \frac{(C^2 - L^+L)^2}{C^2} \Phi_H \rangle +$$

$$+ 2 v_f^2 \langle \Phi_H^* \left\{ \frac{a_{-f}^+}{C} (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)(\mathcal{D}_1^+ + \mathcal{D}_2^+) \frac{a_{-f}}{C} - \right.$$

$$\left. - (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \frac{a_{-f}^+ a_{-f}}{C^2} (\mathcal{D}_1^+ + \mathcal{D}_2^+) \right\} \Phi_H \rangle +$$

$$+ 2 \langle \Phi_H^* (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)(\mathcal{D}_1^+ + \mathcal{D}_2^+) \Phi_H \rangle \frac{v_f^2}{C^2} .$$

И также

$$\langle \phi_H^* R_f R_f^+ \phi_H \rangle \le$$

$$\le 2 \langle \phi_H^* a_f^+ \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right)^2 a_f \phi_H \rangle \lambda^2(f) v_f^2 +$$

$$+ \frac{2 v_f^2}{C^2} \langle \phi_H^* (\mathcal{D}_1^+ + \mathcal{D}_2^+)(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \phi_H \rangle =$$

$$= 2\lambda^2 v_f^2 \langle \phi_H^* \left\{ a_f^+ \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right)\left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right) a_f - \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right) a_f^+ a_f \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right) \right\} \phi_H \rangle +$$

$$+ 2\lambda^2 v_f^2 \langle \phi_H^* \left(\frac{C^2 - L^+ L}{C} \right)^2 \phi_H \rangle + 2 \frac{v_f^2}{C^2} \langle \phi_H^* (\mathcal{D}_1^+ + \mathcal{D}_2^+)(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) \phi_H \rangle .$$

Отсюда следует, что

$$\langle \phi_H^* R_f R_f^+ \phi_H \rangle \le v_f^2 \frac{S}{V}, \qquad \text{где} \quad S = \mathrm{const} \qquad /6.21/$$

$$\langle \phi_H^* R_f^+ R_f \phi_H \rangle \le v_f^2 \frac{S}{V} .$$

Имея уравнения /6.20/ и неравенства /6.21/ мы можем повторить уже дословно наши рассуждения из предыдущего параграфа, где мы рассматривали случай $\nu > 0$. Мы получим теперь /см. 5.35//:

$$\langle \phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \phi_H \rangle \le \frac{S}{V} \frac{v_f^2}{2\pi \Omega^2(f)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)\tau| \, d\tau \right)^2 . \qquad /6.21'/$$

По сравнению с неравенством /6.9/ мы имеем здесь существенный прогресс.

Неравенство /6.9/ показывает, что $\langle \Phi_H^* \alpha_f^+ \alpha_f \Phi_{|H} \rangle$ в среднем для f есть величина порядка $\frac{1}{V_f}$. Неравенство же /6.21'/ показывает, что это выражение при каждом f будет порядка $\frac{1}{V}$.

Из /6.21'/ мы сейчас же можем получить оценки для средних, относящихся к одному времени.

Пусть $\mathcal{U}_f$ равно a_f или a_f^+. Рассмотрим те операторы:

$$\mathcal{U}_{f_1}\mathcal{U}_{f_2}\ldots\mathcal{U}_{f_K},$$

которые сохраняют число частиц. Покажем, что

$$\left| \langle \mathcal{U}_{f_1}\mathcal{U}_{f_2}\ldots\mathcal{U}_{f_K}\rangle_H - \langle \mathcal{U}_{f_1}\mathcal{U}_{f_2}\ldots\mathcal{U}_{f_K}\rangle_{H_0} \right| \le \frac{const}{\sqrt{V}}. \qquad /6.22/$$

Заметим теперь, что Φ_H и Φ_{H_0} удовлетворяет условиям /2.3/:

$$(a_f^+ a_f - a_{-f}^+ a_{-f})\,\Phi = 0.$$

Поэтому

$$\langle \mathcal{U}_{f_1}\mathcal{U}_{f_2}\mathcal{U}_{f_3}\ldots\mathcal{U}_{f_K}\rangle$$

могут быть приведены к сумме членов типа

$$\langle \ldots a_f^+ a_f \ldots a_g^+ a_{-g}^+ \ldots a_{-h} a_h \ldots \rangle,$$

где $\pm f, \pm g, \pm h$ все различны. Разумеется число индексов g равно тут числу индексов h. Очевидно также, что:

$$\langle \ldots a_f^+ a_f \ldots a_g^+ a_{-g}^+ \ldots a_{-h} a_h \ldots \rangle_{H_0} = \prod_f v_f^2 \prod_g (u_g v_g) \prod_h (u_h v_h).$$

Нам надо, следовательно, только установить, что:

$$\left| \langle \ldots a_f^+ a_f \ldots a_g^+ a_{-g}^+ \ldots a_{-h} a_h \ldots \rangle_H \right| - \prod_f v_f^2 \prod_g (u_g v_g) \prod_h (u_h v_h) \le \frac{const}{\sqrt{V}}. \qquad /6.23/$$

На основании ранее сказанного, /см. /6.12/, /6.13/, /6.16/ / заметим, что:

$$a_{-h}a_h + u_h v_h \frac{L}{C} = u_h^2 \alpha_{-h}\alpha_h - u_h v_h \Big\{ \frac{2}{V^2}\sum_{(f)} v_h^2 a_h^+ \frac{\lambda^2(f)}{C^2}\left(1 - a_f^+ a_f - a_{-f}^+ a_{-f}\right) \times$$

$$\times a_h + v_h^2 \frac{L^+L - C^2}{C^2} + u_h v_h a_h^+ a_h \frac{4\lambda(h)}{V} \Big\} \frac{L}{C} - v_h^2 \alpha_h^+ \frac{L}{C} \alpha_{-h}^+ \frac{L}{C} +$$

$$+ u_h v_h \left(\alpha_h^+ \frac{L}{C} \alpha_h + \alpha_{-h}^+ \alpha_{-h} \frac{L}{C} \right) + \eta_{-h} a_h + a_{-h}\eta_h - \eta_{-h}\eta_h \qquad /6.24/$$

$$a_f^+ a_f - v_f^2 = u_f^2 \alpha_f^+ \alpha_f - v_f^2 \frac{L^+}{C} \alpha_{-f}^+ \alpha_{-f} \frac{L}{C} - u_f v_f \alpha_f^+ \alpha_{-f}^+ \frac{L}{C} - u_f v_f \frac{L^+}{C} \alpha_{-f} \alpha_f +$$

$$+ v_f^2 \frac{L^+}{C} \Big\{ \frac{2}{V^2} \sum_g v_f^2 a_f^+ \frac{\lambda^2(g)}{C^2} \left(1 - a_g^+ a_g - a_{-g}^+ a_{-g}\right) a_f + v_f^2 \frac{L^+L - C^2}{C^2} + u_f v_f \frac{4\lambda}{V} a_f^+ a_f \Big\} +$$

$$+ a_f^+ \eta_f + \eta_f^+ a_f - \eta_f^+ \eta_f . \qquad /6.25/$$

Будем теперь передвигать α^+ к левой обкладке, а α – к правой, $\frac{L^+L - C^2}{C^2}$ /например, входящие в η, η^+ / к одной из них – все равно к какой.

Так как индексы $\pm f, \pm g, \pm h$ все различны, то коммутаторы, возникающие в процессе этих перестановок, будут величинами порядка $\frac{1}{V}$.

Учитывая постоянно применяемое неравенство:

$$\left| \langle AB \rangle \right| \leq \sqrt{\langle AA^+ \rangle \langle B^+ B \rangle} ,$$

мы видим, что как только α^+ "коснется" левой обкладки или α "коснется" правой обкладки или $L^+L - C^2$ окажется у одной из них, так сейчас же мы получим величину порядка малости не ниже, чем $\frac{const}{\sqrt{V}}$.

Следовательно:

$$\left| \langle \ldots a_f^+ a_f \ldots a_g^+ a_{-g}^+ \ldots a_{-h} a_h \ldots \rangle_H - \right. \qquad /6.26/$$

$$\left. - \prod_f v_f^2 \langle \ldots (-u_g v_g) \frac{L^+}{C} \ldots (-u_h v_h) \frac{L}{C} \ldots \rangle_H \right| \leq \frac{const}{\sqrt{V}}.$$

Но, число g равно числу h, перестановка L с L^+ совершается с точностью до членов порядка $\frac{1}{V}$. Поэтому

$$\langle \ldots u_g v_g \frac{L^+}{C} \ldots u_h v_h \frac{L}{C} \ldots \rangle_H$$

отличаются от

$$\prod_g u_g v_g \prod_h u_h v_h \left\langle \left(\frac{L^+ L}{C^2} \right)^\ell \right\rangle_H$$

на члены порядка $\frac{1}{V}$. С другой стороны

$$\left\langle \left(\frac{L^+ L}{C^2} \right)^\ell \right\rangle_H$$

отличаются от единицы на величину порядка не ниже $\frac{1}{\sqrt{V}}$.

Итак неравенство /6.23/, а следовательно, и /6.22/ доказано.

Перейдем теперь к двувременным корреляционным средним и покажем, что вообще

$$\left| \langle \mathfrak{B}_{f_1}(t) \ldots \mathfrak{B}_{f_\ell}(t); \mathfrak{A}_{g_1}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{g_k}(\tau) \rangle_H - \right. \qquad /6.27/$$

$$\left. - \langle \mathfrak{B}_{f_1}(t) \ldots \mathfrak{B}_{f_\ell}(t); \mathfrak{A}_{g_1}(\tau) \ldots \mathfrak{A}_{g_k}(\tau) \rangle_{H_0} \right| \leq \frac{K(t-\tau) + K_1}{\sqrt{V}};$$

$$K = const; \; K_1 = const.$$

Здесь $\mathfrak{B}_f, \mathfrak{A}_g$ равно a или a^+. Мы предполагаем, как всегда в данном случае, что оператор

$$\mathfrak{B}_{f_1} \ldots \mathfrak{A}_{g_k}$$

сохраняет число частиц.

В силу упоминавшихся ранее дополнительных условий, которым удовлетворяют Φ_H и Φ_{H_0} исследуемые средние с помощью установления "правильного порядка" операторов, можно привести к сумме членов типа:

$$\langle \ldots a_f^+(t)\, a_f(t) \ldots a_g^+(t)\, a_{-g}^+(t) \ldots a_{-h}(t)\, a_h(t) \ldots$$
$$\ldots a_k^+(t) \ldots a_q(t) \ldots a_{f'}^+(\tau)\, a_{f'}(\tau) \ldots a_{g'}^+(\tau)\, a_{-g'}^+(\tau) \ldots \qquad /6.28/$$
$$\ldots a_{-h'}(\tau)\, a_{h'}(\tau) \ldots a_{k'}(\tau) \ldots a_{q'}^+(\tau) \ldots \rangle ,$$

где число операторов a и a^+ одинаково и где индексы $\pm f$, $\pm g$, $\pm h$, $\pm k$, $\pm q$ все различны между собой, равно как и индексы $\pm f'$, $\pm g'$, $\pm h'$, $\pm k'$, $\pm q'$ между собой.

Ввиду указанной возможности сведения нам достаточно доказать неравенства /6.27/ для средних типа /6.28/.

Воспользуемся для "пар" $-a^+a$, a^+a^+, aa формулами /6.24/, /6.25/, а для "одиночек" a, a^+ – формулами /6.7/.

Будем теперь передвигать $\alpha^+(t)$ и $L^+(t)L(t)-C^2$ влево, а $\alpha(\tau)$ и $L^+(\tau)L(\tau)-C^2$ – вправо. Ввиду подчеркнутого выше различия индексов, появляющиеся коммутаторы/ а все перестановки мы ведем лишь между амплитудами, относящимися к одному и тому же времени/ будут давать величины порядка $\frac{1}{V}$. Заметим, что как только $\alpha^+(t)$ или $L^+(t)L(t)-C^2$ "коснутся" левой скобки или $\alpha(t)$ или $L^+(t)L(t)-C^2$ "коснутся" правой скобки, так сейчас же мы получим величины по крайней мере порядка $\frac{1}{\sqrt{V}}$. Нам, следовательно, останется показать лишь, что неравенство типа /6.27/ имеет место для средних вида:

$$\Gamma(t-\tau) =$$
$$= \langle \alpha_{f_1}(t) \ldots \alpha_{f_\ell}(t)\, L^k(t)\, L^{+q}(t)\, L^{+q_1}(\tau)\, L^{k_1}(\tau)\, \alpha_{g_1}^+(\tau) \ldots \alpha_{g_r}^+(\tau) \rangle . \qquad /6.29/$$

Воспользуемся сейчас уравнениями движения /6.19/ и соотношениями /6.11/, /6.18/, /6.20/, /6.21/, дающими необходимые оценки. Найдем

$$i\frac{\partial \Gamma_H(t-\tau)}{\partial t} - \{\Omega(f_1) + \ldots + \Omega(f_\ell)\}\, \Gamma_H(t-\tau) = \Delta(t-\tau),$$

причем

$$|\Delta(t-\tau)| \leqslant \frac{G}{\sqrt{V}}, \quad \text{где} \quad G = const.$$

Отсюда, поскольку

$$\Gamma_H(t-\tau) = e^{-i\{\omega(f_1)+\ldots+\omega(f_\ell)\}(t-\tau)}\Gamma_H(0) +$$
$$+ e^{-i\{\omega(f_1)+\ldots+\omega(f_\ell)\}(t-\tau)}\int_0^{t-\tau} e^{-i\{\omega(f_1)+\omega(f_2)+\ldots+\omega(f_\ell)\}z}\Delta(z)\,dz$$

получим:

$$\left|\Gamma_H(t-\tau) - e^{-i\{\omega(f_1)+\ldots+\omega(f_\ell)\}(t-\tau)}\Gamma_H(0)\right| \leq \frac{G|t-\tau|}{\sqrt{V}}. \qquad /6.30/$$

С другой стороны

$$\Gamma_{H_0}(t-\tau) = e^{i\{\omega(f_1)+\ldots+\omega(f_\ell)\}(t-\tau)}\Gamma_{H_0}(0) \qquad /6.31/$$

поскольку

$$\Gamma_{H_0}(t-\tau) = \langle \alpha_{f_1}(t)\ldots\alpha_{f_\ell}(t)\alpha^+_{g_1}(\tau)\ldots\alpha^+_{g_r}(\tau)\rangle\, C^{k+q+q_1+k_1}. \qquad /6.32/$$

Таким образом:

$$\left|\Gamma_H(t-\tau) - \Gamma_{H_0}(t-\tau)\right| \leq$$
$$\leq \left|\Gamma_H(0) - \Gamma_{H_0}(0)\right| + \frac{G|t-\tau|}{\sqrt{V}} = \qquad /6.33/$$
$$= \left|\langle \alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_\ell} L^k (L^+)^{q+q_1} L^{k_1} \alpha^+_{g_1}\ldots\alpha^+_{g_r}\rangle_H -\right.$$
$$\left. - C^{k+k_1+q+q_1}\langle \alpha_{f_1}\ldots\alpha_{f_\ell}\alpha^+_{g_1}\ldots\alpha^+_{g_r}\rangle_{H_0}\right| + \frac{G(t-\tau)}{\sqrt{V}}.$$

Пусть среди индексов $f_1, \ldots, f_\ell$ есть пара одинаковых. Тогда, замечая, что

$$\alpha_f^2 = (u_f a_f + v_f a_{-f}^+ \frac{L}{C})(u_f a_f + v_f a_{-f}^+ \frac{L}{C}) =$$
$$= v_f^2 a_{-f}^+ \frac{L}{C} a_{-f}^+ \frac{L}{C} + u_f v_f \{ a_{-f}^+ \frac{L}{C} a_f + a_f a_{-f}^+ \frac{L}{C} \} = \qquad /6.34/$$
$$= \frac{v_f^2 a_{-f}^+}{C} (L a_{-f}^+ - a_{-f}^+ L) L - u_f v_f \{ a_{-f}^+ a_f + a_f a_{-f}^+ \} \frac{L}{C} =$$
$$= -2 \frac{v_f^2 \lambda(f)}{C^2 V} a_{-f}^+ a_f L$$

будет порядка $\frac{1}{V}$, видим, что и $\langle \ldots \rangle_H$ будет этого же порядка. Соответствующее $\langle \ldots \rangle_{H_0}$ просто равно нулю. То же положение естественно возникает в том случае, если среди индексов $g_1 \ldots g_r$ есть хотя бы одна пара одинаковых индексов.

Пусть далее, среди индексов $f_1, \ldots, f_e$ есть хотя бы один индекс f_j, которого нет среди $g_1, \ldots, g_r$. Тогда можем передвинуть α_{f_j} к правой скобке в $\langle \ldots \rangle_H$, получая /по дороге/ коммутаторы порядка $\frac{1}{V}$, и убедимся в результате, что $\langle \ldots \rangle_H$ окажется, в данном случае, величиной порядка малости не ниже $\frac{1}{\sqrt{V}}$. Средняя же $\langle \ldots \rangle_{H_0}$ в данном случае точно равна нулю.

Та же ситуация возникает, если среди $g_1, \ldots, g_r$ есть хотя бы один индекс, которого нет в $f_1, \ldots, f_e$.

Таким образом, нам остается рассмотреть случай, когда

1/ все $f_1, \ldots, f_e$ различны.

2/ Совокупность $g_1, \ldots, g_r$ есть та же совокупность $f_1, \ldots, f_e$, но, может быть, занумерованная в другом порядке.

Заметим теперь, что в правой части /6.33/ мы можем установить "правильный порядок" и заменить

на
$$\alpha^+_{g_1} \ldots \alpha^+_{g_r}$$
$$\alpha^+_{f_l} \ldots \alpha^+_{f_1}.$$

Естественно, что в $\langle \ldots \rangle_{H_0}$ такую замену совершаем точно, а в $\langle \ldots \rangle_H$ с ошибкой принятого порядка асимптотической малости.

Заметим еще, что поскольку операторы внутри $\langle \ldots \rangle$ сохраняют число частиц, $k + k_1$ должно равняться $q + q_1$.

Далее в
$$\langle \alpha_{f_1} \ldots \alpha_{f_l} L^k (L^+)^{k+k_1} L^{k_1} \alpha^+_{f_l} \ldots \alpha^+_{f_1} \rangle$$
произведем замену:
$$L^k (L^+)^{k+k_1} L^{k_1} \longrightarrow (L^+ L)^{k+k_1}$$
и перенесем к правой обкладке. При этом совершим погрешность порядка $\frac{1}{V}$. Заметим, далее что
$$\Big| \langle \alpha_{f_1} \ldots \alpha_{f_l} \alpha^+_{f_l} \ldots \alpha^+_{f_1} (L^+ L)^{k+k_1} \rangle_H - \\ - \langle \alpha_{f_1} \ldots \alpha_{f_l} \alpha^+_{f_l} \ldots \alpha^+_{f_1} \rangle_{H_0} C^{2(k+k_1)} \Big| \leq \frac{const}{\sqrt{V}}. \qquad /6.35/$$

Таким образом, из /6.33/ получим
$$\left| \Gamma_H(t-\tau) - \Gamma_{H_0}(t-\tau) \right| \leq \\ \leq \frac{G|t-\tau|}{\sqrt{V}} + \frac{K}{\sqrt{V}} + \qquad /6.36/ \\ + C^{2(k+k_1)} \left| \langle \alpha_{f_1} \ldots \alpha_{f_l} \alpha^+_{f_l} \ldots \alpha^+_{f_1} \rangle_H - \langle \alpha_{f_1} \ldots \alpha_{f_l} \alpha^+_{f_l} \ldots \alpha^+_{f_1} \rangle_{H_0} \right|.$$

Но поскольку все f различны:

$$\langle \alpha_{f_1} \dots \alpha_{f_e} \alpha^+_{f_e} \dots \alpha^+_{f_1} \rangle_{H_0} =$$

$$= \langle \alpha_{f_1} \alpha^+_{f_1} \rangle_{H_0} \langle \alpha_{f_2} \alpha^+_{f_2} \rangle_{H_0} \dots \langle \alpha_{f_e} \dots \alpha^+_{f_e} \rangle_{H_0} = 1 .$$

В $\langle \dots \rangle_H$ такое распределение также может быть осуществлено, разумеется не точно, а с допустимой асимптотической погрешностью.

Итак, наше доказательство закончено.

Также как и для случая $\nu > 0$ мы могли бы получить аналогичные оценки степени асимптотического приближения и для многовременных корреляционных функций. На этом здесь останавливаться не будем. Читатель может теперь все сюда относящиеся вычисления провести сам по разработанным выше схемам. Как и в случае $\nu > 0$ порядок малости в рассматриваемом случае может быть повышен с $\frac{const}{\sqrt{V}}$ до $\frac{Const}{V}$, если мы в гамильтониане H_0 постоянную C заменим на величину

$$C_1 = \sqrt{\langle L^+ L \rangle_H}$$

/отличающуюся от C, вообще говоря, на величины порядка $\frac{1}{\sqrt{V}}$ /.

На доказательстве этого замечания мы здесь останавливаться не будем.

Приложение А.

В настоящем разделе приводятся доказательства некоторых соотношений, используемых в работе[x]. Все рассматриваемые здесь операторы предполагаются тотально непрерывными, только с такого рода операторами мы и имеем дело в основном тексте.

Лемма 1.

Пусть оператор ξ удовлетворяет условию:

$$|\xi\xi^+ - \xi^+\xi| \leq \frac{2s}{V}, \qquad /A.1/$$

где s - число, $\epsilon = 1$ или $\epsilon = -1$. Тогда имеет место неравенство:

$$2\sqrt{\xi^+\xi + \frac{s}{V}} - \epsilon(\xi + \xi^+) \geq 0. \qquad /A.2/$$

Доказательство. Допустим обратное, тогда найдется такая нормированная функция φ, что

$$\left\{2\sqrt{\xi^+\xi + \frac{s}{V}} - \epsilon(\xi + \xi^+)\right\}\varphi = -\rho\varphi,$$

где

$$\rho > 0.$$

Отсюда:

$$\left(2\sqrt{\xi^+\xi + \frac{s}{V}} + \rho\right)\varphi = \epsilon(\xi + \xi^+)\varphi. \qquad /A.3/$$

---

[x] Условимся обозначать норму функции следующим образом:

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi^* \phi \rangle},$$

и норму оператора $\mathfrak{A}$:

$$|\mathfrak{A}| = \sup \|\mathfrak{A}\phi\|, \quad \text{где } \|\phi\| = 1.$$

Примем теперь во внимание, что если $A\varphi = B\varphi$ и A и B – самосопряженные операторы, то

$$\langle \varphi^* A^2 \varphi \rangle = \langle \varphi^* B^2 \varphi \rangle . \qquad /A.4/$$

Учитывая /A.4/ и /A.1/, будем иметь:

$$\langle \varphi^* \left(2\sqrt{\xi^+\xi + \frac{s}{V}} + \rho\right)^2 \varphi \rangle = \langle \varphi^* (\xi + \xi^+)^2 \varphi \rangle =$$

$$= 2\langle \varphi^* (\xi\xi^+ + \xi^+\xi)\varphi \rangle - \langle \varphi^* (\xi^+ - \xi)(\xi - \xi^+)\varphi \rangle \leq \qquad /A.5/$$

$$\leq 2\langle \varphi^* (\xi\xi^+ + \xi^+\xi)\varphi \rangle \leq \langle 2\varphi^* (\xi^+\xi + \frac{2s}{V} + \xi^+\xi)\varphi \rangle =$$

$$= 4\langle \varphi^* (\xi^+\xi + \frac{s}{V})\varphi \rangle ,$$

что невозможно при $\rho > 0$.

Таким образом, неравенство /A.2/ доказано.

<u>Следствие</u>. Имеем также, меняя роль ξ и ξ^+ .

$$2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s}{V}} - \epsilon(\xi + \xi^+) \geq 0 . \qquad /A.6/$$

Аналогично доказываются и неравенства:

$$2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s}{V}} - \epsilon \frac{(\xi - \xi^+)}{i} \geq 0 \qquad /A.7/$$

$$2\sqrt{\xi^+\xi + \frac{s}{V}} - \epsilon \frac{(\xi - \xi^+)}{i} \geq 0 . \qquad /A.8/$$

Лемма II

Пусть ξ удовлетворяет условию:

$$|\xi\xi^{+} - \xi^{+}\xi| \leq \frac{2s}{V} . \qquad /A.9/$$

Тогда

$$\sqrt{\xi\xi^{+} + \frac{2s}{V} + A^{2}} - \sqrt{\xi^{+}\xi + A^{2}} \geqslant 0, \qquad /A.10/$$

где A – вещественное c – число.

Доказательство. Допустим обратное. Тогда найдется такая нормированная функция φ, что

$$\left\{\sqrt{\xi\xi^{+} + \frac{2s}{V} + A^{2}} - \sqrt{\xi^{+}\xi + A^{2}}\right\}\varphi = -\rho\varphi . \qquad /A.11/$$

Отсюда:

$$\left\{\sqrt{\xi\xi^{+} + \frac{2s}{V} + A^{2}} + \rho\right\}\varphi = \sqrt{\xi^{+}\xi + A^{2}}\,\varphi , \qquad /A.12/$$

воспользовавшись /А.4/, получаем

$$\langle\varphi^{*}\Big(\sqrt{\xi\xi^{+} + \frac{2s}{V} + A^{2}} + \rho\Big)^{2}\varphi\rangle = \langle\varphi^{*}(\xi^{+}\xi + A^{2})\varphi\rangle \leq$$

$$\leq \langle\varphi^{*}\Big(\xi\xi^{+} + \frac{2s}{V} + A^{2}\Big)\varphi\rangle , \qquad /A.13/$$

что невозможно при $\rho > 0$.

Следствие. Изменяя роль операторов ξ и ξ^{+}, получаем:

$$\sqrt{\xi^{+}\xi + \frac{2s}{V} + A^{2}} - \sqrt{\xi\xi^{+} + A^{2}} \geqslant 0 . \qquad /A.14/$$

Если α, λ - вещественные c - числа, имеем также

$$\sqrt{\lambda^2\left(\xi\xi^+ + \frac{2s}{V} + \alpha^2\right) + A^2} - \sqrt{\lambda^2\left(\xi^+\xi + \alpha^2\right) + A^2} \geq 0$$ /A.15/

$$\sqrt{\lambda^2\left(\xi^+\xi + \frac{2s}{V} + \alpha^2\right) + A^2} - \sqrt{\lambda^2\left(\xi\xi^+ + \alpha^2\right) + A^2} \geq 0.$$ /A.16/

Приложение к лемме II.

Положим

$$\xi = \frac{1}{V}\sum_f \lambda(f)\, a_{-f}\, a_f + \nu \equiv L + \nu.$$ /A.17/

Тогда

$$\xi\xi^+ - \xi^+\xi = \frac{2}{V^2}\sum_f \lambda^2(f)\left(1 - a_f^+ a_f - a_{-f}^+ a_{-f}\right).$$ /A.18/

Пусть $\lambda(f)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{V}\sum_f \lambda^2(f) \leq s$$

тогда

$$\left|\xi\xi^+ - \xi^+\xi\right| \leq \frac{2s}{V}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\lambda^2(f)\left\{(L+\nu)(L^+ + \nu) + \alpha^2 + \frac{2s}{V}\right\} + \Upsilon^2(f)} -$$

$$- \sqrt{\lambda^2(f)\left\{(L^+ + \nu)(L+\nu) + \alpha^2\right\} + \Upsilon^2(f)} > 0.$$ /A.19/

Лемма III /обобщение леммы II/.

Пусть опять

$$|\xi\xi^+ - \xi^+\xi| \leq \frac{2s}{V}.$$

Рассмотрим операторы $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^+$ с нормой

$$|\mathfrak{A}| < 1; \ |\mathfrak{A}^+| \leq 1,$$

такие, что

$$|\mathfrak{A}\xi^+\xi\mathfrak{A}^+ - \xi^+\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\xi| \leq \frac{2\ell}{V}. \qquad /A.20/$$

Тогда

$$2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+\ell}{V}} - \epsilon(\xi\mathfrak{A}^+ + \mathfrak{A}\xi^+) \geq 0, \qquad /A.21/$$

где $\epsilon = 1$ или $\epsilon = -1$.

Доказательство.

Допустим обратное, тогда найдется такая нормированная φ, что

$$\left\{2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+\ell}{V}} - \epsilon(\xi\mathfrak{A}^+ + \mathfrak{A}\xi^+)\right\}\varphi = -\rho\varphi, \quad \rho > 0. \qquad /A.22/$$

Отсюда

$$\left(2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+\ell}{V}} + \rho\right)\varphi = \epsilon(\xi\mathfrak{A}^+ + \mathfrak{A}\xi^+)\varphi. \qquad /A.23/$$

Стало быть, согласно /A.4/

$$\left\langle\varphi^*\left(2\sqrt{\xi\xi^+ + \frac{s+\ell}{V}} + \rho\right)^2\varphi\right\rangle = \langle\varphi^*(\xi\mathfrak{A}^+ + \mathfrak{A}\xi^+)^2\varphi\rangle =$$

$$= 2\langle\varphi^*\{\xi\mathfrak{A}^+\mathfrak{A}\xi^+ + \mathfrak{A}\xi^+\xi\mathfrak{A}^+\}\varphi\rangle - \langle\varphi^*(\xi\mathfrak{A}^+ - \mathfrak{A}\xi^+)(\mathfrak{A}\xi^+ - \xi\mathfrak{A}^+)\varphi\rangle \leq \qquad /A\text{-}24/$$

$$\leq 2\langle\varphi^*\{\xi\mathfrak{A}^+\mathfrak{A}\xi^+ + \mathfrak{A}\xi^+\xi\mathfrak{A}^+\}\varphi\rangle.$$

Но поскольку по условию $|\mathfrak{A}|\leq 1$, $|\mathfrak{A}^+|\leq 1$, имеем $|\mathfrak{A}^+\mathfrak{A}|\leq 1$ и, следовательно,

$$\langle\varphi^*\xi\mathfrak{A}^+\mathfrak{A}\xi^+\varphi\rangle\leq\langle\varphi^*\xi\xi^+\varphi\rangle. \qquad /A.25/$$

Далее, принимая во внимание /A.20/ и /A.25/, будем иметь:

$$\langle\varphi^*\mathfrak{A}\xi^+\xi\mathfrak{A}^+\varphi\rangle=\langle\varphi^*\xi^+\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\xi\varphi\rangle+$$

$$+\langle\varphi^*\{\mathfrak{A}\xi^+\xi\mathfrak{A}^+-\xi^+\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\xi\}\varphi\rangle\leq\langle\varphi^*\xi^+\mathfrak{A}\mathfrak{A}^+\xi\varphi\rangle+ \qquad /A.26/$$

$$+\frac{2l}{V}\leq\langle\varphi^*\xi^+\xi\varphi\rangle+\frac{2l}{V}\leq\langle\varphi^*\xi\xi^+\varphi\rangle+\frac{2(l+s)}{V}=$$

$$=\langle\varphi^*\left(\xi\xi^++\frac{2(l+s)}{V}\right)\varphi\rangle.$$

Поэтому, учитывая /A.24/, можем написать

$$\langle\varphi^*\left(2\sqrt{\xi\xi^++\frac{s+l}{V}}+\rho\right)^2\varphi\rangle\leq 4\langle\varphi^*\left(\xi\xi^++\frac{s+l}{V}\right)\varphi\rangle. \qquad /A.27/$$

Но такое неравенство при $\rho>0$ невозможно, что и доказывает утверждение /A.21/ леммы III.

<u>Приложение к лемме III.</u>

Положим

$$\xi=L+\nu\,;\quad\mathfrak{A}=a_g.$$

Тогда

$$\left|\mathcal{U}\xi^+\xi\,\mathcal{U}^+ - \xi^+\mathcal{U}\,\mathcal{U}^+\xi\right| = \left|a_g\,(L^+ + \nu)\,(L+\nu)\,a_g^+ - (L^+ + \nu)\,a_g a_g^+\,(L+\nu)\right| =$$

$$= \left|a_g\,(L^+ + \nu)\,(L+\nu)\,a_g^+ - (L^+ + \nu)\,a_g\,(L+\nu)\,a_g^+ +\right.$$

$$\left. + (L^+ + \nu)\,a_g\,(L+\nu)\,a_g^+ - (L^+ + \nu)\,a_g a_g^+\,(L+\nu)\right| \leq$$

$$\leq (|L|+\nu)\left\{\left|L\,a_g^+ - a_g^+ L\right| + \left|a_g L^+ - L^+ a_g\right|\right\} \leq$$

$$\leq (|L|+\nu)\,\frac{4}{V}\,|\lambda(g)|,$$

где /см. определение /А.17//

$$|L| \leq \frac{1}{V}\sum_f |\lambda(f)|,$$

так как $|a_f| \leq 1$. Поэтому, согласно /А.21/

$$2\sqrt{(L+\nu)(L^+ + \nu) + \frac{1}{V}\{s + (|L|+\nu)\,2\,|\lambda(g)|\}} - \epsilon\left\{(L+\nu)a_g^+ + a_g(L^+ + \nu)\right\} \geq 0 \qquad /А.28/$$

Положив $\mathcal{U} = i a_g$, получим также

$$2\sqrt{(L+\nu)(L^+ + \nu) + \frac{1}{V}\{s + (|L|+\nu)\,2|\lambda(g)|\}} - \qquad /А.29/$$

$$- \epsilon\left\{\frac{(L+\nu)a_g^+ - a_g(L^+ + \nu)}{i}\right\} \geqslant 0.$$

Лемма IУ.

Пусть β - вещественное число $\alpha^2 = \beta^2 + \frac{2s}{V}$ и $\nu \geq 0$. Тогда

$$\left| \sqrt{\{(L+\nu)(L^{+}+\nu)+\alpha^{2}\}\lambda^{2}(f)+T^{2}(f)}\, a_f - \right.$$
$$\left. - a_f \sqrt{\{(L+\nu)(L^{+}+\nu)+\alpha^{2}\}\lambda^{2}(f)+T^{2}(f)} \right| \leq \frac{S_f}{V}, \qquad /A.30/$$

где S_f ограничена при $V \longrightarrow \infty$.

/То же неравенство имеет место, если в /A.30/ взять a_f^{+} вместо a_f /.

Доказательство.

Рассмотрим произвольную нормированную φ и составим выражение

$$\left\langle \varphi^{*} \left\{ \sqrt{(Q+\alpha^{2})\lambda^{2}(f)+T^{2}(f)}\,(a_f+a_f^{+}) - (a_f+a_f^{+})\sqrt{(Q+\alpha^{2})\lambda^{2}(f)+T^{2}(f)} \right\} \varphi \right\rangle = \mathcal{E}, \qquad /A.31/$$

где

$$Q = (L+\nu)(L^{+}+\nu).$$

Для рассмотрения выражения /A.31/ воспользуемся следующим тождественным соотношением:

$$\sqrt{z} - \sqrt{z_0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{z_0+\omega} - \frac{1}{z+\omega} \right\} \sqrt{\omega}\, d\omega,$$

где z_0 произвольное положительное число. Заметим также, что

$$-\frac{1}{A}B + B\frac{1}{A} = \frac{1}{A}(AB - BA)\frac{1}{A},$$

где A и B операторы. Тогда будем иметь:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left\langle \varphi^{*} \frac{\lambda^{2}(f)}{(Q+\alpha^{2})\lambda^{2}(f)+T^{2}(f)+\omega} \left\{ Q(a_f+a_f^{+}) - (a_f+a_f^{+})Q \right\} \frac{1}{(Q+\alpha^{2})\lambda^{2}(f)+T(f)+\omega}\,\varphi \right\rangle \sqrt{\omega}\, d\omega .$$

Но

$$Q a_f - a_f Q = (L+\nu)\{L^{+}a_f - a_f L^{+}\},$$

$$L^{+} = \frac{1}{V}\sum_f \lambda(f)\, a_f^{+} a_{-f}^{+}, \quad L^{+}a_f - a_f L^{+} = -\frac{2}{V}\lambda(f)\, a_{-f}^{+}$$

и , следовательно,

$$Q(a_f+a_f^+)-(a_f+a_f^+)Q=$$

$$=-\frac{2}{V}\lambda(f)(L+\nu)\,a_{-f}^+ +\frac{2}{V}\lambda(f)\,a_{-f}(L^+ +\nu).$$

Поэтому будем иметь

$$|\mathcal{E}|=\left|\frac{\mathcal{E}}{i}\right|=$$

$$=\frac{2|\lambda(f)|^3}{\pi}\left|\int_0^\infty\left\langle\varphi^*\frac{1}{(Q+\alpha^2)\lambda^2(f)+T^2(f)+\omega}\,\frac{(L+\nu)a_{-f}^+-a_{-f}(L^+ +\nu)}{i}\,\frac{1}{(Q+\alpha^2)\lambda^2(f)+T^2(f)+\omega}\varphi\right\rangle\sqrt{\omega}\,d\omega\right|,$$

Отсюда, учитывая /А.29/ и вводя новую переменную интегрирования, получим

$$|\mathcal{E}|\leq\frac{4|\lambda(f)|^2}{\pi V}\int_0^\infty\left\langle\varphi^*\frac{\sqrt{Q+\frac{1}{V}(s+2|\lambda(f)|)(|L|+\nu)}}{\left(Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}+\tau\right)^2}\varphi\right\rangle\sqrt{\tau}\,d\tau.$$

Но по условию леммы $\alpha^2=\beta^2+\frac{2s}{V}$ и поэтому

$$\sqrt{Q+\frac{1}{V}(s+2|\lambda(f)|)(|L|+\nu)}<$$

$$<\sqrt{Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}+\frac{2|\lambda(f)|(|L|+\nu)}{V}}=$$

$$=\sqrt{Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\cdot\sqrt{1+\frac{2|\lambda(f)|(|L|+\nu)}{\sqrt{Q}+\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}}}<$$

$$<\sqrt{Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}\cdot\sqrt{1+\frac{|\lambda(f)|(|L|+\nu)}{s+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}}}<$$

$$<\left(1+\frac{|\lambda(f)|(|L|+\nu)}{2s+\sqrt{\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}}\right)\sqrt{Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}.$$

Положим:

$$\Lambda=Q+\alpha^2+\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}\geq\alpha^2.$$

Тогда

$$|\mathcal{E}|\leq\frac{4|\lambda(f)|^2}{\pi V}\left(1+\frac{|\lambda(f)|(|L|+\nu)}{2s+\sqrt{\frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}}}\right)\int_0^\infty\left\langle\varphi^*\frac{\sqrt{\Lambda}}{(\Lambda+\tau)^2}\varphi\right\rangle\sqrt{\tau}\,d\tau.$$

Разложим теперь функцию φ по собственным функциям оператора Λ.

$$\varphi=\sum C_\Lambda\varphi_\Lambda;\quad \sum|C_\Lambda|^2=1.$$

Получим

$$\int_0^\infty\left\langle\varphi^*\frac{\sqrt{\Lambda}}{(\Lambda+\tau)^2}\varphi\right\rangle\sqrt{\tau}\,d\tau=\sum_\Lambda|C_\Lambda|^2\int_0^\infty\frac{\sqrt{\Lambda\tau}\,d\tau}{(\Lambda+\tau)^2}=$$

$$=\sum_\Lambda|C_\Lambda|^2\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}\,dt}{(1+t)^2}=\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}\,dt}{(1+t)^2}.$$

Итак, при произвольной нормированной функции φ

$$|\mathcal{E}| = |\langle \varphi^* \left[\frac{\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2 + T^2} \, ; a_f + a_f^+}{i} \right] \varphi \rangle \leq S_f,$$

где

$$S_f = \frac{4|\lambda(f)|^2}{\pi V} \left(1 + \frac{|\lambda(f)| \left(\sum |\lambda(f)| \frac{1}{V} + \nu \right)}{2 \frac{1}{V} \sum |\lambda(f)|^2 + V \frac{T^2(f)}{\lambda^2(f)}} \right) \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\, dt}{(1+t)^2}.$$

Но оператор

$$\left[\frac{\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2 + T^2} \, ; \, a_f + a_f^+}{i} \right]$$

эрмитов и, следовательно,

$$\left| \left[\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2 + T^2} \, ; a_f + a_f^+ \right] \right| \leq S_f.$$

Совершенно аналогично доказываем, что

$$\left| \left[\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2 + T^2} \, ; a_f - a_f^+ \right] \right| \leq S_f.$$

Но

$$|\mathfrak{A}| + |\mathfrak{B}| \geq |\mathfrak{A} + \mathfrak{B}|.$$

И стало быть

$$\left| \left[\sqrt{(Q+\alpha^2)\lambda^2 + T^2} \, ; a_f \right] \right| \leq S_f,$$

что и требовалось доказать.

Из $|\mathfrak{A}| \leq S_f$ вытекает $|\mathfrak{A}^+| \leq S_f$, откуда видна справедливость дополнительного утверждения леммы.

Приложение Б

О принципе ослабления корреляции

В наших лекциях "О принципе ослабления корреляций и методе квазисредних" был сформулирован принцип ослабления корреляций между частицами для систем в состоянии статистического равновесия. Этот принцип формулировался следующим образом:

Корреляционные функции

$$\langle \mathcal{U}_1(x_1,t_1)\ldots\mathcal{U}_s(x_s,t_s)\ldots\mathcal{U}_n(x_n,t_n)\rangle, \qquad /Б.1./$$

где $\mathcal{U}_s(x_s,t_s)$ - полевая функция $\psi(x_s,t_s)$ или $\psi^+(t_s,x_s)$, распадается на произведение корреляционных функций

$$\langle \mathcal{U}_1(x_1,t_1)\ldots\mathcal{U}_{s-1}(x_{s-1},t_{s-1})\rangle\langle \mathcal{U}_{s+1}(x_{s+1},t_{s+1})\ldots\mathcal{U}_n(x_n,t_n)\rangle \qquad /Б.2/$$

если совокупность точек $x_1,\ldots,x_s$ бесконечно удаляется от совокупности точек $x_{s+1},\ldots,x_n$ при фиксированных временах $t_1,t_2,\ldots t_s\ldots t_n$.

Заметим, что в том случае, если в корреляционных функциях числа операторов рождения и уничтожения не равны, то усреднение $\langle\ldots\rangle$ нужно понимать в смысле квазисредних

Система с модельным гамильтонианом является одним из редких случаев, когда прямыми расчетами можно убедиться в справедливости принципа ослабления корреляции. Ниже, основываясь на предыдущих асимптотических оценках, мы и покажем это.

Рассмотрим для этого "вакуумные" средние, составленные из произведений полевых функций в пространственном представлении:

$$\Psi_-(t,x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(f<0)}a_f(t)\,e^{i(f\cdot x)} \qquad /Б.3/$$

$$\Psi_+(t,x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(f>0)}a_f^+(t)\,e^{-i(f\cdot x)},$$

Здесь f представляет совокупность импульса и спина (k,σ), причем суммирование $f>0$, $f<0$ обозначает суммирование по k при фиксированном $\sigma=\pm$; $(f\cdot x)=(\vec{k}\cdot\vec{r})$. Имеем, например,

$$\left\langle \Psi_{\sigma_1}(t,x)\,\Psi^{+}_{\sigma_2}(t,x')\right\rangle_{H_0} = \frac{1}{V}\sum_{(f>0)}|u_f|^2\, e^{if(x-x')}\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) = \qquad /Б.4/$$

$$=\left\{\frac{1}{V}\sum_{(f>0)} e^{if(x-x')} - \frac{1}{V}\sum_{(f>0)}|v_f|^2\, e^{if(x-x')}\right\}\delta(\sigma_1-\sigma_2)$$

где u_f и v_f коэффициенты канонического преобразования. Как видно, член

$$\frac{1}{V}\sum_{(f>0)}|v_f|^2 e^{if(x-x')}$$

при $V\to\infty$ приближается к интегралу

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int |v_f|^2\, e^{if\cdot(x-x')}\,d\vec{k}$$

Этот интеграл абсолютно сходящийся, поскольку

$$\int |v_f|^2\, d\vec{k} = \frac{1}{2}\int\left\{\sqrt{T^2(f)+\lambda^2(f)C^2} - T(f)\right\}^2 \frac{d\vec{k}}{T^2(f)+\lambda^2(f)C^2} < \infty .$$

Про выражение

$$\frac{1}{V}\sum_{(f>0)} e^{if(x-x')}$$

мы скажем также, что оно приближается к "дельта функции":

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{if(x-x')}\,d\vec{k}$$

когда $V\to\infty$.

Однако сейчас мы, разумеется, приписываем словам "предел", "сходимость функций" уже другой смысл, а именно смысл, принятый в теории обобщенных функций.

Напомним здесь, что значит соотношение:

$$f_V(x_1,\dots,x_e)\xrightarrow[V\to\infty]{} f(x_1,\dots,x_e) \qquad /Б.5/$$

или

$$f\left(x_1,\dots,x_l\right)=\lim_{V\to\infty} f_V\,(x_1,\dots,x_l)$$

в этой теории.

Рассмотрим класс $C(q,r)$ / (q,r) – положительные числа/ непрерывных и неограниченно дифференцируемых функций $h(x_1,\dots,x_l)$ таких, что во всем пространстве E_l точек $\{x_1,\dots,x_l\}$

$$\left\{|x_1|+\dots+|x_l|\right\}^{\alpha}\left|h\left(x_1,\dots,x_l\right)\right|\le const\,; \quad \left\{|x_1|+\dots+|x_l|\right\}^{\alpha}\left|\frac{\partial^{s_1+\dots+s_l}h}{\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_l^{s_l}}\right|\le const$$

$$\alpha=0,1\dots,r \qquad\qquad \alpha=0,1,\dots,r;\quad s_1+\dots+s_l=0,1,\dots,q$$

Тогда, если мы можем фиксировать положительные числа q,r таким образом, что для всякой функции h из класса $C(q,r)$ будет:

$$\int h\,(x_1,\dots x_l)f_V\,(x_1\dots x_l)dx_1\dots dx_l\to\int h\,(x_1\dots x_l)f\,(x_1,\dots x_l)dx_1,\dots dx_l$$

мы будем говорить, что имеет место обобщенное предельное соотношение /Б.5/. Как мы только что видели, средние от произведений $\Psi(t,x),\Psi^+(t,x)$ могут содержать обобщенные функции. Поэтому соответствующие предельные соотношения, при $V\to\infty$, мы должны будем понимать в смысле теории обобщенных функций.

Рассмотрим выражение:

$$\left\langle\Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\,\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\right\rangle=\frac{1}{V}\sum_{(f>0)}\left\langle a_f(t_1)\,a_f^+(t_2)\right\rangle e^{if(x_1-x_2)}\delta(\sigma_1-\sigma_2)$$

Имеем

$$\int h(x_1-x_2)\left\langle\Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\,\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\right\rangle dx_1=$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{(f>0)}\left\langle a_f(t_1)\,a_f^+(t_2)\right\rangle\tilde h(f)\;\delta(\sigma_1-\sigma_2)$$

где

$$\tilde h(f)=\int h(x)\,e^{i(f\cdot x)}dx\,.$$

Взяв числа q, r в классе $C(q,r)$, к которому принадлежит $h(x)$ мы можем добиться того, чтобы $\tilde{h}(f)$ убывала при $|f| \to \infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|f|}$. Нам здесь достаточно будет лишь обеспечить, чтобы:

$$\frac{1}{V}\sum_f |\tilde{h}(f)| \leq K = \text{const}$$

Тогда, замечая, что согласно /6.36/

$$\left|\langle a_f(t_1)\, a_f^+(t_2)\rangle_H - \langle a_f(t_1)\, a_f^+(t_2)\rangle_{H_0}\right| \leq \frac{S_1|t_1-t_2|+S_2}{\sqrt{V}},$$ где

$$S_1, S_2 = \text{const},$$

будем иметь:

$$\left|\int h(x_1-x_2)\left\{\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\,\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle_H - \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle_{H_0}\right\}dx_1\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{V}\sum_f \left|\langle a_f(t_1)\, a_f^+(t_2)\rangle_H - \langle a_f(t_1)\, a_f^+(t_2)\rangle_{H_0}\right|\,|\tilde{h}(f)| \leq$$

$$\leq K\,\frac{S_1|t_1-t_2|+S_2}{V} \xrightarrow[V\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, имеет место обобщенное предельное соотношение:

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\,\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle_H - \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\,\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle_{H_0} \to 0. \qquad /Б.6/$$

Но непосредственным вычислением убеждаемся, что:

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle_{H_0} = \frac{1}{V}\sum_{(f>0)} |U_f|^2 e^{-i\Omega(f)(t_1-t_2)+if(x_1-x_2)}\,\delta(\sigma_1-\sigma_2)$$

и потому, также в обобщенном смысле:

$$\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\,\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle_H - \qquad /Б.7/$$
$$-\int |U_f|^2 \exp\{-i\Omega(f)(t_1-t_2)+if(x_1-x_2)\}\,d\vec{k}\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0$$

Из /Б.6/ и /Б.7/ имеем окончательно:

$$\lim_{V\to\infty} \langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle_H =$$

$$= \int |u_f|^2 \exp\{-i\Omega(f)(t_1-t_2)+if(x_1-x_2)\}\, d\vec{k}\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) = \qquad /Б.8/$$

$$= \{\Delta(t_1-t_2, x_1-x_2) - \mathcal{F}(t_1-t_2, x_1-x_2)\}\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) \qquad /Б.9/$$

$$\Delta(t,x) = \int \exp\{-i\Omega(f)t+ifx\}\, d\vec{k}$$

$$\mathcal{F}(t,x) = \int |v_f|^2 \exp\{-i\Omega(f)t+ifx\}\, d\vec{k}$$

Совершенно аналогично получим[x]

$$\lim_{V\to\infty} \langle \Psi^+_{\sigma_2}(t_2,x_2)\Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\rangle = \mathcal{F}(t_2-t_1, x_1-x_2)\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) \qquad /Б.10/$$

Рассмотрим теперь бинарные выражения:

$$\langle \Psi(t_1,x_1)\Psi(t_2,x_2)\Psi^+(t_2',x_2')\Psi^+(t_1',x_1')\rangle.$$

Имеем

$$\langle \Psi(t_1,x_1)\Psi(t_2,x_2)\Psi^+(t_2',x_2')\Psi^+(t_1',x_1')\rangle = \qquad /Б.11/$$

$$= \frac{1}{V^2}\sum \langle a_{f_1}(t_1)a_{f_2}(t_2)a^+_{g_2}(t_2')a^+_{g_1}(t_1')\rangle \exp\{if_1x_1+if_2x_2-ig_2x_2'-ig_1x_1'\}.$$

Так как полный импульс сохраняется, а для Φ_H ($и$ Φ_{H_0}) он равен нулю, видим, что выражения

$$\langle a_{f_1}(t_1)a_{f_2}(t_2)a^+_{g_2}(t_2')a^+_{g_1}(t_1')\rangle \qquad /Б.12/$$

---

x/ Это предельное соотношение имеет место также и в обычном смысле ввиду абсолютной сходимости интеграла, определяющего $\mathcal{F}(t,x)$.

могут быть отличны от нуля, лишь если

$$f_1+f_2=g_2+g_1. \qquad /Б.13/$$

Вспомним теперь, что по /2.1/ и /2.2/

$$n_f(t)-n_{-f}(t), \qquad \text{где} \qquad n_f=a_f^+a_f$$

есть интеграл движения и что ϕ_H (и ϕ_{H_0}) удовлетворяет дополнительным

$$(n_f-n_{-f})\phi=0.$$

Заметим, наконец, что

$$(n_f-n_{-f})\,a_h=a_h\{(n_f-n_{-f})-\delta(f-h)+\delta(f+h)\}.$$

Поэтому /при любом f /:

$$\langle a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t'_2)\,a^+_{g_1}(t'_1)\rangle=$$

$$=\langle\{1+n_f-n_{-f}\}a_{f_1}(t_1)a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t'_2)\,a^+_{g_1}(t'_1)\rangle=$$

$$=\langle\{1+n_f(t_1)+n_{-f}(t_1)\}a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t'_2)\,a^+_{g_1}(t'_1)\rangle=$$

$$=\langle a_{f_1}(t_1)\{1+n_f(t_1)-n_{-f}(t_1)-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\}a_{f_2}(t_2)a^+_{g_2}(t'_2)\,a^+_{g_1}(t'_1)\rangle=$$

$$=\langle a_{f_1}(t_1)\{1+n_f(t_2)-n_{-f}(t_2)-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)\}a_{f_2}(t_2)\,a^+_{g_2}(t'_2)\,a^+_{g_1}(t'_1)\rangle=$$

$$=\langle a_{f_1}(t_1)\,a_{f_2}(t_2)\{1+n_f(t_2)-n_{-f}(t_2)-\delta(f-f_1)+\delta(f+f_2)-\delta(f-f_2)+\delta(f+f_2)\}\times$$

$$\times\,a^+_{g_2}(t'_2)\,a^+_{g_1}(t'_1)\rangle=\ldots=$$

$$= \langle a_{f_1}(t_1)\, a_{f_2}(t_2)\, a^+_{g_2}(t'_2)\, a^+_{g_1}(t'_1) \times$$

$$\times \{ 1 + n_f - n_{-f} - \delta(f-f_1) + \delta(f+f_1) + \delta(f+f_2) - \delta(f-f_2) +$$

$$+ \delta(f-g_2) - \delta(f+g_2) + \delta(f-g_1) - \delta(f+g_1) \} \rangle =$$

$$= \{ 1 - \delta(f-f_1) + \delta(f+f_1) - \delta(f-f_2) + \delta(f+f_2) +$$

$$+ \delta(f-g_2) - \delta(f+g_2) + \delta(f-g_1) - \delta(f+g_1) \} \times$$

$$\times \langle a_{f_1}(t_1)\, a_{f_2}(t_2)\, a^+_{g_2}(t'_2)\, a^+_{g_1}(t'_1) \rangle .$$

Это тождество показывает, что величины /Б.12/, могут быть отличны от нуля лишь, если для любого f :

$$-\delta(f-f_1) + \delta(f+f_1) - \delta(f-f_2) + \delta(f+f_2) +$$
$$+ \delta(f-g_2) - \delta(f+g_2) + \delta(f-g_1) - \delta(f+g_1) = 0 .$$

Это соотношение вместе с /Б.13/ выполняется лишь в следующих случаях:

$$f_1 + f_2 = 0 \quad ; \quad g_1 + g_2 = 0 \qquad /Б.14/$$

$$f_1 = g_1 \;;\; f_2 = g_2 \tag{Б.15}$$

$$f_1 = g_2 \;;\; f_2 = g_1 . \tag{Б.16}$$

Кроме того в /Б.15/ и /Б.16/ мы всегда можем считать, что $g_1 \neq g_2$, ибо

$$a_g^+(t_2')\, a_g^+(t_1')\, \Phi_H = 0 . \tag{Б.17}$$

В самом деле

$$(n_g - n_{-g})\, a_g^+(t_2')\, a_g^+(t_1')\, \phi_H = a_g^+(t_2')\, a_g^+(t_1')\,(n_g - n_{-g} + 2)\, \phi_H =$$

$$= 2\, a_g^+(t_2')\, a_g^+(t_1')\, \phi_H .$$

Но возможные собственные значения $n_g - n_{-g}$ суть только ± 1 и 0 и, следовательно, последнее равенство возможно лишь при выполнении /Б.17/. Итак, мы можем привести /Б.11/ к форме:

$$\langle \Psi(t_1,x_1)\,\Psi(t_2,x_2)\,\Psi^+(t_2',x_2')\,\Psi^+(t_1',x_1') \rangle =$$

$$= \sum_{f,g} \frac{1}{V^2} \langle a_{-f}(t_1)\, a_f(t_2)\, a_g^+(t_2')\, a_{-g}^+(t_1') \rangle \exp\{ if(x_2 - x_1) - ig(x_2' - x_1') \} +$$

$$+ \sum_{\substack{f,g \\ \left(\substack{f \neq g \\ f+g \neq 0}\right)}} \frac{1}{V^2} \langle a_f(t_1)\, a_g(t_2)\, a_g^+(t_2')\, a_f^+(t_1') \rangle \exp\{ if(x_1 - x_1') + ig(x_2 - x_2') \} +$$

$$+ \sum_{\substack{f,g \\ \left(\substack{f \neq g \\ f+g \neq 0}\right)}} \frac{1}{V^2} \langle a_f(t_1)\, a_g(t_2)\, a_f^+(t_2')\, a_g^+(t_1') \rangle \exp\{ if(x_1 - x_2') + ig(x_2 - x_1') \} .$$

Займемся теперь предельным переходом $V \to \infty$. Рассмотрим класс $C(q,\tau)$ функций $h(x,y)$ и фиксируем q, τ так, чтобы

$$\frac{1}{V^2}\sum_{f,g} |\tilde{h}(f,g)| \leq \text{const},$$

где

$$\tilde{h}(f,g) = \int h(x,y)\, e^{i(fx+gy)}\, dx\, dy.$$

Поскольку /см. /5.56/ / при фиксированных t_1, t_2, t_2', t_1'

$$\left| \langle a_f(t_1) a_g(t_2) a_f^+(t_2') a_g^+(t_1') \rangle_H - \right.$$

$$\left. - \langle a_f(t_1) a_g(t_2) a_f^+(t_2') a_g^+(t_1') \rangle_{H_0} \right| \leq \frac{\text{const}}{\sqrt{V}},$$

мы имеем:

$$\left| \int h(x,y) \left\{ \Gamma_H(t_1,t_2,t_2',t_1' \,|\, x,y) - \Gamma_{H_0}(t_1,t_2,t_2',t_1' \,|\, x,y) \right\} dx\, dy \right| \leq$$

$$\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{V}} \xrightarrow[V\to\infty]{} 0,$$

где $\Gamma(t_1,t_2,t_2',t_1' \,|\, x,y) =$

$$= \frac{1}{V^2} \sum_{\substack{f,g \\ (f\neq g \\ f+g\neq 0)}} \langle a_f(t_1) a_g(t_2) a_f^+(t_2') a_g^+(t_1') \rangle e^{i(fx+gy)}.$$

Получаем таким образом обобщенные предельные соотношения:

$$\Gamma_H(t_1,t_2,t_2',t_1', x_1-x_2', x_2-x_1') - \Gamma_{H_0}(t_1,t_2,t_2',t_1', x_1-x_2', x_2-x_1') \xrightarrow[V\to\infty]{} 0.$$

Но прямое вычисление так же, как в случае /Б.4/, дает:

$$\Gamma_{H_0}(t_1,t_2,t_2',t_1', x_1-x_2', x_2-x_1') =$$

$$= -\frac{1}{V^2}\sum_{\substack{f,g\\ \left(\substack{f\neq g\\ f+g\neq 0}\right)}} |u_f|^2|u_g|^2 e^{-i\Omega(f)(t_1-t_2')-i\Omega(g)(t_2-t_1')} e^{i(f(x_1-x_2')+g(x_2-x_1'))} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -\left\{\Delta(t_1-t_2',x_1-x_2')-\mathcal{F}(t_1-t_2',x_1-x_2')\right\}\left\{\Delta(t_2-t_1',x_2-x_1')-\mathcal{F}(t_2-t_1',x_2-x_1')\right\}\delta(\sigma_1-\sigma_2')\times$$
$$\times\,\delta(\sigma_2-\sigma_1')$$

где $\Omega(f)$ определяется соотношением /6.2'/ а $\Delta(t,x)$ и $\mathcal{F}(t,x)$ соотношением /Б.9/.

Следовательно,

$$\lim_{V\to\infty}\Gamma_H(t_1,t_2,t_2',t_1',x_1-x_2',x_2-x_1') =$$
$$= -\left\{\Delta(t_1-t_2',x_1-x_2')-\mathcal{F}(t_1-t_2',x_1-x_2')\right\}\times$$
$$\times\left\{\Delta(t_2-t_1',x_2-x_1')-\mathcal{F}(t_2-t_1',x_2-x_1')\right\}\delta(\sigma_1-\sigma_2')\delta(\sigma_2-\sigma_1')$$

Совершенно аналогично поступим и с другими членами, входящими в правую часть равенства /Б.18/. Положим теперь

$$\Phi_0(t,x) = -\int u_f v_f e^{-i\Omega(f)t-ifx}\,d\vec{k} =$$
$$= \int \frac{c\lambda(f)}{2\Omega(f)} e^{-i\Omega(f)t-ifx}\,d\vec{k} \qquad /Б.20/$$

Тогда можем написать обобщенное предельное соотношение в виде:

$$\lim_{V\to\infty}\left\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\Psi_{\sigma_2}(t_2,x_2)\Psi^{+}_{\sigma_2'}(t_2',x_2')\Psi^{+}_{\sigma_1'}(t_1',x_1')\right\rangle_H =$$

$$= \Phi_{\sigma_2}(t_1-t_2,x_1-x_2)\,\Phi_{\sigma_2'}(t_2'-t_1',x_2'-x_1')\,\delta(\sigma_1+\sigma_2)\,\delta(\sigma_1'+\sigma_2') + \qquad /Б.21/$$

$$+\delta(\sigma_1-\sigma_1')\delta(\sigma_2-\sigma_2')\left\{\Delta(t_1-t_1',x_1-x_1')-\mathcal{F}(t_1-t_1',x_1-x_1')\right\}\left\{\Delta(t_2-t_2',x_2-x_2')-\mathcal{F}(t_2-t_2',x_2-x_2')\right\}-$$

$$-\delta(\sigma_1-\sigma_2')\delta(\sigma_2-\sigma_1')\left\{\Delta(t_1-t_2',x_1-x_2')-\mathcal{F}(t_1-t_2',x_1-x_2')\right\}\left\{\Delta(t_2-t_1',x_2-x_1')-\mathcal{F}(t_2-t_1',x_2-x_1')\right\}.$$

Совершенно аналогичные формулы получаются и для других порядков расположения операторных функций ψ , ψ^{+} .

На примере полученной формулы /Б.21/ мы можем проиллюстрировать принцип ослабления корреляции.

Надо только заметить, что при фиксированном t

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}(t,x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0 \\ \Phi(t,x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \qquad /Б.22/$$

$$\Delta(t,x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0 \ ^{x/} \qquad /Б.23/$$

---

x/ Сама функция $\Delta(t,x)$ - обобщенная. Это соотношение также разумеется имеет место в обобщенном смысле.

Фиксируем времена t_1, t_2, t'_2, t'_1 и пространственные разности

$$x_1 - x'_1, \ x_2 - x'_2.$$

Остальные пространственные разности

$$x_1 - x_2, \quad x'_1 - x'_2, \quad x_1 - x'_2, \quad x_2 - x'_1$$

устремим к бесконечности. Тогда рассматриваемая функция

$$\lim_{V \to \infty} \left\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1)\, \Psi_{\sigma_2}(t_2, x_2)\, \Psi^{+}_{\sigma'_2}(t'_2, x'_2)\, \Psi^{+}_{\sigma'_1}(t'_1, x'_1) \right\rangle_H \tag{Б.24}$$

будет распадаться на произведение:

$$\left\{ \Delta(t_1 - t'_1, x_1 - x'_1) - \mathcal{F}(t_1 - t'_1, x_1 - x'_1) \right\} \left\{ \Delta(t_2 - t'_2, x_2 - x'_2) - \mathcal{F}(t_2 - t'_2, x_2 - x'_2) \right\} \delta(\sigma_1 - \sigma'_1) \times$$
$$\times\, \delta(\sigma_2 - \sigma'_2)$$

равное /см. /Б.8/ /.

$$\lim_{V \to \infty} \left\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1, x_1)\, \Psi^{+}_{\sigma'_1}(t'_1, x'_1) \right\rangle_H \lim_{V \to \infty} \left\langle \Psi_{\sigma_2}(t_2, x_2)\, \Psi^{+}_{\sigma'_2}(t'_2, x'_2) \right\rangle_H . \tag{Б.25}$$

Рассмотрим теперь другой способ ослабления корреляции.

Снова фиксируем времена t_1, t_2, t'_2, t'_1 и пространственные разности:

$$x_1 - x_2, \quad x'_1 - x'_2 .$$

Остальные пространственные разности

$$x_1 - x'_1, \quad x_2 - x'_2, \quad x_1 - x'_2, \quad x_2 - x'_1 .$$

устремим к бесконечности. Тогда рассматриваемая функция /Б.24/ распадается на произведение

$$\Phi(t_1 - t_2, x_1 - x_2)\, \Phi(t'_2 - t'_1, x'_2 - x'_1)\, \phi_{\sigma_2}\, \phi_{\sigma'_2}\, \delta(\sigma_1 + \sigma_2) \times$$
$$\times\, \delta(\sigma'_1 + \sigma'_2) \tag{Б.26}$$

При $\gamma > 0$

$$\Phi_\sigma(t_1-t_2,\, x_1-x_2)=\lim_{V\to\infty}\langle \Psi_{-\sigma}(t_1,x_1)\Psi_\sigma(t_2,x_2)\rangle_H$$
$$\Phi_\sigma(t_2'-t_1',\, x_2'-x_1')=\lim_{V\to\infty}\langle \Psi^+_\sigma(t_2',x_2')\Psi^+_{-\sigma}(t_1',x_1')\rangle_H \qquad /Б.27/$$

так, что мы имеем распадение /Б.24/ на произведение средних:

$$\lim_{V\to\infty}\langle \Psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\Psi_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle \lim_{V\to\infty}\langle \Psi^+_{\sigma_2'}(t_2',x_2')\Psi^+_{\sigma_1'}(t_1',x_1')\rangle \qquad /Б.28/$$

Установленные нами соотношения /Б.25/ или /Б.28/ и являются в данном случае выражением принципа ослабления корреляции /Б.2/.

При $\nu=0$

$$\langle \Psi(t_1,x_1)\Psi(t_2,x_2)\rangle_H=0$$

и соотношения /Б.27/ места не имеют. В этом случае, однако, мы можем ввести "квази-средние"

$$\langle \psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\psi_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle_H=\lim_{\nu\to 0}\ \lim_{V\to\infty}\langle \psi_{\sigma_1}(t_1,x_1)\psi_{\sigma_2}(t_2,x_2)\rangle=$$
$$=\Phi_{\sigma_2}(t_1-t_2,\, x_1-x_2)\,\delta(\sigma_1+\sigma_2) \qquad /Б.29/$$

и вместо произведения средних /Б.28/ взять соответствующее произведение "квази-средних". Полученные выше соотношения представляют собою иллюстрацию общего принципа ослабления корреляции.

Пользуясь случаем, выражаю свою искреннюю благодарность Д.Н.Зубареву, С.В.Тябликову, Ю.А.Церковникову и Е.Н.Яковлеву.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1960 года.

Литература

[1] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schriffer. Phys.Rev. 105, 1175 (1957).

[2] Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников, ДАН СССР, 117,788/1957

[3] Prange /препринт/.

[4] Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников. ЖЭТФ /в печати/.

[5] Н.Н.Боголюбов. ЖЭТФ, 37, 73 /1958/.

[6] Н.Н.Боголюбов. Изв. АН СССР, сер.физ. 11, 77 /1947/.