

2
K-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

505

Лаборатория теоретической физики

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

P - 505

Г.И. Копылов, З.Д. Ломакина

К ПРЯМОМУ ВОССТАНОВЛЕНИЮ
АМПЛИТУДЫ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

ЖСЭТФ, 1960, т 38, Вып. 5, с 1649-1657.

Дубна 1960 год

606/8 му.

P-505

Г.И. Копылов, З.Д. Ломакина

К ПРЯМОМУ ВОССТАНОВЛЕНИЮ
АМПЛИТУДЫ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

Направлено в ЖЭТФ.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

А н н о т а ц и я

Дан метод численного решения нелинейного интегрального уравнения, которому удовлетворяет комплексная амплитуда упругого рассеяния бесспиновых частиц на силовом центре. На ряде примеров показано, что этот метод способен заменить собою фазовый анализ.

Известно, что, измеряя при упругом рассеянии бесспиновых частиц дифференциальное сечение $\sigma(\mu)$ ($\mu = \cos \vartheta$), мы получаем квадрат модуля амплитуды рассеяния

$$|f(\mu)|^2 = \sigma(\mu). \quad /1/$$

Обычно получают комплексную амплитуду рассеяния с помощью фазового анализа, т.е. представляют $f(\mu)$ в виде ряда

$$f(\mu) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\eta_l} - 1) P_l(\mu) \quad /2/$$

и подстановкой в /1/ определяют η_l .

В работе Пузикова, Рындина и Смородинского^{/1/} было обращено внимание на то что условие унитарности, которому удовлетворяет $f(\mu)$

$$4\pi \operatorname{Im} f(\mu) = k \int_{\text{ед. сфера}} f^*(\mu'') f(\mu') d\mu' d\varphi \quad /3/$$

$$\left(\mu'' = \mu' \mu + \sqrt{1 - \mu'^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \right) \quad /7/$$

может рассматриваться как уравнение, которому /наряду с /1// должна удовлетворять функция $f(\mu)$. Далее, в^{/1/} было указано, что, когда $f(\mu)$ зависит от большого числа фаз, решение системы /1/, /3/ следует предпочесть фазовому анализу. При фазовом анализе приходится всегда ограничиться несколькими первыми фазами, и вклад неучтенных фаз остается неизвестным. Кроме того, иногда фазовый анализ дает несколько наборов первых фаз. Неоднозначность свидетельствует о необходимости в этом случае учесть последующие фазы.

Прямое решение системы /1/, /3/, давая сразу $f(\mu)$, должно оказаться свободным от этих недостатков.

Решение системы /1/, /3/ в конечном виде неизвестно. Поэтому естественно разыскать путь ее численного решения. В настоящей работе излагается метод, примененный нами для решения системы на электронно-счетной машине, и полученные при этом результаты.

Успех метода позволяет надеяться, что и в более сложном случае рассеяния частиц со спином^{1/1} удастся проводить прямое определение матрицы рассеяния взамен фазового анализа. При решении системы нелинейных интегральных уравнений, которой удовлетворяет в этом случае матрица рассеяния, могут оказаться полезными некоторые идеи настоящей работы. Мы имеем в виду, в первую очередь, использование обобщенных функций для получения очередных итераций.

1. Исходная система уравнений

В качестве пары действительных функций, определяющих $f(\mu)$, можно взять либо ее модуль $\sqrt{\sigma(\mu)}$ и фазу $\alpha(\mu)$ ^{1/1}, либо ее действительную и мнимую часть $R(\mu)$ и $J(\mu)$. Последнее предпочтительнее первого. В самом деле, из /2/ видно, что

$$R(\mu) = \frac{1}{2k} \sum_e (2l+1) \sin 2\eta_e P_e(\mu),$$

$$J(\mu) = \frac{1}{2k} \sum_e (2l+1) (1 - \cos 2\eta_e) P_e(\mu),$$

/4/

т.е. $R(\mu)$ и $J(\mu)$ - целые функции μ /при малых энергиях их можно считать многочленами/. Как правило, они имеют нули и на отрезке $(-1, 1)$. Их отношение J/R тогда является мероморфной функцией с полюсами на действительной оси в нулях $R(\mu)$ и нулями в нулях $J(\mu)$. Фаза $\alpha(\mu) = \arctg(J/R)$ в нулях $J(\mu)$ проходит через значения $0, \pm \pi, \dots$, в нулях $R(\mu)$ - через $\pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$. Ясно, что выбор в качестве искомым функций модуля и фазы поставил бы численный расчет методом

итераций перед большими трудностями. Взяв $f(\mu)$ с незначительной погрешностью, мы могли бы изменить взаимное расположение нулей $R(\mu)$ и $J(\mu)$, т.е. точек с ординатами $0, \pm\pi/2, \pm\pi, \dots$ на кривой $\alpha(\mu)$. Таким образом, фаза $\alpha(\mu)$ неустойчива относительно небольших изменений $f(\mu)$, и не следует выбирать ее в качестве неизвестной функции. В то же время $R(\mu)$ и $J(\mu)$, не имеющие полюсов на $A.1/$, удобны для численного расчета.

Уравнения для них имеют вид

$$J(\mu) = \frac{k}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [J(\mu'')J(\mu') + R(\mu'')R(\mu')] d\mu' d\varphi, \quad /8/$$

где

$$\mu'' = \mu' \mu + \sqrt{1-\mu'^2} \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi \quad /7/$$

и

$$R^2(\mu) + J^2(\mu) = \sigma(\mu). \quad /5/$$

Система /5/-/8/ является для нас исходной. Она не меняется^{/1/} при замене $f(\mu)$ на $-f^*(\mu)$, т.е. $R(\mu)$ на $-R(\mu)$. Это значит, что /5/-/8/ определяет $R(\mu)$ с точностью до перемены знака на всем интервале /1,1/.

2. Метод решения

Решать систему /5/-/8/ будем по методу Ньютона^{/2/}. С этой целью будем считать, что n -е приближение J_n, R_n к J, R уже получено, и напишем уравнение для поправок к n -му приближению ξ_n, η_n , имея в виду, что

$$J_{n+1}(\mu) = J_n(\mu) + \xi_n(\mu)$$

$$R_{n+1}(\mu) = R_n(\mu) + \eta_n(\mu). \quad /8/$$

Предположим, что почти всюду $|Y_n(\mu)| \gg |\xi_n(\mu)|$, $|R_n(\mu)| \gg |\eta_n(\mu)|$.
Отбрасывая в /5/, /6/ члены второго порядка по ξ , η , получим из /6/
коэффициент k включен в $f(\mu)$

$$Y + \xi = \frac{1}{4\pi} \iint [(R''R' + Y''Y') + (R''\eta' + R'\eta'' + Y''\xi' + Y'\xi'')] d\mu' d\varphi. \quad /9/$$

Здесь при всех величинах J , R , ξ , η подразумевается индекс n ; штрих и два штриха указывают, от какого аргумента зависит функция ($J \equiv J(\mu)$; $J' \equiv J(\mu')$; $J'' \equiv J(\mu'')$). Меняя направление полярной оси используемой системы координат, получим для интегралов по сфере тождество

$$\int \Phi(\mu'') \Psi(\mu') d\Omega' = \int \Phi(\mu') \Psi(\mu'') d\Omega''. \quad /10/$$

Поэтому /9/ упрощается

$$Y + \xi = \frac{1}{4\pi} \iint [(R''R' + Y''Y') + 2(R''\eta' + Y''\xi')] d\mu' d\varphi. \quad /9/$$

Из /5/ следует

$$Y\xi + R\eta = \frac{1}{2}(\sigma - J^2 - R^2) \equiv \tilde{f}. \quad /11/$$

Определим из /11/ η , а затем $R''\eta' + Y''\xi' =$

$$= \frac{R''(\sigma - J'^2 - R'^2) - 2\xi'(R''J' - R'J'')}{2R'}. \quad /12/$$

Подставив в /9/, исключим η . Для ξ получается линейное уравнение

$$\xi + \frac{1}{2\pi} \iint (R''J' - R'J'') \frac{\xi'}{R'} d\mu' d\varphi = -J + \frac{1}{4\pi} \iint [R''R' + Y''Y' + 2R'' \frac{\tilde{f}'}{R'}] d\mu' d\varphi. \quad /13/$$

Решение этого уравнения даст $\xi_n(\mu)$. Затем вычислим по /8/ следующее приближение $J_{n+1}(\mu)$.

Сложнее оказывается получение $R_{n+1}(\mu)$. Мы испытали несколько формул. Неудачным было использование уравнения, подобного /13/, но относительно $\eta_n(\mu)$, которое можно получить из /9/-/11/ исключением $\xi_n(\mu)$. Непригодно также /11/-в нулях $R_n(\mu)$ оно дает бесконечно большие значения $\eta_n(\mu)$. К цели привела простая формула

$$R_{n+1} = \sqrt{|\sigma - J_{n+1}^2|}. \quad /14/$$

Она дает модуль $R_{n+1}(\mu)$; так как $R(\mu)$ определена с точностью до перемены знака на /-1,1/, то затруднение в постановке знака возникало лишь при переходе $R_{n+1}(\mu)$ через нуль. В этом случае правильный знак можно установить из условия непрерывности производной $dR_{n+1}(\mu)/d\mu$.

Перейдем к решению /13/. Введем новые функции

$$\rho_n(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_n(\mu'') dy, \quad /15/$$

$$\sigma_n(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_n(\mu'') dy,$$

$$F_n = 2\tilde{f}_n + R_n^2 = \sigma - J_n^2. \quad /16/$$

Тогда /13/ перепишется в виде

$$\xi_n(\mu) + \int_{-1}^1 \left[\rho_n(\mu, \mu') \frac{J_n(\mu')}{R_n(\mu')} - \sigma_n(\mu, \mu') \right] \xi_n(\mu') d\mu' =$$

$$= -J_n(\mu) + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\frac{F_n(\mu')}{R_n(\mu')} \rho_n(\mu, \mu') + \sigma_n(\mu, \mu') J_n(\mu') \right] d\mu'. \quad /17/$$

Если бы $R_n(\mu')$ не могла обращаться в нуль на /-1,1/, решение /17/ можно было бы проводить, заменяя интегральное уравнение системой линейных. Но предполагая, что $R_n(\mu)$ имеет на /-1,1/ нули, надо придать сначала смысл интегралам от $R_n^{-1}(\mu)$, и притом такой, чтобы сходимость процесса была обеспечена.

Мы рассматривали эти интегралы в смысле главного значения, ограничиваясь случаем, когда $R_n(\mu)$ имеет на $[-1, 1]$ нули лишь первого порядка, не совпадающие притом с концами интервала. Однако, если бы R_n имела на $[-1, 1]$ нули кратности выше первой, это не создало бы дополнительных трудностей, если интегралы от R_n^{-1} регуляризовать по формулам теории обобщенных функций^{x/}. Эти формулы обладают тем свойством, что при постепенном слиянии двух, трех и т.д. полюсов первого порядка в один полюс второго, третьего и т.д. порядка интегралы меняются также непрерывно. Возможно, именно эта непрерывность обобщенных функций обеспечила нам сходимость процесса последовательных приближений при разном количестве нулей исходного приближения R_0 и искомого решения R .

Мы пользовались следующей регуляризацией несобственных интегралов. Если некоторая $f(x) = \varphi(x)/R(x)$ имеет полюса на $[a, b]$ в S точках x_s с вычетами $\frac{\varphi(x_s)}{R'(x_s)}$, то можно ввести функцию

$$\Phi(x) = f(x) - \sum_s \frac{\varphi(x_s)}{R'(x_s)} \frac{1}{x - x_s}$$

без особенностей. Тогда под интегралом от $f(x)$ будем понимать

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \Phi(x) dx + \sum_s \frac{\varphi(x_s)}{R'(x_s)} \ln \left| \frac{b - x_s}{a - x_s} \right|. \quad /18/$$

Здесь интеграл от целой функции $\Phi(x)$ можно брать численным интегрированием, а вклад особенностей учитывается членом с логарифмом. Этот член никогда не обращается в бесконечность, если $x_s \neq a, b$, что мы оговорили. Заменяем интегралы на суммы по квадратурной формуле в J точках

$$\int_a^b \Phi(x) dx = \sum_j^J a_j \Phi(x_j).$$

Подстановка в /18/ приводит к формуле численного интегрирования несобственных функций

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{R(x)} dx = \sum_j^J a_j \frac{\varphi(x_j)}{R(x_j)} + \sum_s \frac{\varphi(x_s)}{R'(x_s)} \left(\ln \left| \frac{b - x_s}{a - x_s} \right| - \sum_j^J \frac{a_j}{x_j - x_s} \right). \quad /19/$$

^{x/} Зато появились бы трудности в определении знака при переходе $R_n(\mu)$ через нуль.

Первый член в /19/ есть обычная квадратурная формула, как если бы подынтегральная функция не имела особенностей. Второй член учитывает вклад полюсов. Фактор в круглых скобках для данной квадратурной формулы между фиксированными пределами есть /разрывная/ функция положения полюса x_s интегрируемой функции. При выборе квадратурной формулы следует позаботиться, чтобы ее узлы x_j не совпадали с нулями $R(x)$.

Применяя /19/ к нашему интегральному уравнению, получим вместо него систему:

$$\begin{aligned} \xi_i + \sum_j a_j \frac{\rho_{ij} J_j \xi_j}{R_j} + \sum_s \frac{\rho_{is} J_s \xi_s}{R'_s} \left(- \sum_j \frac{a_j}{m_j - m_s} + \ln \frac{1 - m_s}{1 + m_s} \right) - \\ - \sum_j a_j \sigma_{ij} \xi_j = -J_i + \frac{1}{2} \sum_j a_j \frac{F_j \rho_{ij}}{R_j} + \quad /20/ \\ + \frac{1}{2} \sum_s \frac{F_s \rho_{is}}{R'_s} \left(- \sum_j \frac{a_j}{m_j - m_s} + \ln \frac{1 - m_s}{1 + m_s} \right) + \sum_j a_j \sigma_{ij} J_j. \end{aligned}$$

Здесь введены сокращения $\xi_n(m_i) = \xi_i$; $\rho_n(m_i, m_j) = \rho_{ij}$; $R'_n(m_j) = R'_j$.
Индекс i нумерует уравнение, j - узлы квадратурной формулы, s - нули $R_n(m')$. Обозначим

$$\Psi_s = \ln \frac{1 - m_s}{1 + m_s} - \sum_j \frac{a_j}{m_j - m_s}, \quad /21/$$

$$N_{ij} = a_j \left(\frac{\rho_{ij} J_j}{R_j} - \sigma_{ij} \right) \quad /22/$$

$$N_{is} = \frac{\rho_{is} J_s}{R'_s} \Psi_s \quad /23/$$

$$L_i = -J_i(m_i) + \frac{1}{2} \sum_j a_j \left(\frac{F_j \rho_{ij}}{R_j} + \sigma_{ij} J_j \right) + \frac{1}{2} \sum_s \frac{\rho_{is} F_s}{R'_s} \Psi_s. \quad /24/$$

Тогда /20/ примет вид

$$\sum_j^J (N_{ij} + \delta_{ij}) \xi_j + \sum_s^S (N_{is} + \delta_{is}) \xi_s = \mathcal{L}_i \quad /25/$$

($i=1, \dots, J, J+1, \dots, J+S$) . Число уравнений равно количеству узлов квадратной формулы плюс число нулей очередного приближения $R_n(\mu)$. Наличие последнего слагаемого связано с необходимостью вычислять в /19/ вычеты подынтегрального выражения в нулях знаменателя, для чего надо знать значения искомой функции $\xi(\mu')$ в нулях μ_s . Таким образом, численное решение сводится к вычислению $\xi_i \equiv \xi_n(\mu_i)$ в $J+S$ точках. Переход к следующему приближению производится по формулам

$$J_{n+1}(\mu_i) = J_n(\mu_i) + \xi_n(\mu_i) \quad /26_1/$$

$$|R_{n+1}(\mu_i)| = \sqrt{|F_{n+1}(\mu_i)|} \quad /26_2/$$

Заметим, что для расчета надо еще знать величины $\rho_n(\mu, \mu')$ и $\sigma_n(\mu, \mu')$ в точках i, j /15/. Это можно сделать по формулам

$$\begin{aligned} \rho_n(\mu_i, \mu_j) &= \rho_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^J a_k R_n(\mu_{ijk}), \\ \sigma_n(\mu_i, \mu_j) &= \sigma_{ij} \end{aligned} \quad /27/$$

где

$$\mu_{ijk} = \mu_i \mu_j + \sqrt{1 - \mu_i^2} \sqrt{1 - \mu_j^2} \cos \varphi_k \quad /28/$$

и

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} (1 + \mu_k), \quad /29/$$

причем

$$i = 1, \dots, J+S; \quad j = 1, \dots, J+S; \quad k = 1, \dots, J.$$

3. Численные результаты

Приведенные в § 2 формулы были проверены на нескольких примерах. Примеры были подобраны с целью оценить быстроту сходимости метода. Расчеты проводились на машине "Стрела". Степень многочленов $R(\mu)$ и $J(\mu)$ была ограничена тремя, т.е. в сумме /4/ брались 4 члена. Проверка заключалась в следующем.

Задавшись значениями фаз $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$, по /4/ вычисляли $R(\mu)$ и $J(\mu)$ и по /5/ $\sigma(\mu)$. Это $\sigma(\mu)$ теперь принималось за полученное из опыта. Взяв два новых набора η_0, \dots, η_3 /порою сильно отличных от первоначального набора/, вычисляли по /4/ нулевое приближение $R_0(\mu), J_0(\mu)$. С помощью формул § 2 получалась поправка $\xi_n(\mu)$. Использовалась квадратная формула Гаусса для 6 точек ($J = 6$), а третья степень многочлена могла привести к появлению у $R_n(\mu)$ трех нулей ($S \leq 3$). Для дифференцирования и получения нулей $R_n(\mu)$ определялся по методу наименьших квадратов многочлен 3-й степени, наилучшим образом проходящий через 6 точек $(\mu_j, R_n(\mu_j))$. Нули интерполяционного многочлена вычислялись по следующему алгоритму^{/3/}: если $\Phi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$p \Phi'' + q \Phi' + r \Phi = S,$$

где p, q, r, S - функции x , то итерационная формула для нахождения корней $\Phi(x)$ такова:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2\Phi\Phi'p}{2(\Phi')^2p - \Phi S + r\Phi^2 + q\Phi\Phi'} \quad /30/$$

Предварительно для получения нулевого приближения нули $R_n(\mu)$ отделялись. Зная многочлен, приближающий $R_n(\mu)$ и его нули μ_s , легко было вычислить производную в нулях $R'_n(\mu_s)$. Для расчета требовалось знать, далее, значения $R_n(\mu_{ijk})$ и $J_n(\mu_{ijk})$ в $J(J+S)^2$ точках /для формул /27//, а известны R_n и J_n были лишь в $J+S$ точках. Поэтому для остальных значений μ , R_n и J_n вычислялись интерполяцией методом Эйткена /по 6 точкам/. /Заметим, что интерполяция оказалась наиболее трудоемкой частью расчета/. Решение системы $J+S$ уравнений проводилось стандартными методами машинной математики. Получение одного приближения занимало примерно 10 мин. Быть может, это время удалось бы уменьшить, если бы пользоваться интерполяцией менее высокого порядка.

Как стало ясно из проведенных расчетов, правильное ведение расчета дает уже в первом приближении хорошее значение для $|R(\mu)|$, и во втором - третьем - хорошее значение для $J(\mu)$ и $R(\mu)$. Правильное ведение расчета состоит в том, что, получив первое приближение $J_1(\mu)$, $R_1(\mu)$, следует дальше взять $R_1(\mu)$ с правильными знаками при $|R_1(\mu)|$. Таким образом, использовалась формула

$$R_n(\mu) = |R_n(\mu)| \cdot \operatorname{sgn} R(\mu) \quad (n \geq 1). \quad /31/$$

Пользование этой формулой незаконно, так как предполагает знание $R(\mu)$. Однако, фактически уже $|R_1(\mu)|$ получалось близким к $|R(\mu)|$, так что добавочная информация об $R(\mu)$, содержащаяся в /31/, равнозначна естественному требованию непрерывности производной $R'_n(\mu)$ при переходе $R_n(\mu)$ через нуль. Исключения представляют примеры 8 и 10, где $|R_1(\mu)|$ плохо приближает $|R(\mu)|$. Ниже мы подробно остановимся на этих примерах.

В большинстве решенных примеров мы брали в качестве нулевого приближения кривые, весьма сильно отличающиеся от точного решения /рис.1/.

Так, если $J(\mu)$, $R(\mu)$ имеют по 2 нуля, то $J_0(\mu)$, $R_0(\mu)$ могло иметь 1 или 3 нуля /примеры 1, 2, 6/, так что поправки $\xi_n(\mu)$ по величине превосходили порою само $J_n(\mu)$. О силе примененного метода говорит то, что,

$|R_1(\mu)|$ все-таки получался в примерах 1-7 с высокой точностью близким к $|R(\mu)|$. К сожалению, в части примеров /1-3/ не использовалась достигнутая близость R_1 и R , а продолжалось использование R_0 в качестве исходного приближения. Поэтому следующие 2-3 приближения, улучшая $|R_n|$, не улучшали J_n . И лишь замена R_0 на $|R_n|$ с правильными знаками сразу, за 1-2 приближения, приводила к правильным значениям $J_n(\mu)$.

В таблице 1 сведены результаты расчетов. Приближение, принятое вторично за нулевое, помечено нулем в скобках. Приведены значения фаз. Обозначено:

$$\begin{aligned} -\mu_1 &= \mu_6 &= 0,93247 ; \\ -\mu_2 &= \mu_5 &= 0,66121 ; \\ -\mu_3 &= \mu_4 &= 0,23862 . \end{aligned}$$

В таблице 2 сопоставлены четыре значащих цифры последних приближений с теми же цифрами решения. В R иногда совпадали и 5-6 знаков. Пустые клетки означают, что ни одна цифра результата с решением не совпала.

После того, как были решены примеры 1-7, мы задались вопросом о границах применимости метода Ньютона для данного уравнения. С этой целью были придуманы примеры 8-10. Ожидалось, что в примерах 8 и 10 сходимости вообще не будет, а в контрольном примере 9 сходимость будет хорошая. В примере 8 $R_0(\mu)$ имеет 1 нуль, хотя у $R(\mu)$ нулей нет / R близко подходит к оси абсцисс, но не касается ее/. Поэтому регуляризованный интеграл

$$\int [\psi_0(\mu) / R_0(\mu)] d\mu \quad /см. /18// \text{ должен сильно отличаться от}$$

$\int [\psi_n(\mu) / R_n(\mu)] d\mu$, если R_n настолько близко к R , что тоже, как и R , не имеет нулей. В самом деле, последний интеграл очень велик, если R_n в некоторой точке близко к нулю. Выше мы говорили о непрерывном изменении регуляризованных интегралов при слиянии нулей. Если нули, совпав, исчезают, т.е. R поднимается чуть выше оси абсцисс, интеграл терпит разрыв, удаляясь к бесконечности. Разрыв непрерывности при переходе

от регуляризованных интегралов к обычным и должен был привести к отсутствию сходимости. В примере 10 следовало ожидать того же, так как в нем R_0 не имеет нулей, хотя у R один нуль /поменяли местами R_0 и R примера 8/. В примере 9 R то же, что и в примере 8, — не имеет нулей, а $R_0(\mu) = R(\mu) + 0,071$ также не имеет нулей. Здесь можно было надеяться на сходимость процесса.

Фактически в примерах 8,10 все же получилась сходимость, но замедленная. Быть может, сходимость можно отнести за счет использования формулы /31/, которая присваивала $R_n(\mu)$ правильные знаки, хотя $|R_n|$ получалось далеким от $|R(\mu)|$, и кривая $R_n(\mu)$ выходила не менее плавной и при другой комбинации знаков / +++ --- в примере 8 и ++++++ или +-+---- в примере 10/.

В примере 9 сходимость R хорошая, но J_n сходится к J так же медленно, как и в примерах 8, 10. Складывается впечатление, что вообще в случае знакопостоянных $R(\mu)$ сходимость хуже. Конечно, возможно, что плохая сходимость случайна и присуща лишь данной конкретной функции $R(\mu)$. В Приложении мы высказываем предположение о путях, на которых можно было бы добиться хорошей сходимости и для знакопостоянных $R(\mu)$.

Заключительные замечания

Затруднения, с которыми мы встретились при приближении знакопостоянных $R(\mu)$ знакопеременными, с физической точки зрения кажутся несущественными. Всегда можно из физических соображений выбрать $R_0(\mu)$ тоже знакопостоянным, и тогда сходимость процесса Ньютона улучшится. В работе рассматривались, как правило, худшие случаи, когда $f(\mu)$ неизвестна даже приближенно; фактически же нулевое приближение f_0 можно выбрать гораздо ближе к f , чем в рассмотренных примерах. Поэтому можно говорить о возможности пользоваться условием унитарности для практического определения амплитуды рассеяния. Особенно быстро сходятся последовательные приближения для действительной части амплитуды. Далее, амплитуда рассеяния вперед получается гораздо точнее, чем амплитуда рассеяния назад

/даже в примерах 8,10 для $\mu \sim 1$ получились 3-4 верных знака $f(\mu)$ /.
Хуже всего получается мнимая часть амплитуды рассеяния назад.

Следует надеяться, что и в случае рассеяния мезонов на нуклонах получающиеся 2 соотношения унитарности^{/1/} окажется возможным решать подобным методом.

Авторы благодарны Р.М.Рындину и Л.А.Чудову за постановку задачи.

Приложение

Здесь мы хотим сформулировать некоторые вопросы и предположения, возникающие при решении задачи.

1. Сходится ли процесс Ньютона, если линеаризовать исходную систему лишь по $J(\mu)$, т.е. решать уравнение

$$J_n + \xi_n = \frac{1}{4\pi} \iint (J_n' J_n'' + 2J_n' \xi_n' + R_n' R_n'') d\mu' d\varphi$$

и затем получать следующее приближение так:

$$J_{n+1} = J_n + \xi_n, \quad R_{n+1}^2 = |\sigma - J_{n+1}^2| \quad ?$$

Если бы этот процесс сходился, то отпали бы все трудности, связанные с учетом количества и положения нулей $R(\mu)$, т.е. большая часть проблем настоящей работы.

2. Верно ли, что за хорошую сходимость процесса Ньютона для данного уравнения ответственны функционалы, образованные по правилам регуляризации несобственных интегралов? Если это так, то нельзя ли попытаться "регуляризовать" интегралы от регулярных функций, "близких" к сингулярным, с тем, чтобы малый переход от сингулярных функций к регулярным мало изменял интеграл?

Если, например, $R(\mu)$ имеет в некоторой точке двойной нуль, $R(\mu) - \varepsilon^2$ два близких нуля, а $R + \varepsilon^2$ не имеет нулей / ε мало/, то следует

попытаться так регуляризовать $\Phi(R, \alpha) = \int_a^b d\mu [R(\mu) + \alpha]^{-1}$, чтобы $\Phi(R, \alpha)$ на отрезке изменения α $(-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$ был непрерывной функцией α . Приведем пример, когда такая регуляризация возможна.

Пусть $R = (\mu - 1/2)^2$, $a=0, b=1$. Тогда

$$\Phi(R, 0) = \int_0^1 d\mu (\mu - 1/2)^{-2} = - \frac{1}{\mu - 1/2} \Big|_0^1 = -4;$$

$$\begin{aligned} \Phi(R, -\varepsilon^2) &= \int_0^1 \frac{d\mu}{(\mu - 1/2)^2 - \varepsilon^2} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \left[\frac{1}{\mu - 1/2 - \varepsilon} - \frac{1}{\mu - 1/2 + \varepsilon} \right] d\mu = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1/2 - \varepsilon}{1/2 + \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(R, \varepsilon^2) &= \int_0^1 \frac{d\mu}{(\mu - 1/2)^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{i\varepsilon} \ln \frac{1/2 - i\varepsilon}{1/2 + i\varepsilon} = \\ &= -\frac{2}{\varepsilon} \operatorname{arctg} 2\varepsilon + \frac{\pi}{\varepsilon} k \quad (k=0, 1, \dots). \end{aligned}$$

В обычной формуле для определенного интеграла полагают $k=1$ и получают

$$\tilde{\Phi}(R, \varepsilon^2) = \frac{2}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{1}{2\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty.$$

Таким образом, $\lim_{\alpha \rightarrow -0} \Phi(R, \alpha) = \Phi(R, 0) \neq \lim_{\alpha \rightarrow +0} \tilde{\Phi}(R, \alpha)$.

Однако, если принять $k=0$, то

$$\Phi(R, \varepsilon^2) = -\frac{2}{\varepsilon} \operatorname{arctg} 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4,$$

т.е. функционал $\Phi(R, \alpha)$ непрерывен в $\alpha=0$. Таким образом, задача регуляризации функционалов от функций, непрерывно зависящих от параметра, изменение которого переводит сингулярные функции в регулярные, требует переопределения функционалов от регулярных функций. Это переопределение,

конечно, не должно затрагивать интегралов от регулярных функций, содержащихся в исходном нелинейном интегральном уравнении и имеющих физический смысл, а может относиться лишь к функционалам из "подсобных" уравнений, дающих последовательные приближения.

Быть может, на этом пути удастся расширить круг нелинейных задач, решаемых методом Ньютона, сделав этот метод "полностью нечувствительным" к несовпадению числа нулей нулевого приближения и решения.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 марта 1960 года.

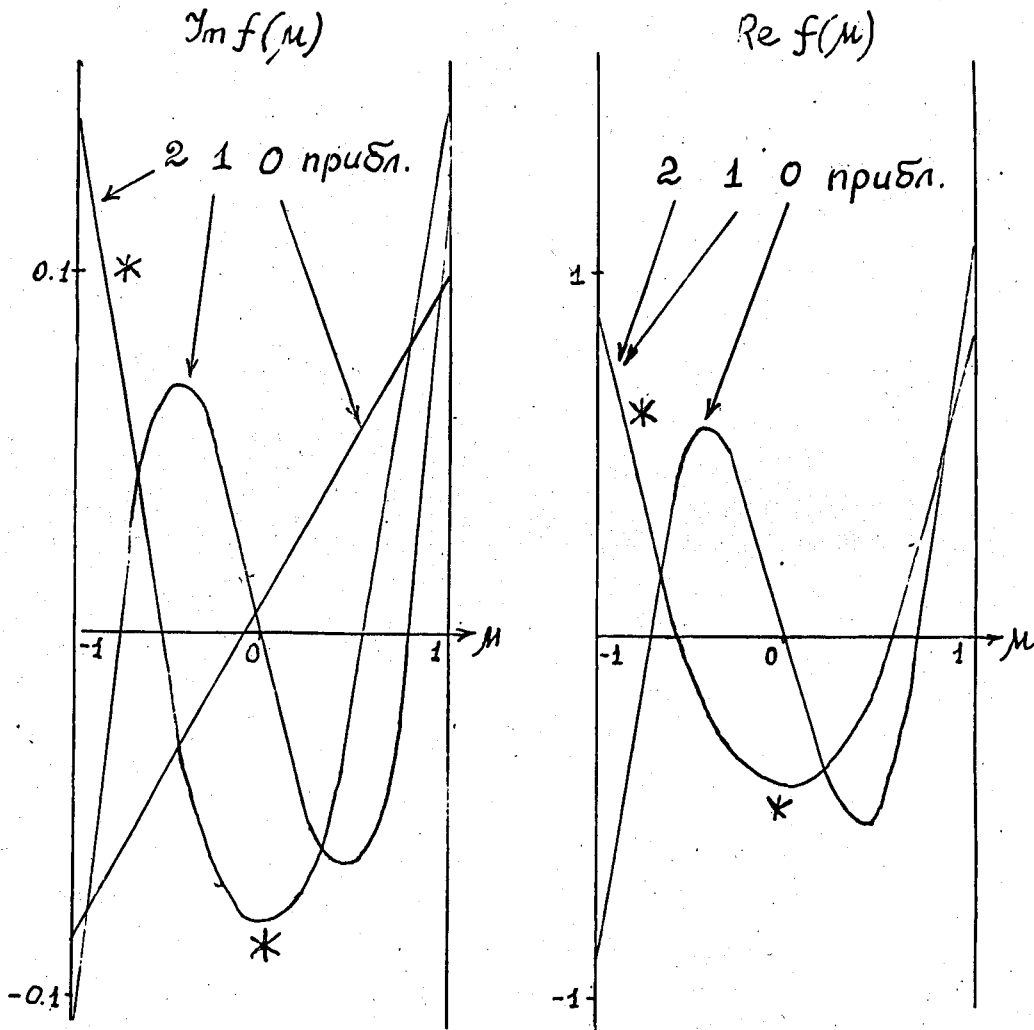


Рис. 1. Сходимость процесса итераций / * - точное решение /.
Пример 8.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

№ 8/909

Л и т е р а т у р а

1. Л. Пузиков, Р. Рындин, Я. Смородинский. ЖЭТФ, 32, 592 /1957/;
Nucl. Phys. 3. 436 (1957).
2. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. "Функциональный анализ в нормированных пространствах", Физматгиз, М, 1959. гл. 18.
3. H. W. Richmond, *J. London. Math. Soc.* 19, 31 (1944).

Таблица I. /т.р.-точное решение/
 Пример I. Фазы: $\eta_0 = -\eta_1 = 15^\circ$; $\eta_2 = \eta_3 = 0^\circ$;
 $J(\mu)$ $R(\mu)$

При- ближ.	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	-0,090	-0,060	+0,003	+0,099	+0,206	+0,285	+0,268	+0,674	+0,490	-0,148	-0,331	+0,074
I	-0,062	-0,046	+0,040	+0,070	+0,255	+0,271	0,954	0,747	0,427	0,102	0,188	0,440
2	-0,059	-0,043	+0,042	+0,172	+0,258	+0,271	0,955	0,748	0,427	0,107	0,185	0,439
3/0/	-0,058	-0,043	+0,042	+0,172	+0,257	+0,271	(+)0,955	(+)0,747	(+)0,427	(+)0,107	(-)0,185	(-)0,439
4/I/	-0,111	-0,058	+0,025	+0,118	+0,202	+0,255	+0,950	+0,747	+0,429	+0,064	-0,244	-0,449
5/I/	-0,109	-0,055	+0,027	+0,120	+0,202	+0,255	+0,951	+0,747	+0,429	+0,062	-0,244	-0,449
т.р.	-0,120	-0,060	+0,019	+0,115	+0,200	+0,254	+0,949	+0,746	+0,429	+0,071	-0,246	-0,449

Пример 2. $\eta_0 = \eta_1 = \eta_3 = 0^\circ$; $\eta_2 = 10^\circ$;

0	-0,176	-0,178	-0,116	+0,051	+0,286	+0,478	-0,665	+0,409	+0,475	-0,301	-0,235	+0,839
I	-0,081	+0,093	+0,084	-0,075	-0,089	+0,079	0,694	0,100	0,350	0,352	0,102	0,694
2/0/	-0,091	+0,043	+0,051	-0,046	-0,039	+0,095	(+)0,692	(+)0,128	(-)0,356	(-)0,357	(+)0,130	(+)0,692
3/I/	+0,126	+0,023	-0,065	-0,063	+0,025	+0,122	+0,687	+0,133	-0,354	-0,354	+0,133	+0,688
4/2/	+0,123	+0,023	-0,062	-0,063	+0,023	+0,121	+0,687	+0,133	-0,354	-0,354	+0,133	+0,688
т.р.	+0,121	+0,023	-0,062	-0,062	+0,023	+0,121	+0,688	+0,133	-0,354	-0,354	+0,133	+0,688

Пример 3.

При- близ.	J(μ)						R(μ)					
	μ ₁	μ ₂	μ ₃	μ ₄	μ ₅	μ ₆	μ ₁	μ ₂	μ ₃	μ ₄	μ ₅	μ ₆
0	+0,121	+0,023	-0,062	-0,062	+0,023	+0,121	-0,189	+0,146	+0,042	-0,228	+0,163	+1,061
I	-0,300	+0,063	+0,146	-0,060	-0,104	+0,113	0,702	0,321	0,366	0,389	0,310	0,755
2/0/	-0,241	+0,070	+0,127	-0,066	-0,096	+0,117	(-)0,725	(+)0,320	(+)0,373	(-)0,388	(-)0,312	(-)0,755
3/1/	-0,134	+0,057	+0,069	-0,088	-0,057	+0,132	-0,752	+0,322	+0,388	-0,388	-0,322	+0,752
4/2/	-0,133	+0,057	+0,068	-0,068	-0,057	+0,133	-0,752	+0,322	+0,388	-0,388	-0,322	+0,752
т.р.	-0,133	+0,057	+0,068	-0,068	-0,057	+0,133	-0,752	+0,322	+0,388	-0,388	-0,322	+0,752

Фазы: $\eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = 0$; $\eta_3 = 15^\circ$

Пример 4.

0	-1,191	+1,033	+0,574	-1,166	+0,742	+5,657	-1,070	+0,831	+0,229	-1,304	+0,945	+6,087
I	-1,101	+0,868	+0,270	-1,321	+0,912	+6,098	1,073	0,810	0,204	1,304	0,966	6,118
2	-1,087	+0,840	+0,240	-1,312	+0,939	+6,108	1,087	0,839	0,239	1,312	0,940	6,109
т.р.	-1,087	+0,840	+0,239	-1,312	+0,939	+6,108	-1,087	+0,840	+0,239	-1,312	+0,939	+6,108

Фазы: $\eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 45^\circ$

Пример 5.

0	-0,017	+0,013	+0,004	-0,020	+0,014	+0,093	+0,554	+0,107	-0,286	-0,286	+0,107	+0,554
I	+0,122	+0,024	-0,063	-0,063	+0,024	+0,121	+0,688	+0,133	-0,354	-0,354	+0,133	+0,688
2	+0,122	+0,023	-0,063	-0,063	+0,024	+0,121	+0,688	+0,133	0,354	0,354	+0,133	+0,688
точн. реш.	+0,121	+0,0235	-0,063	-0,063	+0,0235	+0,121	+0,688	+0,133	-0,354	-0,354	+0,133	+0,688

Фазы как в примере 2.

Пример 6.

q.

- 21 -

При- близ.	Y(μ)						R(μ)					
	μ ₁	μ ₂	μ ₃	μ ₄	μ ₅	μ ₆	μ ₁	μ ₂	μ ₃	μ ₄	μ ₅	μ ₆
0	-0,076	-0,052	-0,014	+0,029	+0,067	+0,091	-0,752	+0,322	+0,388	-0,388	-0,322	+0,752
I	-0,094	+0,043	+0,050	-0,050	-0,043	+0,093	+0,692	+0,128	-0,356	-0,356	+0,128	+0,692
2	+0,126	+0,023	-0,065	-0,063	+0,025	+0,122	+0,686	+0,133	-0,354	-0,354	+0,132	+0,688
точн. реш.	+0,121	+0,0235	-0,063	-0,063	+0,0235	+0,121	+0,688	+0,133	-0,354	-0,354	+0,133	+0,688

Фазы как в примере 2.

Пример 7. Фазы: $\eta_0 = 15^\circ$; $\eta_1 = -15^\circ$; $\eta_2 = 4^\circ$; $\eta_3 = 0^\circ$

При- ближ.	$J(\mu)$						$R(\mu)$					
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	-0,105	-0,013	+0,059	+0,102	+0,174	+0,667	+1,298	+0,815	+0,249	-0,109	-0,178	-0,100
1	-0,108	-0,066	+0,009	+0,107	+0,206	+0,274	+1,229	+0,800	+0,285	+0,070	+0,190	+0,169
2	-0,104	-0,062	+0,009	+0,105	+0,204	+0,274	1,229	0,800	0,285	-0,073	-0,192	-0,170
3	-0,103	-0,062	+0,009	+0,105	+0,204	+0,274	1,229	0,800	0,285	-0,073	-0,192	-0,170
Точн. реш.	-0,101	-0,062	+0,009	+0,105	0,204	+0,274	+1,229	+0,800	+0,285	-0,073	-0,192	-0,170

Пример 8.

0	-0,105	-0,013	+0,059	0,102	0,174	0,267	+1,298	+0,814	+0,249	-0,109	-0,178	-0,100
1	-0,929	-0,650	-0,301	-0,033	+0,091	+0,115	+0,881	+0,634	+0,293	+0,176	+0,475	+0,772
2	-0,518	+0,218	+0,177	+0,137	+0,114	+0,112	+0,426	+0,164	+0,163	+0,115	+0,470	+0,772
3	-0,102	+0,099	+0,081	+0,086	+0,104	+0,114	+0,276	+0,104	+0,044	+0,157	+0,472	+0,772
4	+0,073	+0,062	+0,055	+0,065	+0,088	+0,108	+0,265	+0,129	+0,039	+0,167	+0,476	+0,772
5	+0,104	+0,054	+0,051	+0,062	+0,085	+0,108	+0,275	+0,133	+0,044	+0,168	+0,476	+0,773
Точн. реш.	0,065	0,056	+0,051	+0,062	+0,086	+0,108	+0,287	+0,132	+0,044	+0,168	+0,476	+0,773

Фазы: $\eta_0 = 15^\circ$; $\eta_1 = 5^\circ$; $\eta_2 = 4^\circ$; $\eta_3 = 0^\circ$;

Пример 9.

	$Y(\mu)$						$R(\mu)$					
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	-0,099	-0,015	+0,056	+0,105	+0,176	+0,260	+0,358	+0,203	+0,115	+0,239	+0,548	+0,844
I	+0,085	+0,071	+0,062	+0,068	+0,088	+0,108	+0,282	+0,124	+0,028	+0,166	+0,476	+0,773
2	+0,111	+0,054	+0,051	+0,063	+0,086	+0,108	+0,272	+0,133	+0,044	+0,168	+0,476	+0,773
3	+0,099	+0,054	+0,051	+0,062	+0,086	+0,108	+0,277	+0,132	+0,044	+0,168	+0,476	+0,773
Точн. реш.	+0,065	+0,056	+0,051	+0,062	+0,086	+0,108	+0,287	+0,132	+0,044	+0,168	+0,476	+0,773

Фазы как в примере 8.

Пример 10.

0	-0,093	-0,030	+0,042	+0,110	+0,183	+0,248	+0,287	+0,132	+0,044	+0,168	+0,476	+0,773
I	+0,971	+0,744	+0,476	+0,302	+0,262	+0,292	+0,866	+0,335	+0,406	+0,264	+0,075	+0,079
2	+0,253	-0,276	-0,125	-0,021	+0,219	+0,328	+1,277	+0,768	+0,215	-0,146	-0,162	-0,128
3	+0,079	-0,085	-0,015	+0,092	+0,204	+0,284	+1,300	+0,811	+0,249	-0,115	-0,181	-0,102
Точн. реш.	-0,090	-0,060	+0,003	+0,099	+0,206	+0,285	+1,298	+0,814	+0,249	-0,109	-0,178	-0,100

Фазы: $\eta_0 = 15^\circ$; $\eta_1 = -15^\circ$; $\eta_2 = 5^\circ$; $\eta_3 = 0^\circ$.

Таблица 2

Последнее приближение и точное решение
/ 4 десятичных знака/

		J(μ)						R(μ)					
		μ ₁	μ ₂	μ ₃	μ ₄	μ ₅	μ ₆	μ ₁	μ ₂	μ ₃	μ ₄	μ ₅	μ ₆
1	пр.	I09I	5504	2709	II97	20I9	2548	9507	7467	4285	6260	2442	449I
	точ.	I204	6589	I903	II49	I999	2544	9493	7459	4290	7I03	2459	4494
2	пр.	I230	2349	6249	625I	2348	I2I2	6877	I332	3545	3545	I332	6877
	точ.	I2I3	2349	625I	625I	2349	I2I3	6874	I332	3545	3545	I332	6877
3	пр.	I327	568I	6843	6837	5683	I326	7520	322I	3878	3878	322I	752I
	точ.	I326	5680	6838	6838	5680	I326	752I	322I	3878	3878	322I	752I
4	пр.	I087	8402	2400	I3I2	939I	6I08	I087	8390	2389	I3I24	9397	6I08
	точ.	I087	8396	2395	I3I2	9394	6I08	I087	8396	2395	I3I24	9394	6I08
6	пр.	I263	23I0	65II	6283	2499	I2I9	6867	I333	3540	3544	I329	6876
	точ.	I2I3	2349	625I	625I	2349	I2I3	6877	I332	3545	3545	I332	6877
5	пр.	I2I6	2349	6250	625I	2349	I2I3	6876	I332	3545	3545	I332	6877
	точ.	I2I3	2349	625I	625I	2349	I2I3	6877	I332	3545	3545	I332	6877
7	пр.	I026	6209	8953	I049	2037	2739	I229	800I	2847	732I	I9I7	I695
	точ.	I008	62I0	8947	I049	2037	2739	I229	800I	2847	732I	I9I7	I695
8	пр.		5395	5089	62I5	8545	I076	2752	I327	4425	I679	4765	7727
	точ.		557I	5I46	6233	8585	I078	2869	I3I9	4360	I679	4764	7727
9	пр.		5495	5II3	622I	8578	I078	2770	I323	4398	I679	4764	7727
	точ.		557I	5I46	6233	8585	I078	2869	I3I9	4360	I679	4764	7727
10	пр.				9I76	2037	2843		8II3	2486	II52	I806	I0I9
	точ.				99I9	2058	2849		8I35	2489	I089	I783	I002